

УДК 319.216

Б. Марченко, докт. фіз.-мат. наук; Б. Млинко, канд. техн. наук;

М. Фриз, канд. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИЗНАЧЕННЯ ОСНОВНИХ ЙМОВІРНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФОТОПЛЕТИЗМОСИГНАЛУ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПЕРІОДИЧНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

У статті запропоновано нову математичну модель фотоплетизмосигналу (ФПС) у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу, яка відображає біофізичні особливості породження досліджуваного сигналу, його стохастичну періодичність, дозволяє аналізувати ФПС методом характеристичних функцій, визначати інформативні ознаки за результатами експериментальних досліджень.

Побудова та обґрунтування моделі – один із найважливіших етапів статистичного аналізу сигналів і використання отриманих результатів в діагностичних системах з метою розв’язування задач виявлення інформативних ознак, розпізнавання патологій та прийняття рішень.

Фотоплетизмосигнали (ФПС) – це зареєстровані у часі ритмічні зміни світлопроникності органів або частини тіла, зумовлені змінами величини їх кровонаповнення.

ФПС за своєю природою є випадковими, тобто їхні реалізації змінюються від спостереження до спостереження.

Сучасні дослідження фотоплетизмосигналів у деякій мірі використовують стохастичний підхід до їх моделювання та обробки. Найпоширенішим і найпростішим методом обробки ФПС є визначення та статистичний аналіз таких показників, як максимуми, мінімуми, точки перегину отримуваних кривих, площі під кривими та ін. [1, 2]. Такі діагностичні ознаки є зрозумілими і звичними для лікарів, оскільки вони використовують їх у своїй практиці при постановці діагнозу за зареєстрованими сигналами “вручну”.

В сучасних дослідженнях при розробці математичних моделей ритмічних сигналів впроваджуються стохастично періодичні випадкові процеси, тобто такі процеси, в яких певні ймовірнісні характеристики є періодичними функціями часу. Такі моделі, в тій чи іншій мірі, враховують наявність циклічності в часовій структурі сигналів. Загальновідомою найпростішою моделлю ритмічних біосигналів є адитивна суміш стаціонарного в широкому розумінні випадкового процесу та детермінованої періодичної функції [3]. Така модель має досить спрощений характер і не дозволяє поглибити опис сигналів до рівня, необхідного для потреб сучасної діагностики.

Зазначимо, що вказана модель не має біофізичного підґрунтя. Очевидно, вона побудована лише на основі апостеріорного аналізу експериментальних результатів.

До моделей такого типу можна віднести також моделі сигналів у вигляді періодично-корельованих випадкових процесів (ПКВП), для яких, на відміну від стаціонарних процесів, перші дві моментні функції є періодичними з деяким періодом [4, 5].

Завдяки використанню цих моделей було досягнуто певних результатів при дослідженні ритмічних процесів. Незважаючи на деякі переваги ПКВП у порівнянні із іншими вищерозглянутими математичними моделями, все ж ці процеси неможливо пов’язати із біофізичними властивостями досліджуваного сигналу, зокрема тому, що вони є неконструктивними. Крім того, модель у вигляді ПКВП враховує періодичність лише перших двох моментних функцій - математичного сподівання та кореляційної функції (хоча назва моделі начебто вказує на періодичність, власне, самого процесу) і,

як наслідок, дозволяє вивчати ці сигнали тільки у рамках кореляційної теорії. Вищі ж моментні функції та функції розподілу не можуть бути враховані на її основі. При визначенні ж похибки результату вимірювання та статистичної обробки ФПС навіть у рамках кореляційної теорії необхідно знати моменти вище другого порядку.

Таким чином, проведений аналіз літературних джерел показав, що дослідженню моделей біосигналів такої природи присвячена порівняно невелика кількість робіт. Відомі моделі мають певні недоліки, зокрема, є описовими або взагалі не придатними для розв'язування поставлених задач.

Розглянемо побудову математичної моделі ФПС з урахуванням біофізичних особливостей його формування.

Відбір сигналу здійснюється оптоелектронним вимірювальним перетворювачем (ОЕВП), який працює в інфрачервоній області світлового діапазону. Принцип дії ОЕВП ґрунтується на просвічуванні досліджуваної ділянки світловим потоком від джерела випромінювання (світлодіод) і вимірюванні відбитого потоку фотоприймачем (фотодіод).

Потік випромінювання, що попадає на фотоприймач, містить дві складові: постійну та змінну, яка є інформативною. Величина змінної складової інтенсивності світла, яка реєструється та досліджується, визначається величиною інтенсивності світла, що розсіялось за рахунок відбивання від еритроцитів [6], тобто визначається кількістю та властивостями еритроцитів. Саме їх кількість у світловому пучку суттєво впливає на світлопоглинання крові, випадково змінюється з часом, причому змінюється ритмічно, що зумовлено періодичними скороченнями серця.

В область, прозондовану світловим пучком, у момент часу $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$ потрапляє кожен k -ий еритроцит ($k \in \mathbf{Z}$). Це призводить до відбивання ним світла з інтенсивністю, яка описується функцією $\tilde{I}_k(\tau_k, t)$, де τ_k - момент входу k -го еритроцита в область світлового пучка; t - момент спостереження. Моменти часу $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$ попадання еритроцитів у світловий пучок є випадковими. Кожний k -ий еритроцит перебуває у світловому пучку протягом скінченного інтервалу часу $[\tau_k, \tau_k + \tilde{l}(\tau_k)]$, (де $\tilde{l}(\tau) > 0$ - тривалість перебування еритроцита у світловому пучку, яка є функцією (випадковою) від τ , оскільки швидкість руху крові (і, відповідно, час перебування еритроцита у світловому пучку) залежить від фази роботи серця: під час систоли вона більша, а під час діастолі – менша), тому $\tilde{I}_k(\tau_k, t)$, як функція t , має імпульсний характер, $\tilde{I}_k(\tau_k, t) = 0$ при $t \notin [\tau_k, \tau_k + \tilde{l}(\tau_k)]$. Розміри, форма кожного еритроцита, а також положення їх відносно падаючого на них випромінювання мають випадковий характер, тому імпульси $\tilde{I}_k(\tau_k, t)$ є випадковими функціями (на рис.1 пунктиром схематично зображено реалізацію такої функції).

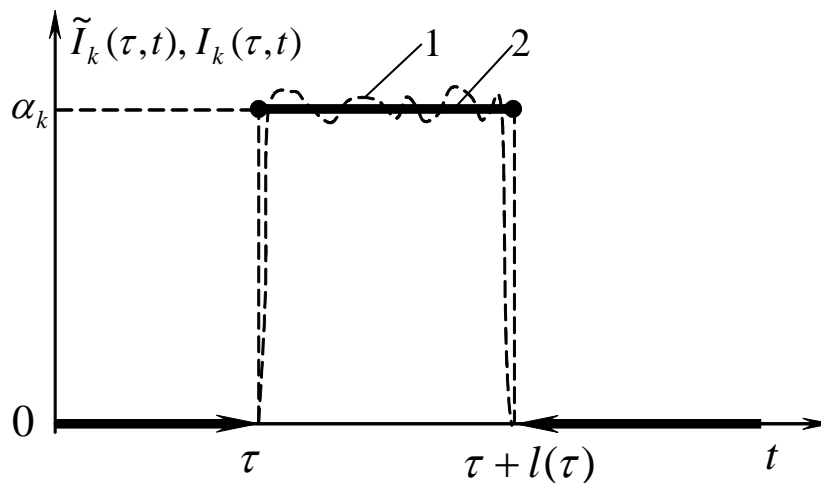


Рисунок 1 - Графічне зображення реалізацій: 1 - відбитого імпульсу ($\tilde{I}_k(\tau, t)$) та 2 - його моделі ($I_k(\tau, t)$)

Далі для побудови моделі ФПС приймаються такі спрощення.

1. Замість випадкової функції $\tilde{l}(\tau)$ розглядається її математичне сподівання $l(\tau) = M\tilde{l}(\tau)$ (середня тривалість перебування еритроцита в світловому пучку), $l(\tau) = l(\tau + T)$, де T - період серцевих скорочень.
2. Замість функції $\tilde{I}_k(\tau, t)$ вводиться функція

$$I_k(\tau, t) = \alpha_k \varphi(\tau, t), \quad (1)$$

де $\alpha_k > 0, k \in \mathbf{Z}$ - випадкові величини; $\varphi(\tau, t)$ - не випадкова функція, яка зображується наступним чином:

$$\varphi(\tau, t) = U(t - \tau) \cdot U(\tau + l(\tau) - t), \quad (2)$$

де $U(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0 \end{cases}$ - функція Хевісайда,

причому, функція $I_k(\tau, t)$ така, що $\int_{-\infty}^{\infty} I_k(\tau, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}_k(\tau, t) dt, \forall \tau$ (див. рис.1).

Відносно процесу попадання еритроцитів у світловий пучок вважатимемо наступне:

1. Еритроцити входять у зону, прозондовану світловим пучком, у послідовні моменти часу $\{\dots \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_k \dots\} = \{\tau_k, k \in \mathbf{Z}\}$, причому величини $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, інтервалів між ними є незалежними випадковими величинами.
2. За достатньо малий проміжок часу $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ ймовірність появи одного відбитого імпульсу (входу еритроцита у світловий пучок) дорівнює $\lambda(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$, де $\lambda(\tau)$ - детермінована функція, що характеризує інтенсивність появи еритроцитів у світловому пучку (вона є функцією часу τ , оскільки, як і $l(\tau)$, залежить від фази роботи серця), $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$. Ймовірність появи більш, ніж одного імпульсу за малий проміжок часу $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ має порядок $o(\Delta\tau)$.
3. $\alpha_k > 0, k \in \mathbf{Z}$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які не залежать також і від випадкових величин $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$.

На основі п.1, 2 можна зробити висновок, що процес виникнення відбитих імпульсів є нестационарним пуассонівським потоком з параметром $\lambda(\tau)$.

Середовище, де розповсюджуються відбиті світлові імпульси, має лінійні властивості, тому інтенсивність світла, що поступає на фотоприймач (сумарний відбитий сигнал), дорівнює сумі інтенсивностей світлових імпульсів, відбитих кожним еритроцитом зокрема. Отже, змінну складову $\xi(t)$ ФПС можна представити у вигляді:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(\tau_k, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(\tau_k, t). \quad (3)$$

Вираз (3) можна зобразити у зручнішому для розв'язування теоретичних і практичних задач вигляді. Для цього введемо неоднорідний узагальнений пуассонівський процес $\pi(\tau)$, що відповідає нестационарному пуассонівському потокові з параметром $\lambda(\tau)$, який був розглянутий вище і характеризує процес появи відбитих імпульсів світла. А саме процес $\pi(\tau)$ введемо так, щоб його стрибки відбувалися у моменти τ_k і були рівними випадковим величинам α_k .

Тоді процес $\xi(t)$ можна записати у вигляді стохастичного інтегралу:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\pi(\tau). \quad (4)$$

Випадковий процес $\xi(t)$, який допускає зображення (4), називається лінійним випадковим процесом (ЛВП) [7]. У цьому зображенні: $\varphi(\tau, t)$ – не випадкова функція (ядро ЛВП), для якої, враховуючи розглянуті вище властивості відбитих імпульсів, виконується умова: $\varphi(\tau, t) = 0$ при $t < \tau$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) d\tau < \infty, \forall t$; $\pi(\tau)$,

$\mathbf{P}\{\pi(0) = 0\} = 1, \mathbf{D}[d\pi(\tau)] < \infty$ – породжуючий процес з незалежними приростами.

Ядро $\varphi(\tau, t)$ характеризує імпульси (2), а породжуючий процес $\pi(\tau)$ – моменти їх появи та інтенсивність.

Математична модель ФПС, побудована у даній роботі, має біофізичне підґрунтя (оскільки обґрунтована на основі фізики взаємодії світла з еритроцитами), враховує стохастичність досліджуваного сигналу та може бути використана в задачах визначення функціонального стану судинного русла, оскільки допускає визначення своїх характеристик за результатами експериментальних досліджень.

В моделі (4) враховано також ритмічні властивості ФПС. Дійсно, оскільки $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$, то $\pi(\tau)$ є процесом з незалежними T -періодичними приростами [8]. З того, що $l(\tau) = l(\tau + T)$ випливає $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T)$. Згідно з [8], тепер можна стверджувати, що випадковий процес (4) є стохастично періодичним за Слуцьким, тобто

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T),$$

де $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ - n -вимірний функція розподілу випадкового процесу $\xi(t)$.

Таким чином, випадковий процес (4) є лінійним періодичним випадковим процесом (ЛПВП) [8].

Позитивною властивістю ЛВП є те, що вони мають безмежно-подільні функції розподілу, для яких відома загальна форма характеристичної функції. Це дає можливість розв'язувати прикладні задачі аналізу процесів з урахуванням їх законів розподілу у повному обсязі.

Для лінійного періодичного випадкового процесу $\xi(t)$ логарифм n -вимірної характеристичної функції визначається виразом [8]:

$$\begin{aligned} \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) = \\ &= i \sum_{j=1}^n u_j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_j) d\mu(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_i) \varphi(\tau, t_j) d\sigma(\tau) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(\tau, t_k)} - 1 - \frac{ix}{1+x^2} \sum_{k=1}^n u_k \varphi(\tau, t_k) \right] d_x d_\tau L(x, \tau), \end{aligned} \quad (5)$$

де $L(x, \tau)$ - невизначена в нулі функція, яка називається пуассонівським спектром стрибків у формі Леві породжуючого процесу (в загальному випадку породжуючим може бути будь-який процес з незалежними приростами).

Ця функція визначається як

$$L(x, \tau) = \begin{cases} M(x, \tau), & x < 0, \\ N(x, \tau), & x > 0. \end{cases}$$

де $M(x, \tau)$ та $N(x, \tau)$ ($M(-\infty, \tau) = N(\infty, \tau) = 0$) - неспадні функції, що відповідно задають від'ємні та додатні стрибки (прирости) породжуючого процесу.

Функції $\mu(\tau)$ та $\sigma(\tau)$ визначаються так:

$$\begin{aligned} d\mu(\tau) &= d\kappa_1(\tau) - d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x d_x L(x, \tau), \\ d\sigma(\tau) &= d\kappa_2(\tau) - d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) d_x L(x, \tau), \end{aligned}$$

де $\kappa_1(\tau)$ та $\kappa_2(\tau)$ - перша та друга кумулянтні функції породжуючого процесу.

Як відзначається в [9], наявність загального вигляду характеристичної функції лінійного випадкового процесу є досить важливою властивістю, яка зумовлює таку ж універсальність в прикладному плані моделі (4), як, наприклад, моделі гауссівських процесів, які є частинним випадком лінійних процесів. Загальний вигляд характеристичної функції (5) дозволяє проводити повний аналіз відгуків лінійних систем: знаходити кумулянти, функцію розподілу відгуку, вивчати розподіл стрибків їх реалізацій на вході та виході таких систем, досліджувати зв'язки між вхідними і вихідними характеристиками лінійних ланок і, що винятково важливо для практики, досліджувати ергодичні властивості емпіричних характеристик їх оцінок.

Вираз (5) задає характеристичну функцію ЛПВП загального виду. Врахуємо тепер, що $\pi(\tau)$ - це узагальнений пуассонівський процес. У цьому випадку, згідно з [7], логарифм n -вимірної характеристичної функції ЛПВП має вигляд:

$$\begin{aligned} \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi(\tau, t_k)} - 1 \right) dF(x) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

де $F(x)$ - функція розподілу випадкових величин $\alpha_k, k \in \mathbf{Z}$.

Згідно з [6], кількість еритроцитів в 1 мм^3 становить близько $5 \cdot 10^6$, максимальна швидкість кровотоку - 6 см/с, тому, очевидно, у даному випадку $\lambda(\tau)$ є достатньо великою. Звідси випливає, що процес $\xi(t)$ має розподіл достатньо близький до нормального. Даний висновок підтверджено результатами гістограмного аналізу одно- та двовимірних розподілів ФПС з використанням χ^2 - критерію Пірсона [10].

Оскільки процес $\xi(t)$ має близький до нормального розподіл, то він достатньо повно характеризується своїм математичним сподіванням та кореляційною функцією. Тому в [10] ідентифіковано інформативні параметри ФПС на основі аналізу

математичного сподівання та кореляційної функції методом ортогональних розкладів. А саме, як інформативні, використовуються перші 6 коефіцієнтів ортогонального розкладу математичного сподівання в базисі дискретних експоненціальних функцій та перші 7 власних векторів та власних чисел кореляційної функції. В [10] розглянуто також методи статистичного оцінювання інформативних параметрів.

З іншого боку, математичне сподівання та кореляційна функція ФПС, з аналізу яких визначаються згадані інформативні параметри, безпосередньо зв'язані з характеристиками обгрунтованої вище моделі (4).

Дійсно, з (6) неважко знайти математичне сподівання $\mathbf{M}\xi(t)$ та кореляційну функцію $R(t_1, t_2)$ процесу (4). А саме:

$$\mathbf{M}\xi(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial [\ln f(u; t)]}{\partial u} \Big|_{u=0} = m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) \lambda(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 [\ln f(u_1, u_2; t_1, t_2)]}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0} = m_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_1) \varphi(\tau, t_2) \lambda(\tau) d\tau, \quad (8)$$

де $m_1 = \kappa_1 = \mathbf{M}\alpha_k$, $m_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2 = \mathbf{M}\alpha_k^2$;

$f(u; t)$, $f(u_1, u_2; t_1, t_2)$ - одно- та двовимірні характеристичні функції процесу $\xi(t)$, які отримуються з (6), відповідно, при $n=1$ та $n=2$.

Згідно з [8], моментні функції ЛПВП є періодичними за сукупністю аргументів. Тобто, для (7) і (8) має місце $\mathbf{M}\xi(t) = \mathbf{M}\xi(t+T)$, $R(t_1, t_2) = R(t_1+T, t_2+T)$.

Таким чином, у статті обгрунтовано математичну модель ФПС у вигляді ЛПВП, яка, на відміну від існуючих, відображає суть біофізичної інформації про породження ФПС, враховує стохастичність та ритмічність, дозволяє проводити його ймовірнісний аналіз методом характеристичних функцій, тобто з урахуванням його законів розподілу у повному обсязі. З використанням методу характеристичних функцій показано взаємозв'язок перших двох моментних функцій ФПС (які є основою для ідентифікації інформативних ознак) з характеристиками ядра та породжуючого процесу ЛВП.

New model of the photoplethysmic signal as a linear periodical random process are presented. The biophysical specifics of investigated signal generation and its stochastic periodical nature are shown in the model. It allows to analyze photoplethysmic signal using character function methods and to determine of informative factors using results of experimental investigation.

Література

1. Десова А.А., Вапник Т.Н., Белова И.И. Использование показателей периферического пульса для дифференциальной диагностики заболеваний легких // Физиология человека. – 1991. – Т.17, №2. – С. 54-60.
2. А.А.Десова, Ю.С.Легович, О.С.Разин. Компьютерная система диагностики на базе анализа ритмической структуры пульсового сигнала лучевой артерии // Медицинская техника. – 1999. – №3. – С. 3-5.
3. Мерсер Д. (Mercer D.M.) Аналитические методы исследования периодических процессов, замаскированных случайными флуктуациями. - В кн.: Биологические часы. - М.: Мир, 1964. - С. 126-152.
4. Драган Я.П. Структура и представление моделей стохастических сигналов. - К.: Наукова думка, 1980. - 381 с.
5. Драган Я.П., Приймак Н.В. Линейные периодически коррелированные случайные процессы. – Львов: 1986. - 30 с.
6. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно- неоднородных средах. [Т1]: Однократное рассеяние и теория переноса: Пер. с англ. Л.А. Апресяна и др. - М.: Мир, 1981. – 238 с.
7. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. - К.: Наукова думка, 1973. - 191 с.
8. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси // Праці Інституту електродинаміки НАН України. Електротехніка. - Київ: ІЕД НАН України, 1999. - С. 172-185.
9. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. - К.: Наукова думка, 1992. - 196 с.
10. Млинко Б.Б., Фриз М.Є. Ідентифікація та оцінювання діагностичних параметрів на основі аналізу фотоплетизмограми // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2002. - Т.7, №4. - С. 81-87.

Одержано 26.12.2005 р.