

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 519.63

І. Баран, канд. техн. наук; В. Дейнека, докт. фіз.-мат. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

У роботі розглянуто задачу, що описується еліптичним рівнянням з умовами спряження неідеального контакту та різними крайовими умовами. На основі методу скінченних елементів (МСЕ) побудовані обчислювальні алгоритми підвищеного порядку точності дискретизації задачі. Наведено результати розв'язку модельного прикладу.

**Вступ.** Сучасні технічні об'єкти є складними, багатокомпонентними структурами, які містять тонкі включення (теплоізоляційні покриття, технологічні шви, контактні зазори та ін.), що породжують розриви як в полях, що супроводжують процеси, які в них протікають, так і в їх потоках. Враховувати вплив тонких включень на реальні фізичні процеси можна за допомогою умов спряження неідеального контакту. В роботі [1] наведено математичні моделі, що описують температурні поля тіл із включеннями. Велике значення має питання удосконалення існуючих і розробка нових методів розрахунку температурних полів у тілах при їх механічній взаємодії з урахуванням теплоутворення в зоні контакту [2]. На даний час одним із найкращих методів для розв'язування задач з умовами спряження неідеального контакту є МСЕ [3].

Метою роботи є дослідження стаціонарних температурних полів у системі двох циліндрів за умов неідеального теплового контакту та різних крайових умов.

**Постановка задачі.** Розглянемо порожнистий циліндр  $\Omega$ , який утворений з двох коаксіальних конусоподібних циліндрів (відповідно  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ ), виготовлених з різних матеріалів. Циліндри контактують між собою через тонке включення  $\gamma$  ( $\gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ,  $\gamma \neq \emptyset$ ). В кожній із областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  з ділянкою  $\gamma$  та зовнішньою границею  $\Gamma$  ( $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma \cup \Omega \cup \gamma = \overline{\Omega}$ ,  $\Gamma \setminus \gamma \neq \emptyset$ ) справедливе рівняння, записане в циліндричній системі координат

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (1)$$

де  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Коефіцієнти  $\lambda_r, \lambda_z$  - неперервні на кожній із областей  $\overline{\Omega_1}, \overline{\Omega_2}$ , мають неперервні обмежені перші частинні похідні на  $\Omega_1, \Omega_2$  та задовольняють умову  $0 < \lambda_0 \leq \lambda_r, \lambda_z \leq \lambda_1 < \infty$ . Відома функція  $f|_{\Omega_i} = f(r, z)|_{\Omega_i}$  - неперервна і обмежена на областях  $\Omega_i$ , така, що  $|f| < \infty$ , ( $i = 1, 2$ ).

На границі конструкції  $\Gamma$  задамо різні варіанти змішаних крайових умов.

Для першого випадку:

$$u = \varphi(r, z), \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = \mu, \quad (r, z) \in \Gamma_2, \quad (3)$$

де  $\mu = \mu(r, z)$  - відома функція;  $n$  - зовнішня нормаль до  $\Gamma_2$ .

Для другого випадку задамо умову (2) та умову

$$\lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = -\alpha u + \beta, \quad (r, z) \in \Gamma_2, \quad (4)$$

де  $\beta = \beta(r, z)$  - відома функція,  $\alpha = const > 0$ .

На включенні  $\gamma$  області  $\Omega$  задамо неоднорідні умови спряження неідеального контакту у такому вигляді

$$R_1 \left\{ \lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) \right\}^- + R_2 \left\{ \lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) \right\}^+ = [u] + \delta, \quad (r, z) \in \gamma, \quad (5)$$

$$\left[ \lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) \right] = \beta_1 (v u^+ + \chi u^-) + \alpha_1, \quad (r, z) \in \gamma, \quad (6)$$

де  $n$  - нормаль до  $\gamma$  з  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ ;  $[u] = u^+ - u^-$ ,  $u^+ = \{u\}^+ = u(r, z)$  при  $(r, z) \in \gamma \cap \partial\Omega_2$ ,  $u^- = \{u\}^- = u(r, z)$  при  $(r, z) \in \gamma \cap \partial\Omega_1$ ,  $\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ;  $R_1, R_2, \beta_1, \nu, \chi = const \geq 0$ ,  $R_1 + R_2 > 0$ ,  $\nu = R_1 / (R_1 + R_2)$ ,  $\chi = R_2 / (R_1 + R_2)$ ,  $\nu + \chi = 1$ ;  $\delta = \delta(r, z)$ ,  $\alpha_1 = \alpha_1(r, z)$  - неперервні на відрізку  $\gamma$  функції.

Таким чином, стаціонарне температурне поле у складеному циліндричному тілі для першого випадку крайових умов описується задачею (1)-(3), (5), (6) (задача 1), а для другого випадку крайових умов - задачею (1), (2), (4)-(6) (задача 2).

Використовуючи викладену в роботі [3] методику та результати, отримані автором в роботі [4], для задачі 1 будемо відповідну їй варіаційну задачу, яка полягає у відшуканні функції  $u_1(r, z) \in H$ , що  $\forall v(r, z) \in H = \{v(r, z)|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i): i = 1, 2; v|_{\Gamma_1} = \varphi(r, z)\}$  надає мінімум функціоналу енергії

$$\Phi_1(v) = \iint_{\Omega} r \left\{ \lambda_r \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \lambda_z \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} d\Omega + \int_{\gamma} \frac{r[v]^2}{R_1 + R_2} d\gamma + \int_{\gamma} r \beta_1 (v v^+ + \chi v^-)^2 d\gamma - 2 \iint_{\Omega} r f v d\Omega - 2 \int_{\gamma} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} r [v] d\gamma + 2 \int_{\gamma} r \alpha_1 v^+ d\gamma - 2 \int_{\Gamma_2} r \mu v d\Gamma_2. \quad (7)$$

Тут  $W_2^1(\Omega_i)$  - простір функцій С.Л. Соболева, визначених на областях  $\Omega_i$ .

Задача в слабкій постановці полягає у відшуканні функції  $u_1(r, z) \in H$ , яка  $\forall v(r, z) \in H_0 = \{v(r, z)|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i): i = 1, 2; v|_{\Gamma_1} = 0\}$  задовольняє інтегральне рівняння

$$\iint_{\Omega} r \left\{ \lambda_r \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \lambda_z \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\Omega + \frac{1}{R_1 + R_2} \int_{\gamma} r [u_1][v] d\gamma + \int_{\gamma} r \beta_1 (v u_1^+ + \chi u_1^-) (v v^+ + \chi v^-) d\gamma = \iint_{\Omega} r f v d\Omega + \int_{\gamma} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} r [v] d\gamma - \int_{\gamma} r \alpha_1 v^+ d\gamma + \int_{\Gamma_2} r \mu v d\Gamma_2. \quad (8)$$

Аналогічно, варіаційна задача для задачі 2 полягає у відшуванні функції  $u_2(r, z) \in H$ , яка надає мінімум функціоналу енергії

$$\begin{aligned} \Phi_2(v) = & \iint_{\Omega} r \left\{ \lambda_r \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \lambda_z \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} d\Omega + \int_{\gamma} \frac{r[v]^2}{R_1 + R_2} d\gamma + \int_{\gamma} r\beta_1(vv^+ + \chi v^-)^2 d\gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} \alpha r v^2 d\Gamma_2 - 2 \iint_{\Omega} r f v d\Omega - 2 \int_{\gamma} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} r[v] d\gamma + 2 \int_{\gamma} r \alpha_1 v^+ d\gamma - \\ & - 2 \int_{\Gamma_2} r \beta v d\Gamma_2, \quad \forall v(r, z) \in H. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача в слабкій постановці полягає у відшуванні функції  $u_2(r, z) \in H$ , яка  $\forall v(r, z) \in H_0$  задовольняє інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} r \left\{ \lambda_r \frac{\partial u_2}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \lambda_z \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\Omega + \frac{1}{R_1 + R_2} \int_{\gamma} r[u_2][v] d\gamma + \\ & + \int_{\gamma} r\beta_1(vu_2^+ + \chi u_2^-)(vv^+ + \chi v^-) d\gamma + \int_{\Gamma_2} r \alpha u_2 v d\Gamma_2 = \\ & = \iint_{\Omega} r f v d\Omega + \int_{\gamma} \frac{R_2 \alpha_1 - \delta}{R_1 + R_2} r[v] d\gamma - \int_{\gamma} r \alpha_1 v^+ d\gamma + \int_{\Gamma_2} r \beta v d\Gamma_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Використовуючи результати роботи [3], легко встановити справедливість наступних тверджень.

**Теорема.** Задачі (7), (8) та (9), (10) – еквівалентні. Їхній розв’язок  $u_m(r, z)$  існує і є єдиним в  $H$ . Якщо  $u_m(r, z)|_{\bar{\Omega}_i} \in C^1(\bar{\Omega}_i) \cap C^2(\Omega_i)$ , ( $i=1, 2; m=1, 2$ ), то  $u_m(r, z)$  є класичним розв’язком задачі  $m$ .

**Визначення.** Розв’язки  $u_1(r, z) \in H$  і  $u_2(r, z) \in H$  відповідно задач (7), (8) та (9), (10) називаються узагальненими розв’язками, а самі ці задачі - узагальненими задачами крайових задач 1 і 2 відповідно.

Задачі (7), (8) та (9), (10) зручно розв’язувати за допомогою МСЕ. Для цього розіб’ємо області  $\bar{\Omega}_j$  на  $N_j$  скінченних трикутних елементів  $\bar{e}_i^j$  ( $i=1, N_j; j=1, 2$ ). Для знаходження наближеного узагальненого розв’язку задачі  $m$  використаємо простір  $H_k^N \subset H$  скінченно-елементних функцій  $v_k^N(r, z)$ . Позначимо  $\bar{H}_k^N$  простір неперервних на областях  $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$  функцій  $v_k^N(r, z)$ , що є повними поліномами степеня  $k$  змінних  $r, z$  на кожному з трикутників розбиття  $\bar{e}_i^j$  області  $\bar{\Omega}$ . Тоді наближений узагальнений розв’язок  $u_{km}^N(r, z)$  крайової задачі  $m$  ( $m=1, 2$ ) будемо шукати в  $H_k^N \subset H$ . Тут  $H_k^N$  - простір функцій  $v_k^N(r, z) \in \bar{H}_k^N$ , які набувають відомого значення, що задається в крайовій умові першого роду на  $\Gamma_1$ . Виходячи з варіаційної задачі (7) або (9) (аналогічно задачі в слабкій постановці (8) або (10)), числовий наближений узагальнений розв’язок отримуємо як розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною додатно визначеною розрідженою матрицею.

Якщо класичний розв’язок  $u_m(r, z)$  задачі  $m$  ( $m=1, 2$ ) має на областях  $\Omega_i$  ( $i=1, 2$ ) обмежені неперервні часткові похідні до  $(k+1)$ -го порядку включно, то, згідно з [3], для наближеного узагальненого розв’язку  $u_{km}^N(r, z) \in H_k^N$  цієї задачі мають місце оцінки

$$\left| \Phi_m(u_{km}^N) - \Phi_m(u) \right| \leq \frac{ch^\alpha}{f^2(\theta)}, \quad (12)$$

$$\|u_k^N - u\|_{W_2^1} \leq \frac{c_1 h^k}{f(\theta)}, \quad (13)$$

де  $\alpha=2$  при  $k=1$ . Якщо функція  $\varphi(r, z)$  на  $\Gamma_1$  є поліномом не вище  $k$ -го степеня змінних  $r, z$ , то при  $k=2,3$   $\alpha=2k$ ; інакше –  $\alpha=3,4$ ;  $h$  - довжина найбільшої із сторін всіх трикутників розбиття;  $f(\theta) = \cos(\theta)$ ,  $\theta$  - половина найбільшого із кутів всіх трикутників розбиття при  $k=1$  і  $f(\theta) = \sin(\theta)$ ,  $\theta$  - найменший із кутів всіх трикутників розбиття при  $k=2,3$ ;  $c, c_1$  - постійні, які не залежать від  $h, \theta$ ,

$$\|\varphi\|_{W_2^1}^2 = \iint_{\Omega} \left\{ \varphi^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} d\Omega.$$

**Результати розв’язання модельних прикладів.** В області  $\Omega$ , яка складається з двох областей  $\Omega_1, \Omega_2$  (рис. 1), визначена крайова задача 1 з наступними вхідними даними:

$$\lambda_r = \lambda_z = \begin{cases} \sqrt{2}, & (r, z) \in \bar{\Omega}_1, \\ 2\sqrt{2}, & (r, z) \in \bar{\Omega}_2, \end{cases} \quad f(r, z) = \begin{cases} 12\sqrt{2}, & (r, z) \in \Omega_1, \\ 24\sqrt{2}, & (r, z) \in \Omega_2. \end{cases}$$

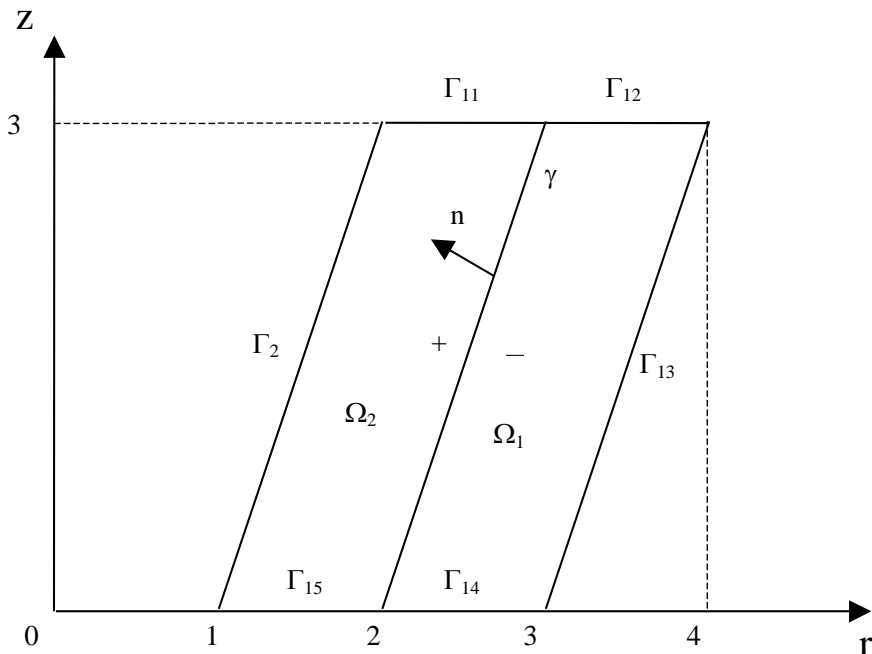


Рисунок 1 - Модельна область  $\Omega$  з включенням  $\gamma$ .

Змішані крайові умови мають вигляд

$$u = -2r^2 - 16, \quad (r, z) \in \Gamma_{11},$$

$$u = -2r^2 - 17, \quad (r, z) \in \Gamma_{12},$$

$$u = -20r^2 + 108r - 161, \quad (r, z) \in \Gamma_{13},$$

$$u = -2r^2 + 1, \quad (r, z) \in \Gamma_{14},$$

$$u = -2r^2 + 2, \quad (r, z) \in \Gamma_{15},$$

$$\lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = \mu, \quad (r, z) \in \Gamma_2,$$

де  $\mu = -16r + 24$ . Тут  $\Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13} \cup \Gamma_{14} \cup \Gamma_{15} = \Gamma_1$ .

Параметри неоднорідних умов спряження неідеального контакту, які задані за допомогою співвідношень (5), (6), такі:  $R_1 = 0,5; R_2 = 0,25; \delta = -8r + 23; \beta_1 = 3; \alpha_1 = 60r^2 - 224r + 235$ .

Класичний розв'язок поставленої задачі має вигляд:

$$u(r, z) = \begin{cases} -2r^2 - 2z^2 + 1, & (r, z) \in \Omega_1, \\ -2r^2 - 2z^2 + 2, & (r, z) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Задачу розв'язано за допомогою системи DIFUS [4]. Для задачі 1 при використанні для апроксимації області кусково-квадратичних функцій МСЕ  $v_2^N \in H_2^N$  [3, 4] область  $\bar{\Omega}$  з включенням  $\gamma$  розбивалась на 400 трикутних елементів з  $n=882$  вузлами розбиття. Півширина стрічки ненульових елементів матриці після перенумерації вузлів  $m=48$ . Відносна похибка  $\Delta = |(u - u_k^N)/u| \cdot 100\%$  отриманого наближеного числового розв'язку знаходилась в таких межах:  $4,7 \cdot 10^{-9} < \Delta < 1,2 \cdot 10^{-4}$ .

Для крайової задачі 2 при розрахунках використовувалися ті самі параметри, що і для задачі 1, за виключенням параметрів крайових умов, які для окремого відрізка границі приймалися такими:

$$\lambda_r \frac{\partial u}{\partial r} \cos(n, r) + \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = -\alpha u + \beta, \quad (r, z) \in \Gamma_2,$$

де  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = -5r^2 - 7r + 20$ .

Відносна похибка отриманого наближеного числового розв'язку знаходилась в наступних межах:  $2,1 \cdot 10^{-9} < \Delta < 3,2 \cdot 10^{-4}$  - для  $v_2^N \in H_2^N$ .

**Висновки.** Для розв'язування задач, що описуються еліптичним рівнянням з умовами спряження неідеального контакту, зручно використовувати побудовані на основі МСЕ високоточні обчислювальні алгоритми. З використанням розробленого на основі цих алгоритмів програмного забезпечення розв'язано модельні приклади. Експерименти показали, що для обох задач використання для апроксимації кусково-квадратичних функцій МСЕ для однакової кількості вузлів розбиття дає результати однакового порядку точності. Теоретичні результати підтвержені експериментальними розрахунками.

*Boundary-value problem for the elliptical equation with conjugate conditions of non-ideal contact is considered. Computing algorithms of the increased accuracy order of sampling for the problems under consideration basing on the finite elements method are constructed. The results of solution of the models examples are indicated.*

### Література

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наукова думка, 1998. – 615 с.
2. Грилицький Д.В. Термопружні контактні задачі в трибології. – Київ: ІЗМН, 1996. – 204 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 2001. – 606 с.
4. Баран І.О. Високоточні обчислювальні алгоритми та система автоматизованого розрахунку дифузійних процесів в багатокomпонентних середовищах: Дис...канд. техн. наук: 01.05.02. Тернопіль, ТДТУ, 2003.

Одержано 09.03.2006 р.