

**РОЗШИРЕНА ОДНОВИМІРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ
П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТРАНСФОРМАТОРІВ ПОПЕРЕЧНО-
ПОПЕРЕЧНОГО ТИПУ**

Медвідь Володимир Романович

к.т.н., доцент

Тернопільській національній технічній університет імені Івана Пулюя

Белякова Ірина Володимирівна

к.т.н., доцент

Тернопільській національній технічній університет імені Івана Пулюя

Пісьціо Вадим Петрович

Тернопільській національній технічній університет імені Івана Пулюя

На сьогоднішній день у системах САПР радіоелектронної апаратури виникла ситуація, при якій, з одного боку, програми математичного моделювання п'єзоелектричних приладів можуть досягнути будь-якої наперед заданої точності моделювання, а з іншого - результати моделювання не можуть бути прямо використані у процесі розробки радіоелектронної апаратури, тому що вони ніяк не інтегровані із самими системами САПР. Тому, для моделювання і розрахунків п'єзотрансформаторів, найчастіше найчастіше користуються метод електромеханічних аналогій, а також експериментально-аналітичні методи дослідження характеристик [1]. Однак, найпростіша модель не враховує навіть другу та третю гармоніки частоти основного резонансу п'єзоелементів [1].

Метою роботи є побудова такої моделі, котра б, з одного боку, була прийнятною за точністю і враховувала хоча б декілька перших гармонік (що, в

принципі, достатньо для практичних задач), а з іншого - була досить простою для інтерактивної зміни параметрів у процесі моделювання радіоелектронної апаратури і дозволяла враховувати та змінювати параметри п'єзоелектричних пристроїв, не виходячи із базового САПР радіоелектронної апаратури.

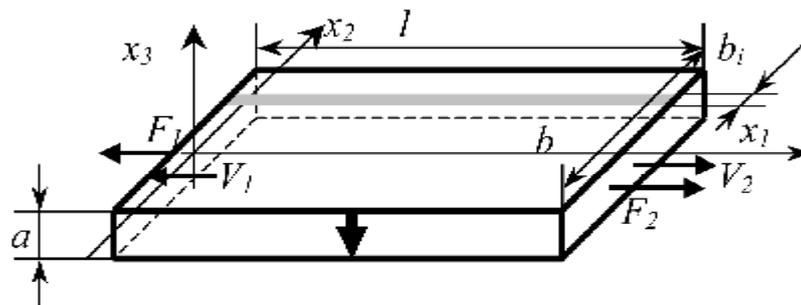


Рис. 1. Секція із поперечною поляризацією

З точки зору використання САПР, бажано дати можливість користувачу комбінувати між собою окремі секції п'єзоелектричних трансформаторів (ПТ), представлені у вигляді елементів. У такому випадку кожен окрему секцію із своїми електродами слід описати макроелементом, а потім у процесі моделювання схеми сполучати виводи секцій, котрі моделюють механічні коливання, між собою як прості електричні кола. Розглянемо секцію ПТ, що має поляризацію по товщині, зображену на рис. 1. На верхній і нижній її поверхні розміщені електроди так, що верхній електрод i -ої пари простягається на всю довжину верхньої поверхні і має ширину b_i , а нижній електрод має аналогічне розміщення, зазори між електродами близькі до нуля, а система електродів повністю покриває всю поверхню секції. А на праву і ліву частину секції діють сили F_1 та F_2 , що викликають переміщення границі із швидкостями V_1 та V_2 . Тоді стан ПТ описується рівняннями [1,2]:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{11} &= s_{11} \hat{\sigma}_{11} + s_{12} \hat{\sigma}_{22} + s_{13} \hat{\sigma}_{33} + d_{31} \hat{E}_3; & \hat{D}_3 &= d_{31} \hat{\sigma}_{11} + d_{32} \hat{\sigma}_{22} + d_{33} \hat{\sigma}_{33} + \epsilon_{33} \hat{E}_3; \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{13}}{\partial x_3} + \rho \omega^2 \hat{u}_1 &= 0; & \hat{E}_3 &= -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Усреднивши рівняння за поперечним січенням, і вважаючи, що $\hat{\sigma}_{22} = \hat{\sigma}_{33} = 0$ маємо :

$$\sigma_{11} = \frac{\epsilon_{11}}{s_{11}} - \frac{l}{ab} \cdot \frac{d_{31}}{s_{11}} \cdot \sum_i b_i \Delta\varphi_i ; \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \rho \omega^2 u_1 = 0. \quad (2)$$

Якщо переміщення \hat{u}_1 , усереднене під поверхнею електрода $S(b_i)$, рівне його середньому значенню за повним січенням, тоді усереднена за шириною електрода складова зміщення рівна:

$$D_3^{(1)} = \frac{l}{a b_i} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{S(b_i)} D_3 dx_2 dx_3 = \frac{d_{31}}{s_{11}} \epsilon_{11} - \left(\epsilon_{33} - \frac{d_{31}^2}{s_{11}} \right) \frac{\Delta\varphi_i}{a}. \quad (3)$$

Зусилля, що виникає у матеріалі, і струм верхнього i -го електрода відповідно рівні:

$$F(x_1) = ab \sqrt{\frac{\rho}{s_{11}}} \frac{V_1 \cos(\sqrt{\rho s_{11}} \omega (l - x_1))}{j \sin(\sqrt{\rho s_{11}} \omega l)} + \sqrt{\frac{\rho}{s_{11}}} \frac{V_2 \cos(\sqrt{\rho s_{11}} \omega x_1)}{j \sin(\sqrt{\rho s_{11}} \omega l)} + \frac{d_{31}}{s_{11}} \sum_i b_i \Delta\varphi_i ; \quad (4)$$

$$I_i = -j\omega \int_{S(b_i)} D_3^{(1)} dx_2 dx_3 = -\frac{d_{31} b_i V_1}{s_{11}} - \frac{d_{31} b_i V_2}{s_{11}} - j\omega \left(\frac{d_{31}^2}{s_{11}} - \epsilon_{33} \right) \frac{b_i l \Delta\varphi_i}{a}.$$

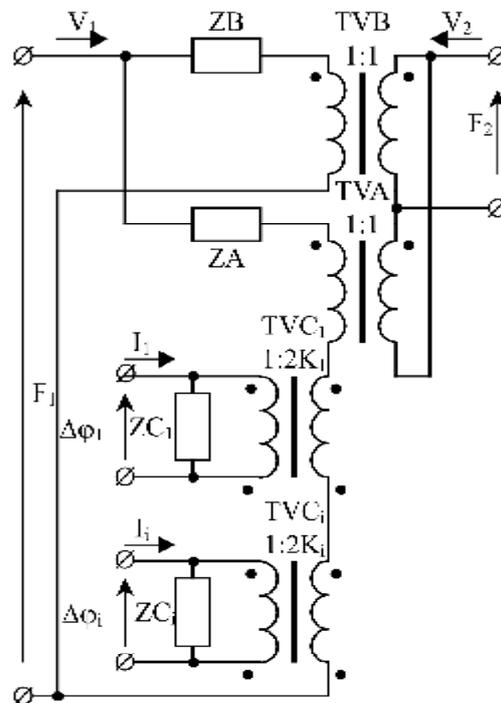


Рис. 2. Схема заміщення секції

Схема заміщення, котра моделює останні вирази із врахуванням струмів через всі електроди, показана на рис. 2. Трансформатори TVA та TVB мають коефіцієнти трансформації, рівні 1. Опори ZA та ZB моделюють зв'язки між швидкостями частинок і силами, що виникають на границях. Трансформатори TVC_i та опори ZC_i моделюють електроди п'єзотрансформатора. Причому, коефіцієнт трансформації TVC_i рівний $2K_i$, а параметри кіл рівні:

$$\begin{aligned} Z_A &= -j2ab \sqrt{\frac{\rho}{s_{ii}}} \operatorname{ctg}(\sqrt{\rho s_{ii}} \omega l / 2); & Z_{C_i} &= \frac{a s_{ii}}{j \omega b_i l (\epsilon_{33} s_{ii} - d_{3i}^2)}; \\ Z_B &= j 2 a b \sqrt{\frac{\rho}{s_{ii}}} \operatorname{tg}(\sqrt{\rho s_{ii}} \omega l / 2); & 2K_i &= 2 \frac{d_{3i} b_i}{s_{ii}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Як впливає із наведених вище формул, ZC_i є ємністю величиною

$$C_{C_i} = \frac{b_i l (\epsilon_{33} s_{ii} - d_{3i}^2)}{a s_{ii}}. \quad (6)$$

Комплексні опори ZA та ZB не можливо представити у вигляді скінченного числа активних та реактивних елементів внаслідок трансцендентності функції $\operatorname{tg}(x)$ та $\operatorname{ctg}(x)$. Запишемо апроксимацію функцій $\operatorname{ctg}(x)$ та $\operatorname{tg}(x)$ у вигляді рядів, що містить у своїй основі представлення із [3], але доповнене членом, що зменшує похибку в околі нуля:

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{ctg}(x, N)} &= \sum_{k=1}^N \frac{8x}{\pi^2 (2k-1)^2 - 4x^2} + \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2} \right) x; \\ \overline{\operatorname{tg}(x, N)} &= \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^N \frac{2x}{k^2 \pi^2 - x^2} - \left(\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^2 \pi^2} \right) x. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже, розкладаючи представлення ZA та ZB у ряди, маємо:

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{4ab}{j \omega l s_{ii}} + j \omega a b l \rho \left(\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^2 \pi^2} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{j \omega 2 \rho a b l}{k^2 \pi^2 - \rho s_{ii} \omega^2 l^2}; \\ Z_B &= \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2} \right) a b l \rho j \omega + \sum_{k=1}^N \frac{j 8 a b l \rho \omega}{\pi^2 (2k-1)^2 - \rho s_{ii} \omega^2 l^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

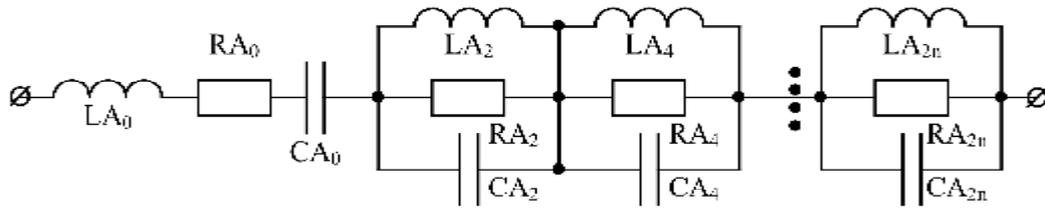


Рис. 3. Представлення схеми заміщення ZA

Легко зрозуміти, що ZA, може бути апроксимована електричним колом, зображеним на рис. 3, де опори втрат RA_0 та RA_k враховують власну добротність Q п'єзоелемента. Із схеми заміщення випливає, що параметри кола будуть наступні:

$$\begin{aligned}
 LA_0 &= abl \rho \left(\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2 \pi^2} \right); & LA_k &= \frac{2ab\rho l}{k^2 \pi^2}; & CA_k &= \frac{s_{11} l}{8ab}; \\
 CA_0 &= \frac{s_{11} l}{4ab}; & RA_0 &= \frac{l}{Q} \sqrt{\frac{LA_0}{CA_0}}; & RA_k &= Q \sqrt{\frac{LA_k}{CA_k}}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

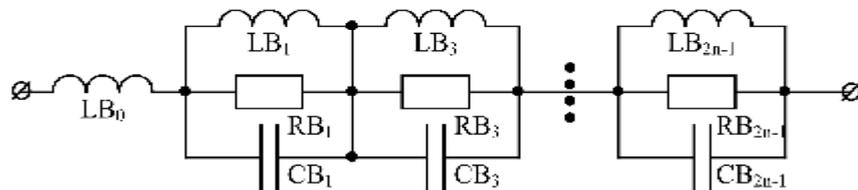


Рис. 4 Представлення схеми заміщення ZB

У свою чергу, ZB теж апроксимується як послідовно ввімкнені LC контури, послідовно з котрими підключено індуктивність (рис. 4), а опори RB_k моделюють добротність кола. Після нескладних перетворень можна отримати наступні параметри елементів кола заміщення:

$$\begin{aligned}
 LB_0 &= \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^2} \right) abl \rho; & LB_k &= \frac{8abl\rho}{(2k-1)^2 \pi^2}; \\
 RB_k &= Q \sqrt{\frac{LB_k}{CB_k}}; & CB_k &= \frac{s_{11} l}{8ab}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Структура моделі окремої секції п'єзоелемента показана на рис. 5, а повна схема заміщення може бути отримана як послідовне з'єднання окремих секцій, як це показано на рис.6.

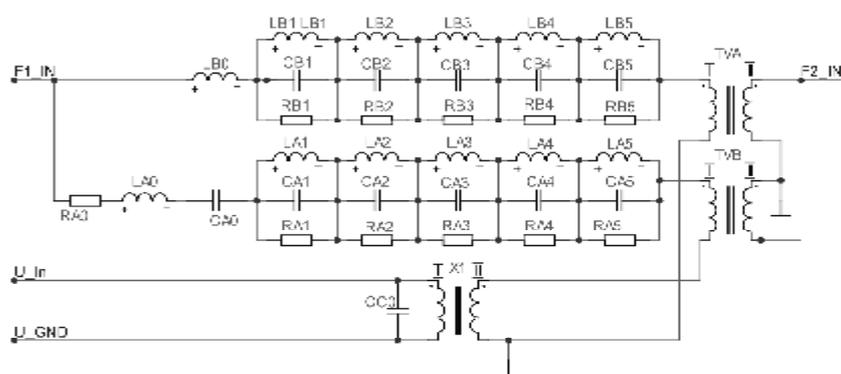


Рис. 5. Структура моделі секції п'єзоелемента

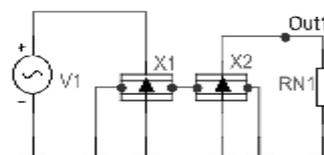


Рис. 6. Модель ПТ на основі сполучення секцій у САПР

MicroCap

Висновки. Запропонована схема та методика моделювання, на відміну від класичної, наведеної, наприклад, у [1, 2], дозволяє врахувати наявність секцій із різною поляризацією. Модель дозволяє розглядати п'єзотрансформатор як схему, яка складається з стандартних блоків, що полегшує проектування розміщення електродів і їх узгодження із схемою. В запропонованій моделі легко може бути врахована довільна кількість резонансів та наявність кількох електродів, що розміщені на п'єзотрансформаторі.

Список використанх джерел

1. Katz H. W. Solid state magnetic and dielectric devices/ Edited by : H. W. Katz New York: Wiley, 1959. 542 p.
2. Лавриненко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. Энергия. 1975 - 112 с.
3. Harris, John W., Horst Stöcker Handbook of mathematics and computational science/. Springer Science & Business Media, 1998. - 1056 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-5317-4

Наукова платформа



Open Science Laboratory

**СУЧАСНІ ВИКЛИКИ І АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ
НАУКИ, ОСВІТИ ТА ВИРОБНИЦТВА:
МІЖГАЛУЗЕВІ ДИСПУТИ**

Матеріали

**XVII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції
(м. Київ, 11 червня 2021 року)**

Самостійне електронне текстове
наукове періодичне видання комбінованого використання

** на обкладинці вказано перших авторів кожної доповіді*

КИЇВ 2021

Сучасні виклики і актуальні проблеми науки, освіти та виробництва: міжгалузеві диспути [зб. наук. пр.]: матеріали XVII міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Київ, 11 червня 2021 р.). Київ, 2021. 365 с.

Збірник містить матеріали (тези доповідей) XVII міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Сучасні виклики і актуальні проблеми науки, освіти та виробництва: міжгалузеві диспути», у яких висвітлено актуальні питання сучасної науки, освіти та виробництва.

Видання призначене для науковців, викладачів, аспірантів, студентів та практикуючих спеціалістів різних напрямів.

XVII Міжнародна науково-практична інтернет-конференція
«Сучасні виклики і актуальні проблеми науки, освіти та виробництва»
(м. Київ, 11 червня 2021 р.)

Адреса оргкомітету та редакційної колегії:

м. Київ, Україна

E-mail: conference@openscilab.org

www.openscilab.org

Наукові праці згруповані за напрямками роботи конференції та наведені в алфавітному порядку.

Для зручності, беручи до уваги, що видання є електронним, нумерація та загальна кількість сторінок наведені з врахуванням обкладинки.

Збірник на постійній сторінці конференції: <https://openscilab.org/?p=4559>

*Матеріали (тези доповідей) друкуються в авторській редакції.
Відповідальність за якість та зміст публікацій несе автор.*

