Тома Цюропайлович
(Яворів).

Про одну теорему альґебри.

(Узагальнене теореми Айзенштайна).

(Thomas Cjuropajlowytsch: Die Verallgemeinerung eines Theorems von Eisenstein).

В р. 1850 доказав Айзенштайн (Crelle's Journ. Bd. 39, ст. 166) теорему, що цілочислова функція n-того степеня, яка має співчинник найвисшого ступіня змінної $=1$, всї прочі співчинники подільні первим числом p, а вільний член неподільний на p^2, але подільний на p, є незведима. Від того часу сю теорему узагальнено, а кілька доказів сеї узагальненої теореми подає Бахман у своїй „Науцї про поділ кола“ (Bachmann: Lehre von der Kreisteilung, 5 відчит, ст. 33 і сл.).

Тут подаєть ся дуже простий доказ узагальненої теореми Айзенштайна враз із обмеженем її важности, бо того нема у Бахмана.

Най
$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = o \tag{1}$$
сповняє умови:
$$(a_i, p^m) = p^m,\ (a_n, p^{n+1}) = p^m, \tag{2}$$
де a, n числа цілі, а $(a, b) = c$ означає найбільший спільний подільник чисел a і b, то тоді (1) має, як відомо, або всї корінї цілі, або всї невимірні, бо для незведимого дроба $x = \frac{p}{q}$ слідувало би із (1) $\frac{p^n}{q} = -(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + a_3 p^{n-3} q^2 + \ldots) = c$, т. зн. незведимий дріб був би рівний цілости. Слідує отже із (1), що $x = py$, бо инакше (1) дає при умові (2)
$$x^n = p^m s, \tag{3}$$
одно ціле число неподільне на p рівне другому подільному на p, якщо (1) мало би бути зведимим рівнанєм, т. зн. заключати

хоч один чинник форми $x - g$, або інакше: мати хоч один цілий корінь.

Тоді однак можна в (3) заложити, що $m < n$. Бо, якщо $m = nc + d$, $d < n$, то (3) дає $y_1{}^n = p^{(c-1)n}s$, отже $y_1 = py_2$ і т. д. аж до $y_c{}^n = p^d s$ так, що (1) тепер скорочене числом p^{nc}, а $d < n$ заняло місце m. Як щож тепер $f(x) = o$ було би зведиме, то було би

$$f(x) = (x - pu)(x^{n-1} + v_1 x^{n-2} + v_2 x^{n-3} + \dots + v_{n-2}x + v_{n-1}) =$$
$$= x^n + (v_1 - pv)x^{n-1} + (v_2 - pvv_1)x^{n-2} + \dots + (v_{n-1} - pvv_{n-2})x_{n-2} -$$
$$pvv_{n-1} = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x - a_n = o. \qquad (4)$$

Але тут мають бути всі a_i подільні на p^m, мусить отже бути для кождого $i = 1, 2, 3 \dots n - 1$ принайменче

$$(v_i, p) = p. \qquad (5)$$

Бо, як би було $(v_i, p) = 1$, то $v_i - pvv^{i-1} = a_i$ не було би навіть на p подільне, а тим більше на p^m. Отже для $m = 1$, а $(a_n, p^2) = p$ доказана теорема Айзенштайна, бо (4) заключає в заложеню, що має цілий корінь, суперечність, є отже незведиме, т. зн. не має цілого, а тим самим ізза $a_0 = 1$ і вимірного коріня. Для $m > 1$ є очивидно $(pv \,.\, v_{n-1}, p^2) = p^2$, бо після (5) є $(v_{n-2}, p) = p$, отже мусить бути в a_{n-1} також $(v_{n-1}, p^2) = p^2$, і $(a_n, p^3) = p^3$; а се суперечне із заложенєм для $m = 2 < n$. Т. зн. теорема доказана також для $m = 2 < n$.

Але для $m = n = 2$ видко хочби із $(x-3)(x-6) = x^2 - 9x + 2.9 = 0$, що вона не важна. Важна вона зате для кождого m, такого, що $2 < m < n$. Бо тоді ізза (6) в a_2 є $(v_2, p^2) = p^2$, в a_3 так само $(v_3, p^3) = p^3$ і т. д. до a_m, де $(v_m, p^m) = p^m$, отже і $(v_{n-1}, p^m) = p^m$, $(pvv_{n-1}, p^{m+1}) = a_n p^{m+1} = p^{m+1}$, а се противить ся заложеню (2) так, що дійсно теорема доказана для кождого m при $2 < m < n$.

Очивидно, що для $m = n$ рівнанє (1) не сповняє умов (2) по скороченю числом p^m, а як видко із попередного і із
$x^3 - 7^3x^2 + 7^5x - 7^3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 41 = (x - 21)(x - 35) \,.\, (x - 287) = 0$
є воно для $m = 2, 3$ зведиме. Які тоді умови тої зведимости — се отверте питанє.

А що кожде число $g = p_i{}^m s$, де $(s_1 p_i) = 1$ є добутком ступінів первих чисел, то теорема важна для кождого g, що не є (одиницею або) n-тим ступінем. Вона звучить: „Цілочислова функція n-того ступіня $f(x) = o$ є зведима, коли співчинник її найвисшого ступіня змінної є одиницею, всі прочі співчинники є подільні цілим числом g, що не є n-тим ступінем, а вільний від змінної член також подільний на g, але неподільний на $p_i g$, де p_i число просте, заключене в g“.

INHALT.

Beweis des (verallgemeinesten) Eisensteinschen Satzes der Algebra, daß eine ganze, ganzzahlige Funktion $f(x) = o$ vom Grade $n > 1$, der Einheit als dem Koeffizienten der höchsten Potenz der Variablen, allen anderen durch eine ganze Zahl $c \neq 1$, g^n teilbaren Koeffizienten, dem ebenso durch c, nicht aber durch das Produkt von c in eine in demselben enthaltene Primzahl teilbaren · freien Gliede, irreduzibel ist (— besteht in dem Widerspruche der Gleichheit zweier ganzen Zahlen, wovon die eine durch die Zahl p teilbar, die andere nicht teilbar ist).