Др Василь Стасюк.

(Dr Wassyl Stassjuk).

Причинки до асекурацийної математики I.

(Beiträge zur Versicherungsmathematik I).

1.

Переміна сполученої ренти в ренту для одної особи.

(Umwandlung einer Verbindungsrente in die Rente für eine Person).

Коли табеля смертности вирівнана після взірця Гомперца-Мекегема, сполучена рента для n осіб дасть ся дуже легко переміпити в ренту для одної особи.

Взірець Гомперца-Мекегема є

$$l_x = k.\ s^x.\ g^{q^x} \tag{1}$$

де l_x = число живучих осіб у віці x, s, g, q постійні величини, характеристичні для кождої табелї смертности, а k довільна постійна.

Вартість сполученої ренти для n осіб у віці $x_1, x_2, \ldots, x_n$, платної річно з гори, як довго всї n особи будуть іще жити, означує ся рівнанем

$$a_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} D_{x_1+t,\, x_2+t,\, \ldots,\, x_n+t}}{D_{x_1, x_2, \ldots, x_n}}, \tag{2}$$

де $D_{x_1+t, x_2+t, \ldots, x_n+t} = l_{x_1+t}\, l_{x_2+t} \ldots l_{x_n+t}\, v^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+t}$,

$$D_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = l_{x_1}\, l_{x_2} \ldots l_{x_n}\, v^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}},$$

a $$v = \frac{1}{1+\frac{p}{100}}$$ є процентовим відчинником.

Підставмо тепер за l_x вартости з (1), то одержимо:

$$D_{x_1+t,\, x_2+t,\, \ldots,\, x_n+t} = k^n (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+t} . g^{(q^{x_1}+q^{x_2}+\ldots+q^{x_n}) . q^t},$$

$$D_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} = k^n (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} . g^{q^{x_1}+q^{x_2}+\ldots+q^{x_n}}$$

Впровадьмо нову величину w після рівнаня:

$$q^w = q^{x_1} + q^{x_2} + \ldots + q^{x_n}, \qquad (3).$$

тоді

$$D_{x_1+t,\, x_2+t,\, \ldots,\, x_n+t} = k^n (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+t} . g^{q^{w+t}},$$

$$D_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} = k^n (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} . g^{q^w},$$

або ті самі рівнаня написані инакше:

$$D_{x_1+t,\, x_2+t,\, \ldots,\, x_n+t} = k^{n-1} (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-w} . k (s^n v)^{w+t} . g^{q^{w+t}},$$

$$D_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} = k^{n-1} (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-w} . k (s^n v)^w . g^{q^w}.$$

Коли се підставимо в (2), одержимо:

$$a_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} = \frac{k^{n-1} (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-w} . \sum k (s^n v)^{w+t} . g^{q^{w+t}}}{k^{n-1} (s^n v)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-w} . k (s^n v)^w . g^{q^w}}$$

$$a_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} k (s^n v)^{w+t} . g^{q^{w+t}}}{k (s^n v)^w . g^{q^w}} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} k\, s^{w+t} . g^{q^{w+t}} . (s^{n-1} v)^{w+t}}{k\, s^w . g^{q^t} . (s^{n-1} v)^w}.$$

А що після (1)

$$l_{w+t} = k\, s^{w+t}\, g^{q^{w+t}} \text{ і } l_w = k\, s^w\, g^{q^w},$$

то

$$a_{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} l_{w+t} . (s^{n-1} v)^{w+t}}{l_w . (s^{n-1} v)^w}.$$

Поставмо ще

$$v' = s^{n-1} v, \qquad (4).$$

то буде

$$a_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} l_{w+t} \cdot v'^{w+t}}{l_w \cdot v'^{w}} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} D_{w+t}^{(v')}}{D_w^{(v')}}.$$

Се останне рівнане є вже рентою для одної особи, однак не для проценту $p\%$, після якого обчислювано получену ренту, тільки для такого проценту, якого відчинник v' даний рівнанєм (4).

Означім сю ренту для одної особи $a_w^{(v')}$, то вкінці одержимо:

$$\underline{a_{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{(v)} = a_w^{(v')}}, \tag{5}$$

де між w і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заходить рівнане (3), а між v і v' рівнане (4).

Отже коли табеля смертности вирівнана після Ґомперца-Мекегема, то сполучена рента для n осіб у віці $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для процентового відчинника v рівнаєть ся ренті для одної особи у віці w, означенім рівнанєм (3) і для відсоткового відчинника v', означеного рівнанєм (4).

Се твердженє для табель смертности, вирівнаних після Ґомперца-Мекегена, є узагальненєм анальоґічного твердженя де Морґана для табель смертности, вирівнаних після Ґомперца.

І дійсно, коли поставимо

$$s = 1,$$

взірець Ґомперца-Мекегема переходить у взірець Ґомперца:

$$l_x = k \cdot g^{q^x}, \tag{6}$$

а взірець (4) у

$$v = v'. \tag{4'}$$

Рівнаня (3) і (5) остають у тім самім виді і дають твердженє де Морґана. Після рівнаня (4') відсоткова стопа сполученої ренти для одної особи є та сама.

Примір: Приймім, що треба обчислити сполучену ренту для двох осіб у віці 30 і 40 літ для австрийської табелї смертности AH^m і для відсоткової стопи $p = 3\frac{1}{2}\%$.

Після взірця (5) ся рента рівна ренті для одної особи у віці w, означенім рівнанєм (3)

$$q^w = q^{30} + q^{40}$$

ї для відсоткового відчинника

$$v' = sv.$$

Для табелі AH^m є

$$s = 1\cdot07999,\ q = 0\cdot998118,$$

а що $p = 3\cdot5\%$, то

$$v = \frac{1}{1.035}.$$

Само числене представляєть ся ось так:

$$\log q = 0\cdot03341973,$$

$$30 \log q = 1\cdot0025919, \qquad q^{30} = 10\cdot0598,$$

$$40 \log q = 1\cdot3367892, \qquad q^{40} = 21\cdot7165,$$

$$q^w = q^{30} + q^{40} = 31\cdot7763,$$

$$w \log q = 1.5021033,$$

$$w = \frac{1\cdot5021033}{0\cdot03341973} = 44\cdot9466,$$

$$v' = sv = 0\cdot964365 = \frac{1}{1\cdot0369515},$$

отже

$$p' = 3\cdot69515\%.$$

Бачимо, що для табелі AH^m сполучена рента двох осіб у віці 30 і 40 літ для відсоткової стопи $3\frac{1}{2}\%$ має бути рівна ренті для одної особи у віці 44.9466 літ і для відсоткової стопи 3·69515%.

Що дійсно так є, видимо з такого рахунку:

$$a_{30,40} = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{30+t,\ 40+t}}{D_{30,40}} = \frac{3.802,371.200}{257,242.200} = 14\cdot781.$$

Ренту для одної особи у віці 44·9466 вичислюємо при помочи лінійної інтерполяції між вартостями для 44 і 45:

$$a_{44} = \frac{\Sigma D_{44}}{D_{44}} = \frac{261.973}{17.387} = 15.067,$$

$$a_{45} = \frac{\Sigma D_{45}}{D_{45}} = \frac{244.586}{16.566} = 14.764,$$

$$\triangle = 0.303,$$

$$0.9946.\ \triangle = 0.287,$$

$$A_{44\cdot9466} = 14.780.$$

Обі ренти ріжнять ся тільки о одну одиницю на останнім десяточнім місці, а се може бути наслідком поправок або і того, що ренту для одної особи обчислювано при помочи лінійної інтерполяції.

2.

Спроваджене ренти для вижчого проценту на ренту для низчого проценту.

(Zurückführung einer Rente mit höherem Zinsfuß auf diejenige mit niederem Zinsfuß).

Тут також приймаємо,* що табеля смертности вирівнана після взірця (1) Гомперца-Мекегема, і провадимо доказ для тяглої ренти.

Тягла рента, як відомо, рівнаєть ся:

$$\bar{a}_x^{(v)} = \frac{1}{D_x}\int_0^\infty D_{x+t}\,dt, \qquad (7).$$

де

$$D_{x+t} = l_{x+t} \quad v^{x+t}$$

Вставлю в (7) вартість за l_x із (1):

$$\bar{a}_x^{(v)} = \frac{1}{k(sv)^x g^{q^x}}\int_0^\infty k\,(sv)^{x+t} \quad g^{q^{x+t}}\,dt$$

або

$$\bar{a}_x^{(v)} = \frac{1}{g^{q^x}}\int_0^\infty (sv)^t \quad g^{q^{x+t}}\,dt \qquad (8).$$

Зінтеґруймо тепер сей інтеґрал частинно, то одержимо:

$$a_x = \frac{1}{g^{q^x}}\left\{\frac{(sv)^t\ g^{q^{x+t}}}{ln\ (sv)}\Bigg|_0^\infty \quad \frac{1}{ln\,(sv)}\int_0^\infty (sv)^t\ g^{q^{x+t}}\ q^{x+t} \quad lng\ lnq\ dt\right\}$$

або

$$\bar{a}_x^{(v)} = -\frac{1}{ln\,(sv)}\left\{1 + lng\,lnq \quad q^x\,.\frac{1}{g^{q^x}}\int_0^\infty (svq)^t\ g^{q^{x+t}}dt\right\}.$$

Після взірця (8)

$$a_x^{(vq)} = \frac{1}{g^{q^x}}\int_0^\infty (s\,vq)^t\,g^{q^{x+t}}\,dt$$

є рентою для процентового відчинника

$$v_1 = vq,$$

отже буде

$$a_x^{(v)} = -\frac{1}{ln\,(sv)}\left\{1 + lng\,.\,lnq\,.\,q^x\,.\,a_x^{(vq)}\right\}$$

або

$$a_x^{(v)} = \frac{1}{ln\frac{1}{sv}}\left\{1 + lng \,.\, lnq \,.\, q^x \,.\, a_x^{(vq)}\right\}. \qquad (9).$$

На підставі сього взірця всї ренти для процентового відчинника $v \leqq \frac{1}{q}$, отже для процентової стопи $p \geqq (q-1).\ 100$, дадуть ся спровадити на ренти, для яких процентовий відчинник v лежить у межах

$$1 \geqq v > \frac{1}{q},$$

отже процент p у межах

$$o \leqq p < (q-1).\ 100.$$

При тім взорець (9) треба приміняти 1, 2, n разів, відповідно до того, чи v лежить у межах

$$\frac{1}{q} \geqq v > \frac{1}{q^2},$$

$$\frac{1}{q^2} \geqq v > \frac{1}{q^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

або

$$\frac{1}{q^n} \geqq v > \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Примір: Обчислити тяглу ренту для віку 30 літ для австрийської табелї смертности AH^m і для відсоткової стопи $p = 7.999\%$.

Для табелї AH^m постійні величини Ґомперца-Мекегема є:

$$q = 1{\cdot}07999$$
$$g = 0{\cdot}995683,$$
$$q = 0{\cdot}998118.$$

У нашім примірі

$$v = \frac{1}{1+0{\cdot}07999} = \frac{1}{1{\cdot}07999},$$

отже

$$v = \frac{1}{q}.$$

На підставі взірця (9) рента для процентового відчинника $v = \frac{1}{q}$ дасть ся виразити рентою для відчинника

$$v_1 = vq = \frac{1}{q} \cdot q = 1,$$

отже для процентової стопи

$$p = 0\%.$$

Взірець (9) для нашого приміру перейде у такий:

$$\bar{a}_{30}^{(\frac{1}{q})} = \frac{1}{ln\left(\frac{q}{s}\right)} \left\{ 1 + lng \,.\, lnq \,.\, q^{30} \,.\, \bar{a}_{30}^{(1)} \right\}.$$

Провіриймо тепер сей взірець:

$$\bar{a}_{30}^{(1)} = \frac{\Sigma D_{30}^{(1)}}{D_{30}^{(1)}} = \frac{\Sigma l_{30}}{l_{30}} = \frac{3,305.590}{95.867} = 34{\cdot}481.$$

Се рента для процентового відчинника $v = 1$, отже $p = 0\%$, платна річно з гори. Однак нам потрібно тяглої ренти, яку доволї докладно обчислюєть ся при помочи рівнаня

$$\bar{a}_x = a_x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}(\delta + \mu_x), \tag{10}$$

де

$$\delta = ln\,(1 + i),$$

а

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dt_x}{dx}.$$

У нашім випадку $p = 0$, отже

$$\delta = 0.$$

Дальше ми приймили, що табеля вирівнаня Ґомперца-Мекегема [взірець (1)], отже буде

$$\mu_x = -\,lns - lng \,.\, lnq \,.\, q^x,$$

отже тут буде:

$$\bar{a}_{30}^{(1)} = a_{30} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mu_{30},$$

де

$$\mu_{30} = -\,ln\,s - ln\,g \,.\, ln\,q \,.\, q^{30}.$$

Для табелї AH^m є

$$\begin{aligned} ln\,s &= -\,0{\cdot}0018837, \\ ln\,g &= -\,0{\cdot}0043263, \\ ln\,q &= 0{\cdot}0769518; \end{aligned}$$

Як у попереднім приміpі:

$$\begin{aligned} q^{30} &= 10{\cdot}0598, \\ -\,ln\,s &= 0{\cdot}0018837, \\ -\,ln\,g \,.\, ln\,q \,.\, q^{30} &= \underline{0{\cdot}0033491} \\ \mu_{30} &= 0{\cdot}0052328, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{30}^{(1)} &= \underline{34.481} \\ -\left\{ \begin{array}{r} \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{12}\mu_{30} \end{array} \right. & \begin{array}{l} = 0{\cdot}500 \\ = \underline{0{\cdot}000} \end{array} \\ \bar{a}_{30}^{(1)} &= 33{\cdot}981. \end{aligned}$$

Дальше одержимо:

$$ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}\,.\,\bar{a}_{30}{}^{(1)} = -\,0\cdot11381$$

$$1 + ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}\,.\,\bar{a}_{30}{}^{(1)} = \quad 0\cdot88619,$$

$$ln\left(\tfrac{q}{s}\right) = \quad 0\cdot0788355,$$

$$\underline{\bar{a}_{30}}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{ln\left(\frac{q}{s}\right)}\left\{1 + ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}\,.\,\bar{a}_{30}{}^{(1)}\right\} = \underline{11\cdot241.}$$

Се вартість ренти для $p = 7\cdot999 = (q-1)\,.\,100$, виправаджена на підставі ренти для $p = 0\%$.

Для контролї обчислїм тепер ту ренту впрост.

$$a_{30}{}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{\Sigma D_{30}{}^{\left(\frac{1}{q}\right)}}{D_{30}{}^{\left(\frac{1}{q}\right)}} = \frac{102.419\cdot15}{8.776\cdot71} = 11\cdot741.$$

Відносну тяглу ренту дістанемо із взірця (16).

$$\begin{array}{r}
\mu_{30} = 0\cdot0052328 \\
\delta = ln\,q = 0\cdot0769518 \\
\hline
\delta + \mu_{30} = \underline{0\cdot0821846,}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
a_{30}{}^{\left(\frac{1}{q}\right)} & = 11\cdot747 \\
-\begin{cases} \frac{1}{12}(\delta + \mu_{30}) \\ \frac{1}{2} \end{cases} & \begin{array}{l} = 0\cdot007 \\ = 0\cdot500 \end{array}
\end{array}$$

$$\underline{\bar{a}_{30}}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = a_{30}{}^{\left(\frac{1}{q}\right)} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}(\delta + \mu_{30}) = \underline{11\cdot240.}$$

Як у попереднїм примірі, оба вислїди ріжнять ся тільки о одну одиницю на останнїм десяточнім місцї.

INHALT.

Für die nach Gompertz-Makeham ausgeglichenen Sterbetafeln werden hier zwei Sätze aus der Theorie der Renten abgeleitet.

Es wird gezeigt, dass eine Verbindungsrente für n Personen durch eine Rente für eine Person ersetzt werden kann. Zwischen den Altern und den Zinsfüssen bestehen die Gleichungen (3) und (4). Als einen Spezialfall dieses Satzes erhält man den der Morgan-schen Satz für die nach der Gompertz-schen Formel ausgeglichenen Tafeln.

Der zweite Satz-Formel (9) — ermöglicht die Zurückführung der Renten mit den Zünsfüssen

$$p \geqq (q-1) \, . \, 100\%$$

auf die Renten mit den Zinsfüssen, die zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$o \leqq p < (q-1) \, . \, 100.$$

Dabei ist q die bekannte Konstante der Gompertz-Makeham-schen Formel.