

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Є.В. Тиш, С.А. Лупенко

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МЕТОДИ
АНАЛІЗУ ТА КОМП'ЮТЕРНОЇ ІМІТАЦІЇ
СЕРЦЕВОГО РИТМУ ПРИ ФІЗИЧНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ ПАЦІЄНТА**

Наукова монографія

Видавництво «Магнолія - 2006»
Львів 2020

ББК 32.973.202

Л869

УДК 004.032.24+004.272+004.75

Відтворення цієї книги або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав будуть переслідуватися у судовому порядку.

Рецензенти:

Соколовський Я.І. – завідувач кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України, доктор технічних наук, професор

Шаховська Н.Б. – завідувач кафедри штучного інтелекту Національного університету «Львівська політехніка», доктор технічних наук, професор

Рекомендовано Вченою радою

Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
(Протокол № 6 від 22 травня 2020р.)

Тиш Є.В., Лупенко С.А.

Математичне моделювання, методи аналізу та комп'ютерної імітації серцевого ритму при фізичних навантаженнях пацієнта / Є.В. Тиш, С.А. Лупенко. – Львів: Видавництво «Магнолія - 2006», 2020. – 148 с.

Монографію присвячено вирішенню актуальної задачі створення математичних, імітаційних моделей та методів опрацювання кардіоінформації в комп'ютерних медичних діагностичних системах. На основі аналізу процесів формування та факті нестаціонарності зміни серцевого ритму при фізичних навантаженнях у монографії подано математичну модель кардіоінтервалограми у вигляді суми дискретної детермінованої функції та стаціонарної лінійної випадкової послідовності. Обґрунтовано методи статистичного оцінювання діагностичних ознак, а саме, коефіцієнтів розкладу оцінки математичного сподівання та оцінки кореляційної функції кардіоінтервалограм у ряди за ортогональними поліномами Чебишева, а також параметрів кривих Пірсона для оцінювання щільності розподілу, що дало можливість зменшити (оптимізувати) розмірність вектора діагностичних ознак. Описано новий метод імітаційного моделювання на ЕОМ кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях.

ISBN 5-211-05310-9

© Тиш Є.В., Лупенко С.А., 2020

© «Магнолія 2006», 2020

ЗМІСТ

Перелік основних умовних позначень, символів і скорочень	5
Вступне слово наукового редактора серії наукових монографій «Цикли, моделі, технології»	6
Вступне слово авторів монографії	9
Розділ 1. Математичні моделі кардіоінтервалограм, методи дослідження та діагностичні ознаки в кардіометричних діагностичних системах (огляд літературних джерел)	12
1.1. Науково-теоретичні основи кардіоінтервалографії та методи дослідження кардіоінтервалограм	12
1.1.1. Основи кардіоінтервалографії	12
1.1.2. Функціональні проби	18
1.2. Математичні моделі КІГ в задачах технічної кардіоінтервало-метрії	20
1.2.1. Основні підходи до моделювання кардіоінтервалограм	20
1.2.2. Детерміновані моделі кардіоінтервалограм	21
1.2.3. Стохастичні моделі кардіоінтервалограм	23
1.3. Сучасні методи дослідження кардіоінтервалограм	25
1.3.1. Методи аналізу у часі	25
1.3.1.1. Статистичні методи	25
1.3.1.2. Геометричні методи (варіаційна пульсометрія)	26
1.3.2. Методи аналізу в частотній області	28
1.3.2.1. Оцінка ритмограми	28
1.3.2.2. Спектральний аналіз	29
1.3.3. Деякі інші методи дослідження	31
1.3.3.1. Автокореляційний аналіз	31
1.3.3.2. Кореляційна ритмографія (скаттерграма)	32
1.3.3.3. Нові методи дослідження	34
1.4. Вимоги до розроблювальної математичної моделі кардіоінтервалограми	34
1.5. Висновки до першого розділу	35
Розділ 2. Математична модель кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях	38
2.1. Обґрунтування математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях	38
2.2. Лінійна випадкова послідовність як модель стохастичної складової кардіоінтервалограми	39
2.3. Вибір детермінованої складової математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях	45
2.4. Характеристики математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях	53
2.5. Висновки до другого розділу	55

Розділ 3. Методи опрацювання кардіоінтервалограми та діагностичні ознаки на базі її математичної моделі	56
3.1. Методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм	56
3.1.1. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм при аналізі детермінованої складової їх математичної моделі	56
3.1.2. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм при аналізі стохастичної складової їх математичної моделі	69
3.1.2.1. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм за щільністю розподілу	70
3.1.2.2. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм за кореляційною функцією	76
3.2. Методи приймання рішень при діагностиці за кардіоінтервалограмою	82
3.3. Висновки до третього розділу	90
Розділ 4. Комп'ютерне імітаційне моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях для систем кардіоінтервалометричної діагностики	91
4.1. Загальні підходи до імітаційного моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях	91
4.2. Імітаційне моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях на базі їх математичної моделі	98
4.2.1. Моделюючий алгоритм детермінованої складової	98
4.2.2. Метод імітаційного моделювання лінійних стаціонарних випадкових послідовностей	98
4.2.2.1. Основні підходи до моделювання стаціонарних лінійних випадкових послідовностей	98
4.2.2.2. Моделюючий алгоритм	100
4.3. Результати імітаційного моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях	102
4.4. Похибка імітаційного експерименту	102
4.5. Система комп'ютерних програм для опрацювання та імітаційного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях на базі кардіоінтервалометричної діагностичної системи	107
4.6. Висновки до четвертого розділу	108
Висновки	109
Список використаних джерел	110

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ І СКОРОЧЕНЬ

N	множина натуральних чисел
R	множина дійсних чисел
Z	множина цілих чисел
Ω	множина елементарних подій
$\xi(\omega, t)$	випадковий процес
$\xi(\omega, k)$	дискретний випадковий процес
M_{ξ_t}	математичне сподівання стаціонарного випадкового процесу
D_{ξ_t}	дисперсія стаціонарного випадкового процесу
$R(t_1, t_2)$	кореляційна функція випадкового процесу
$R(\tau)$	кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу
АР	послідовність авторегресії
АРКС	послідовність авторегресії ковзної суми
ЕКГ	електрокардіограма
КІГ	кардіоінтервалограма
КС	послідовність ковзної суми
РГ	ритмограма
ЧСС	частота серцевих скорочень

ВСТУПНЕ СЛОВО
НАУКОВОГО РЕДАКТОРА СЕРІЇ НАУКОВИХ МОНОГРАФІЙ
«ЦИКЛИ, МОДЕЛІ, ТЕХНОЛОГІЇ»

*Присвячується нашим дорогим Учителям –
професорам Марченку Борису Григоровичу
та Щербаку Леоніду Миколайовичу!*

Вельмишановний читачу!

Вашій увазі пропонується серія наукових монографій «Цикли, моделі, технології», яка об'єднує більше десятка монографій, присвячених вирішенню різносторонніх науково-прикладних проблем та завдань математичного моделювання, розробки методів лінійних та нелінійних перетворень, статистичного та спектрально-часового опрацювання, комп'ютерної імітації сигналів (процесів, явищ) із циклічною просторово-часовою структурою. Наукові результати, які пропонуються читачу у цій серії монографій були отримані колективом авторів протягом більше ніж 20 років активних досліджень, що привело до опублікування більше 400 наукових робіт та до успішного захисту семи кандидатських та двох докторських дисертацій за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи в галузі технічних наук. Докторські дисертації захистили Лупенко С.А. (2010 рік) та Литвиненко Я.В. (2019 рік), кандидатські дисертації захистили Лупенко С.А. (2001 рік), Литвиненко Я.В. (2006 рік), Луцків А.М. (2008 рік), Лозінська (Тиш) Є.В. (2008 рік), Сверстюк А.С. (2010 рік), Горкуненко А.Б. (2012 рік), Луцик Н.С. (2016 рік). Ряд нових дисертаційних досліджень молодих науковців нашого творчого колективу ще очікують свого оприлюднення та процедури захисту.

Більшість результатів, що об'єднує у собі серія «Цикли, моделі, технології», отримано при виконанні науково-дослідних проектів, серед яких можна вказати такі:

1. Комплексний міжуніверситетський науково-дослідний проект "Розробка, дослідження та впровадження методів і засобів контролю та управління якістю програмних продуктів" (№ держреєстрації 0113U000258).

2. Науково-дослідний проект "Створення грід-орієнтованого програмного забезпечення для здійснення криптоаналізу", що є складовою частиною проекту „Розробка математичного та програмного грід-орієнтованого забезпечення для моделювання та прикладних досліджень в галузях механіки, ідентифікації нанопористих матеріалів, біометрії та криптоаналізу”, що виконувався Інститутом кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (№ держреєстрації 0111U008183).

3. Науково-дослідний проект “Розробка математичного та програмного забезпечення інформаційних систем діагностики та аутентифікації людини за циклічними біометричними сигналами” (номер держреєстрації 0112U002203).

4. Науково-дослідний проект “Моделювання та розробка алгоритмів криптоаналізу з використанням паралельних та розподілених комп'ютерних систем (номер держреєстрації 0111U002595).

5. Науково-дослідний проект «Математичне моделювання, методи опрацювання та імітації біометричних циклічних сигналів в інформаційних системах» (номер держреєстрації 0106U009380).

Серед предметних областей в яких отримали своє впровадження та застосування розроблені нові математичні моделі та методи опрацювання, комп'ютерної імітації циклічних сигналів є інформаційні системи медичної діагностики функціонального стану серця людини (морфоаналіз та аналіз серцевого ритму), системи біометричної аутентифікації особи за її динамічним підписом, системи аналізу та прогнозування циклічних економічних процесів, системи технічної діагностики в матеріалознавстві та механіці. Ця значна праця стала підставою для формування наукової школи «Моделювання та математичне забезпечення інтелектуалізованих інформаційних систем в медицині, техніці та економіці», у рамках якої, розроблено комплекс нових математичних моделей, методів та програмно-апаратних засобів перетворення, аналізу, прогнозування, комп'ютерного моделювання широкого класу сигналів та інформаційних процесів, які мають місце в галузі медичної діагностики, кібербезпеки, економетрії та діагностики стану матеріалів. Основною особливістю наукової школи є розвиток та поєднання сучасних моделей та технологій опрацювання сигналів із моделями та технологіями в галузі систем штучного інтелекту.

Однією із важливих цілей, яку переслідує опублікування вказаної серії наукових монографій, є ознайомлення науковців, аспірантів та студентів із сучасними неklasичними математичними моделями, методами, програмними та програмно-апаратними засобами опрацювання (перетворення, аналізу, прогнозування) циклічних сигналів (процесів) різної природи та просторово-часової структури. Під неklasичністю моделей, пропонувананих для ознайомлення читачу, розуміється факт їхнього відхилення від відомих (klasичних) моделей, які ґрунтуються на періодичній (детермінованій чи стохастичній) функціональній залежності. Klasичні математичні моделі циклічних сигналів мають довгу історію свого використання для моделювання найрізноманітніших процесів та явищ із циклічною структурою. Серед них найбільш відомими є періодична, майже періодична, квазігармонічна детерміновані функції, квазімеандр, стаціонарний випадковий процес, вектор стаціонарних та стаціонарно пов'язаних випадкових процесів, періодично корельований (циклостаціонарно корельований) та майже періодично корельований (майже циклостаціонарно корельований) випадкові процеси, періодично розподілений випадковий процес, лінійний періодичний випадковий процес, періодичний процес із незалежними значеннями

(періодичний білий шум), випадковий процес із незалежними періодичними приростами, періодичний марковський випадковий процес та періодичний марковський випадковий ланцюг.

Отримані творчим колективом наукові результати розвивають та доповнюють відомі класичні математичні моделі, методи опрацювання та комп'ютерної імітації, а також відповідні програмно-апаратні засоби, відкриваючи нові горизонти творчого науково-інженерного пошуку в царині математичного моделювання та інформаційних технологій в тих багаточисельних галузях народного господарства, де виникають завдання автоматизованого аналізу, прогнозування та прийняття рішень за сигналами циклічної просторово-часової структури.

Підсумковим вагогим результатом, отриманим творчим колективом наукової школи «Моделювання та математичне забезпечення інтелектуалізованих інформаційних систем в медицині, техніці та економіці» є побудова сучасної оригінальної теорії математичного моделювання, опрацювання та комп'ютерної імітації сигналів циклічної структури в інтелектуалізованих інформаційних систем їх аналізу, діагностики та прогнозування. Ця теорія з позицій єдиного теоретико-методологічного підходу враховує широкий спектр можливих атрибутів циклічності в рамках детермінованої, стохастичної, нечіткої та інтервальної парадигм моделювання, значне структурне багатоманіття закономірностей мінливості та спільності ритму циклічних сигналів, має засоби адаптації до змін їх ритму, що у практичному аспекті, підвищило точність, достовірність та рівень інформативності опрацювання та імітації циклічних сигналів в інтелектуалізованих інформаційних системах.

З глибокою повагою,
доктор технічних наук, професор

Сергій Лупенко

ВСТУПНЕ СЛОВО АВТОРІВ МОНОГРАФІЇ

Організм людини – надзвичайно складна система, елементи якої тісно взаємодіють між собою. Визначення адаптивно-регулятивних характеристик живого організму є актуальною проблемою сучасної медицини, а розробка комп'ютерної системи та відповідного математичного забезпечення для автоматизованої діагностики адаптивно-регулятивних можливостей організму є важливою науково-технічною проблемою.

Одним із перспективних, високо інформаційних методів діагностики адаптивних можливостей організму є дослідження серцевого ритму за кардіоінтервалограмою (КІГ). На переваги діагностики за КІГ вказували автори багатьох наукових робіт медичного спрямування, а в сучасних автоматизованих діагностичних системах використовується математичне забезпечення, на основі робіт Баєвського Р.М., Іванова Г.Г., Меєрсона Ф.З., Саєрса Б., Жемайтіте Д. та ін. Низка праць із математичного моделювання КІГ належить Яворському Б.І., Драгану Я.П., Яворській Є.Б. Встановлено, що дослідження ритму серця в спокої не відображає приховані патології. Тому для людей (наприклад, спортсменів), в яких патологічні зміни та відхилення від норми зі сторони серцево-судинної системи нерідко можуть компенсуватися хорошою функціональною здатністю організму, необхідно для виявлення патології проводити реєстрацію та аналіз КІГ після адекватного фізичного навантаження.

Сучасні методи аналізу КІГ та відомі діагностичні ознаки на її основі базуються на двох теоретичних підходах – детермінованому та стохастичному.

Математичні моделі КІГ у вигляді детермінованих функцій застосовуються для прогнозування стану організму. Розглядають два простих методи прогнозування, що базуються на уявленні про лінійну та експоненціальну зміну тривалостей кардіоциклів. Детерміновані моделі не враховують випадковий характер зміни тривалостей кардіоінтервалів і тому є досить спрощеними. Завдяки своїй простоті детерміновані моделі КІГ дають змогу досить легко реалізувати методи експрес-аналізу стану адаптивно-регулятивних механізмів організму, але вони не враховують стохастичний характер КІГ, що не дозволяє їх використовувати для високоінформативної діагностики.

Сучасні стохастичні методи аналізу КІГ базуються переважно на її двох математичних моделях – моделі у вигляді випадкової величини та моделі у вигляді стаціонарної дискретної послідовності. Проте такі моделі є адекватними лише для випадку, коли КІГ реєструється в стані спокою. У випадку ж реєстрації КІГ при фізичних навантаженнях необхідно враховувати нестационарний, перехідний характер зміни тривалостей КІГ.

Наведені аргументи вказують на актуальність побудови нової математичної моделі КІГ при фізичних навантаженнях як нестационарного випадкового процесу, а також визначення на її основі нового класу діагностичних ознак та методів їх оцінювання для діагностування адаптивно-

регулятивних можливостей організму людини засобами сучасних інформаційних технологій.

У першому розділі на основі аналітичного огляду літературних джерел проведено класифікацію та порівняльний аналіз існуючих математичних моделей, діагностичних ознак та методів їх оцінювання, що лежать в основі сучасних комп'ютерних систем діагностики за КІГ

Виходячи із необхідності систематизації та впорядкування відомостей фізичного, математичного та технічного характеру, що стосуються моделювання та аналізу КІГ, автором окреслено нову науково-технічну область, шляхом введення поняття кардіоінтервалометрії. Кардіоінтервалометрія – це область кардіометрії, що охоплює широкий спектр проблем технічного та фізико-математичного характеру (а не медико-біологічного), науково-технічними проблемами якої є: побудова математичних моделей, вибір діагностичних ознак, обґрунтування алгоритмів обробки КІГ для проведення діагностики адаптивно-регулятивних механізмів організму; створення алгоритмів функціонування систем діагностики за КІГ; створення методів комп'ютерного імітаційного моделювання КІГ та її перетворень в технічних системах; розробка інформаційно-вимірвальних діагностичних систем за КІГ.

Враховуючи специфіку задач кардіоінтервалометрії та особливості зміни тривалостей кардіоінтервалів при фізичних навантаженнях, сформульовано вимоги до математичної моделі КІГ.

У другому розділі ґрунтуючись на особливостях формування, факті нестационарного (перехідного) характеру КІГ при фізичних навантаженнях, а також властивій стохастичності кардіоінтервалів, побудовано нову математичну модель КІГ при фізичних навантаженнях у вигляді суми дискретної детермінованої функції та стаціонарної лінійної випадкової послідовності. Розглянуто характеристики запропонованої математичної моделі. Запропоновано на основі розробленої моделі як діагностичні ознаки для прийняття рішень щодо адаптивно-регулятивних можливостей організму людини використати імовірнісні характеристики КІГ: математичне сподівання, кореляційну функцію та щільність розподілу.

У третьому розділі, обґрунтовано методи статистичного оцінювання діагностичних ознак, а саме, коефіцієнтів розкладу оцінки математичного сподівання та оцінки кореляційної функції КІГ у ряди за ортогональними поліномами Чебишева, а також параметрів кривих Пірсона для оцінювання щільності розподілу, що дало можливість зменшити (оптимізувати) розмірність вектора діагностичних ознак. Виходячи із запропонованих діагностичних ознак, наведено методи їх статистичного оцінювання.

Обґрунтовано метод прийняття рішень при діагностиці адаптивно-регулятивних механізмів організму за КІГ на основі аналізу коефіцієнтів розкладу оцінки математичного сподівання та оцінки кореляційної функції у ряди за ортогональними поліномами Чебишева, коефіцієнтів кривих Пірсона на основі критерію Неймана-Пірсона та критерію Байєса.

У четвертому розділі розглянуто питання комп'ютерного імітаційного моделювання КІГ на базі лінійних випадкових послідовностей. Проведено серію експериментів по моделюванню КІГ при фізичних навантаженнях. Розглянуто питання точності імітаційного моделювання. Розроблено систему комп'ютерних програм для проведення імітаційних експериментів та опрацювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях на основі запропонованих у дисертаційній роботі моделі та методів.

Запропонована математична модель та обґрунтовані методи опрацювання на її основі вперше дають змогу проводити діагностику стану адаптивно-регулятивних можливостей організму людини за КІГ при фізичних навантаженнях, оскільки враховують як перехідний, так і стохастичний характер зміни тривалостей кардіоінтервалів. Розроблений метод імітаційного моделювання КІГ може бути використаний для потреб тестування та навчання комп'ютерних діагностичних систем.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КАРДІОІНТЕРВАЛОГРАМ, МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ДІАГНОСТИЧНІ ОЗНАКИ В КАРДІОМЕТРИЧНИХ ДІАГНОСТИЧНИХ СИСТЕМАХ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ)

В цьому розділі проведено огляд та порівняльний аналіз існуючих математичних моделей та методів обробки кардіоінтервалограм, наведено основні діагностичні ознаки, що застосовуються в автоматизованих системах діагностики стану адаптивно-регулятивних можливостей організму, на основі досліджень серцево-судинної системи. З урахуванням останніх досягнень в теорії випадкових процесів та цифрових методів обробки сигналів та результатів аналізу обґрунтовано необхідні властивості, яким повинна задовольняти математична модель кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях.

Основні результати цього розділу опубліковано в роботах [20, 66].

1.1. Науково-теоретичні основи кардіоінтервалографії та методи дослідження кардіоінтервалограми

1.1.1. Основи кардіоінтервалографії. Аналіз зміни кардіоінтервалів ЕКГ є методом оцінки стану механізмів регуляції фізіологічних функцій в організмі людини, зокрема, загальної активності регуляторних механізмів, нейрогуморальної регуляції серця, співвідношення між симпатичним та парасимпатичним відділами вегетативної нервової системи.

Поточна активність симпатичного та парасимпатичного відділів нервової системи є результатом реакції багатоконтурної та багаторівневої системи регуляції кровообігу, що змінює в часі свої параметри для досягнення оптимальної пристосувальної відповіді, яка відображає адаптивну реакцію цілісного організму як на зовнішні, так і на внутрішні подразники. Адаптивні реакції для кожної людини індивідуальні та реалізуються в різних людей з різним ступенем участі функціональних систем, які в свою чергу мають зворотній зв'язок, що змінюється в часі та має перервну функціональну організацію.

Метод аналізу зміни кардіоінтервалів полягає в розпізнаванні та вимірюванні кардіоінтервалів на ЕКГ (рисунок 1.1) [1], побудові їх динамічних рядів та наступним аналізом отриманих числових рядів різними математичними методами [1, 13, 84, 104, 105, 127]. Динамічний ряд кардіоінтервалів називають кардіоінтервалограмою (КІГ).

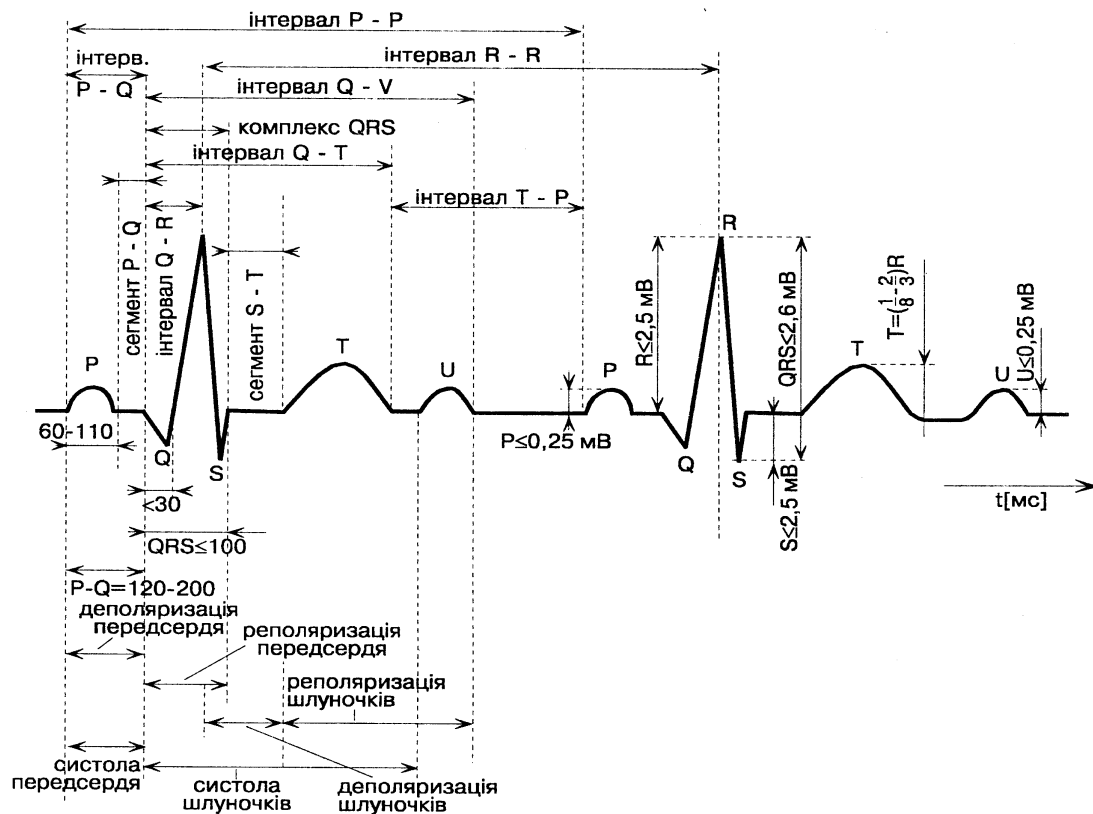


Рис. 1.1. Структура ЕКГ.

КІГ традиційно будують за тривалостями RR-інтервалів ЕКГ, як це показано на рисунку 1.2 [2, 6], хоча більш правильним був би розгляд тривалостей PP-інтервалів, так як саме початок зубця Р як раз і є початком нового серцевого циклу. Але оцінювання за RR-інтервалами більш вірогідне у зв'язку з тим, що зубець R, особливо в другому стандартному відведенні, найбільш легко виділити з ЕКГ-сигналу при комп'ютерній обробці, в силу того, що він є найбільшим за амплітудою.

Клінічне значення аналізу КІГ було вперше оцінено у 1965 році, коли дослідники Non та Lee помітили, що дистресу плоду передувала альтернація кардіоінтервалів між скороченнями до того, як відбувались які-небудь помітні зміни власне у серцевому ритмі. Двадцять років опісля Sayers та інші звернули увагу на присутність фізіологічних ритмів у сигналі серцебиття. Протягом 1970-х років Ewing та співавтори запропонували декілька простих тестів, за допомогою яких за короткочасними змінами кардіоінтервалів виявлялась вегетативна нейропатія у хворих цукровим діабетом. Взаємозв'язок великого ризику смерті у хворих, що перенесли інфаркт міокарду, із значеннями варіативності кардіоінтервалів була вперше продемонстрована Wolf та співавторами у 1977 році. У 1981 році Akselrod та співавтори вперше застосували спектральний аналіз для дослідження коливань серцевого ритму.

Стосовно питання дії на форму КІГ фізичного навантажень різної інтенсивності, то тут існує велика за кількістю та часто суперечлива література, що відкривається роботою Einthoven (1908 р.). Значна кількість робіт присвячена визначенню можливості застосування ЕКГ-досліджень після

фізичного навантаження для виявлення у досліджуваних коронарної недостатності. Після застосування різних за інтенсивністю фізичних навантажень автори спостерігали на ЕКГ зміщення сегменту RS-T, зміну тривалостей RR-інтервалів та перехід додатнього зубця Т в двофазний або від'ємний (Wood із співавторами, Scherf та Goldhammer). Master та Oppenheimer запропонували в якості фізичного навантаження застосувати піднімання та спуск протягом 1,5 хвилин по двохсхідчастих сходинках певної висоти. Кількість піднімань та спусків при цьому залежала від ваги, статі та віку досліджуваного. Це фізичне навантаження отримало назву двохсхідчастої проби Мастера. Дослідження КІГ проводилися до навантаження, безпосередньо після нього (по можливості не пізніше ніж через 30-35 секунд) та потім через 2 та 5 хвилин [2].

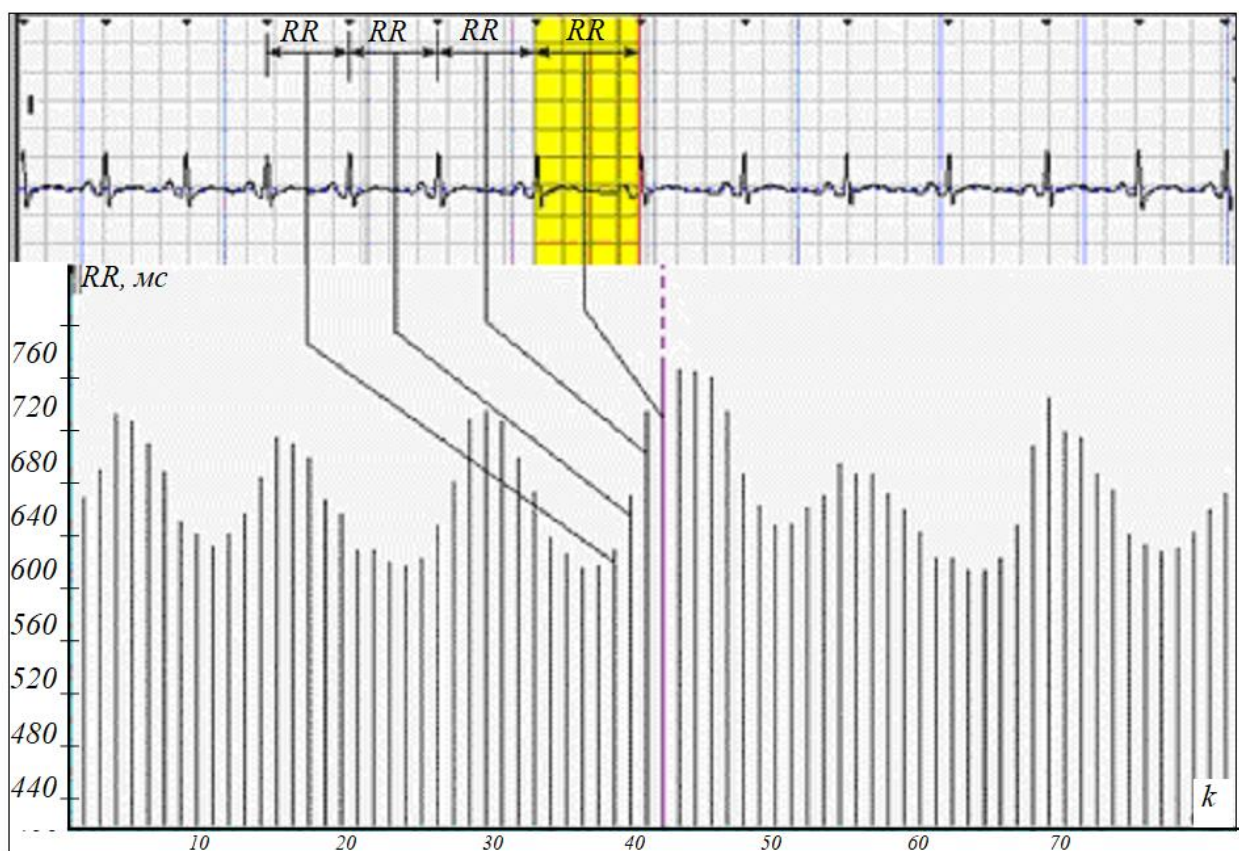


Рис.1.2. Формування кардіоінтервалограми при введенні електрокардіографічного сигналу. Зверху – ЕКГ, знизу – КІГ (по осі ординат – тривалість кардіоінтервалів; по осі абсцис – порядковий номер кардіоінтервалів). Стрілками відмічені елементи КІГ, що відповідають інтервалам між RR-зубцями ЕКГ [6].

Але як з'ясувалося пізніше, для виявлення характеру та степені дії фізичного навантаження на серцеву діяльність здорової або хворої людини дуже важливим є встановлення варіативності кардіоінтервалів не після, а під

час виконання досліджуваним фізичного навантаження або в умовах професійної діяльності [12, 26, 31, 42, 101, 112, 113].

В наш час вважається встановленим, що КІГ, записана в спокої, не відображає існуючу приховану патологію [13, 35, 97, 127, 133]. Тому для людей (наприклад, спортсменів), в яких патологічні зміни та відхилення від норми зі сторони серцево-судинної системи нерідко можуть затушовуватись гарною функціональною здатністю апарату кровообігу та високою тренованістю організму, необхідно для виявлення патологій за КІГ аналізувати останню на протязі та після адекватного фізичного навантаження.

Приклади КІГ в стані спокою та при фізичних навантаженнях представлені на рисунку 1.3 [84-86].

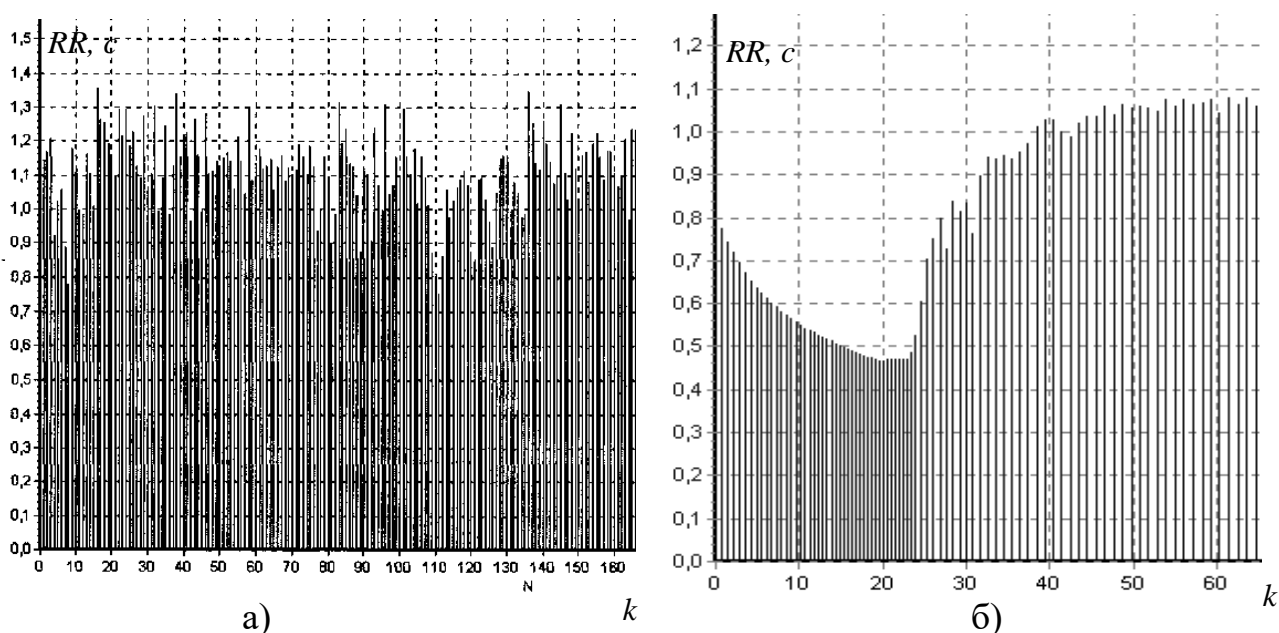


Рис. 1.3. Кардіоінтервалограми, записані в стані спокою (а) та протягом фізичного навантаження (б) – проба Вальсальви [84].

Для реєстрації змін серцевого ритму крім ЕКГ можна використовувати й інші методи, що записують цикли серцевих скорочень (реографію, плетизмографію, доплерографію магістральних артерій, ехокардіографію), але в даній роботі розглядаються тільки дані аналізу електрокардіосигналів. Вибір електрокардіосигналів пояснюється тим, що дані сигнали є найбільш досліджуваними в діагностичних системах та окремі цикли серцевих скорочень в них є найбільш чітко виражені.

Дослідження та аналіз КІГ включає три етапи:

1. Вимірювання та представлення динамічних рядів кардіоінтервалів.
2. Аналіз динамічних рядів кардіоінтервалів.
3. Оцінка результатів аналізу кардіоінтервалограм.

Вимірювання тривалостей RR-інтервалів проводиться апаратним або програмним шляхом з точністю до 1 мілісекунди. Проблема розпізнавання R-зубців ЕКГ в різних апаратно-програмних комплексах розв'язується різними методами, серед яких можна відмітити:

- аналіз амплітудних характеристик сигналу;
- аналіз першої похідної сигналу та її екстремумів за пороговими значеннями;
- аналіз допоміжних залежностей типу „функції форми”, „узагальненої функції” та інших;
- аналіз з використанням еталонних форм.

Представлення динамічних рядів кардіоінтервалів здійснюється в числовому або графічному вигляді.

При дослідженні КІГ розрізняють короткострокові („короткі”) та довгострокові („довгі”) записи. До так званих “коротких” записів відносять дані досліджень, проведених протягом 300 с (5,0 хв), при цьому ритм серця має бути стаціонарним. Оскільки поняття стаціонарності суперечить фізичній природі КІГ, то у стандартах [24, 127] зазначені таке уточнення: відрізок КІГ, що аналізується, має відображати квазістаціонарний ритм серця. Практично це досягається створення умов спокою, відсутності суттєвих подразників тощо [2, 24].

Під довгостроковими записами, як правило, розуміють дані, отримані при 24-х годинному моніторингу ЕКГ (Холтерівський моніторинг), приклад якого подано на рисунку 1.4 [139]. Дослідження таких записів передбачає виокремлення коротких фрагментів тривалістю 300 с (5,0 хв) або 300-500 RR-інтервалів, що мають ознаки стаціонарності, з подальшим вивченням параметрів КІГ за принципом дослідження коротких записів [2].

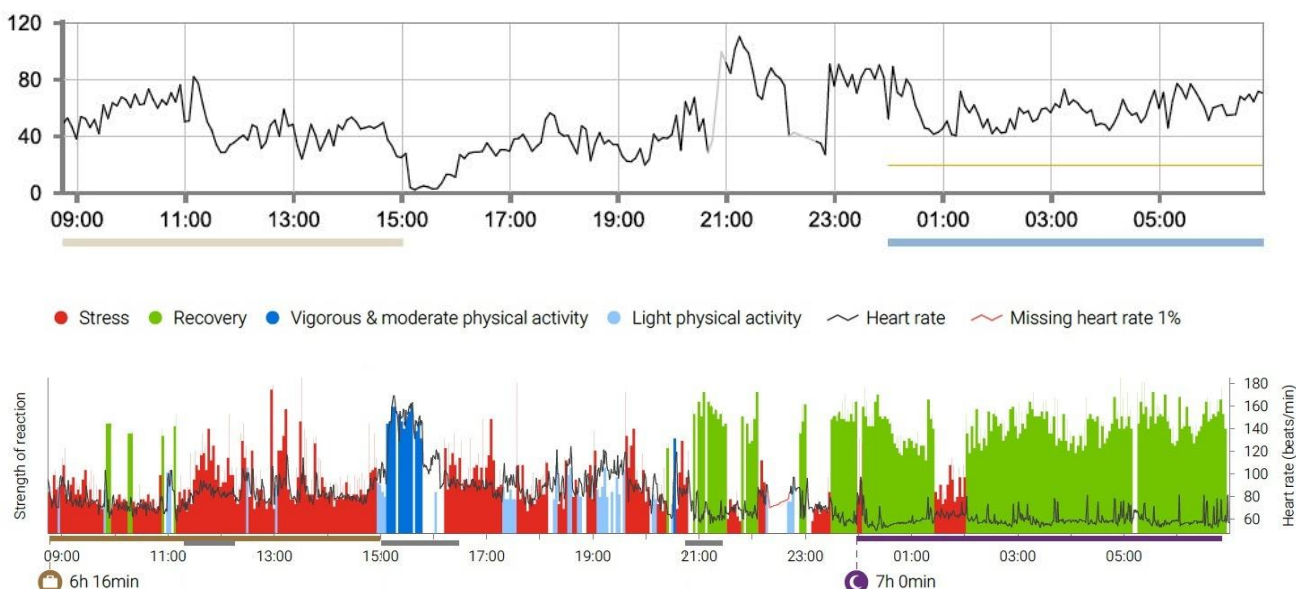


Рис. 1.4. Холтерівський моніторинг (графік КІГ за 24 години показує, що тривалостей RR-інтервалів знижується майже до нуля під час фізичних навантажень та значно збільшується під час медитації та сну) [139].

Методи аналізу динамічних рядів КІГ можна поділити на візуальні та математичні. Візуальний аналіз КІГ був запропонований Д.Жемайтите [47]. Математичні методи аналізу КІГ поділяють на три великі класи, а саме часовий

та частотний аналізи та різноманітні методи нелінійного аналізу [13, 14, 32, 34, 72, 81, 84, 98, 104, 105, 123, 125, 127]. Методи аналізу КІГ розглянуті в п. 1.2.

Незважаючи на багато десятилітній термін застосування різних методів аналізу КІГ у досить різноманітних областях прикладної фізіології та клінічної медицини, сфера їх застосування продовжує поширюватися з кожним роком. Принципово важливим є те, що аналіз КІГ не є вузькоспеціалізованим методом для розв'язання конкретних діагностичних задач. Можна перелічити лише декілька прикладів, де він застосовується для уточнення діагнозу відповідних захворювань. У більшості випадків мова йде про оцінку неспецифічних реакцій організму при дії різноманітних факторів або при визначенні захворювань. Умовно можна виділити чотири напрямки застосування методів аналізу КІГ [6, 12, 13]:

1. Оцінка функціонального стану організму та його змін на основі визначення параметрів вегетативного балансу та нейрогуморальної регуляції.
2. Оцінка вираження адаптаційної відповіді організму при дії різноманітних стресів.
3. Оцінка стану окремих ланок вегетативної регуляції кровообігу.
4. Розробка прогностичних висновків на основі оцінки поточного функціонального стану організму, вираження його адаптаційних відповідей та стану окремих ланок регуляторного механізму.

Практична реалізація вказаних напрямків відкриває безмежне поле діяльності, як для вчених, так і для практиків. Наведемо досить неповний перелік областей використання методів аналізу КІГ [6, 12, 13, 15, 31, 34, 42, 47, 51]:

- виявлення змін у нервовій регуляції серцевої діяльності при синдромі вегетативної дистонії, ішемічній хворобі серця, виразковій хворобі шлунка тощо;
- оцінка характеру нервової регуляції серцевої діяльності, на фоні якої розвиваються аритмії;
- проведення порівняльного аналізу ефективності лікарських препаратів, транквілізаторів і т.д., при їх індивідуальному підборі та визначенні дозування;
- визначення відхилень від індивідуальної та групової норми в діагностуванні, в диспансерних спостереженнях та в профілактичних заходах;
- оцінка ефективності курортно-санаторного лікування.

Застосування методів аналізу КІГ при фізичних навантаженнях дозволяє, зокрема [12, 13, 15, 31, 34, 42, 47, 51]:

- виявити ознаки ішемії міокарду, пов'язані з коронарною недостатністю, приховані порушення серцевого ритму та провідності;
- проводити контроль та ефективність реабілітаційних заходів (медикаментозне, фізіотерапевтичне, хірургічне лікування, тощо)
- оцінити функціональний стан серця, характер його адаптації до фізичних навантажень у людей, що займаються оздоровчою фізкультурою, а

також тих, чия професійна діяльність пов'язана з виконанням тяжких фізичних навантажень.

Дослідження КІГ може бути паралельним або спеціалізованим. В першому випадку воно відбувається одночасно з реєстрацією ЕКГ, ЕХО-КГ для цілей діагностики або медичного контролю або протягом Холтерівського моніторингу. В іншому випадку це ціле направлене вивчення КІГ з використанням спеціалізованих систем.

Виділяють чотири методи досліджень КІГ:

- оперативне дослідження в умовах відносного спокою;
- дослідження при проведенні функціональних тестів;
- дослідження в умовах звичайної діяльності або при виконанні професійних навантажень;
- дослідження в клінічних умовах.

Кожен з цих видів досліджень характеризується відповідними особливостями методики. Дане дослідження більш ґрунтовно розглядає саме дослідження при проведенні функціональних тестів (проб).

1.1.2. Функціональні проби. В залежності від того, по яким каналам регуляції здійснюється вплив, прийнято виділяти наступні види функціональних проб [6, 13, 84, 86, 127]:

1. ортостатична проба (за необхідністю - кліноортостатична проба);
2. проба с глибоким керованим диханням;
3. проба Вальсальви;
4. кардіоваскулярні тести по D.Ewing;
5. проба з фізичним навантаженням (велоергометрія);
6. фармакологічні проби (з β -блокаторами, атропіном и ін.);
7. синокаротидна проба.

Детально розглянемо ті з них, в основі методики яких фізичне навантаження зі сторони пацієнта здійснюється безпосередньо.

1.1.2.1. Активна ортостатична проба. Активну ортостатичну пробу застосовують при необхідності:

- оцінити реактивність парасимпатичного та симпатичного відділів вегетативної нервової системи;
- диференціальної діагностики станів запаморочення;
- виявлення толерантності до різких змін положення тіла у зв'язку з умовами професійної діяльності;
- призначення лікарських засобів, що впливають на перерозподіл крові.

Методика проведення. Після попереднього інструктажу обстежуваний проводить 10-15 хвилин в горизонтальному положенні з припіднятою головою. В цей час проводиться реєстрація ЕКГ. Потім за командою пацієнт швидко, без затримок, приймає вертикальне положення та стоїть спокійно, без напруження протягом 5-7 хвилин.

Технічна особливість проведення проби полягає в тому, що під час вставання з кушетки зареєстрований ЕКГ-сигнал може „зашкалити”, та на КІГ з’явиться значна кількість артефактів. Щоб запобігти цьому, необхідно застосувати наступні дії. По-перше, всі чотири електроди необхідно закріпити попарно на двох руках пацієнта та реєструвати в цьому випадку перше відведення ЕКГ. Другий варіант – розмістити електроди на грудях, а саме: електрод з правої руки розмістити в друге міжреб’я справа від грудини, електрод з лівої руки – по середній ключичній лінії в п’яте міжреб’я (точка електрода V4), електрод з лівої руки розмістити на рівні п’ятого міжреб’я, а електрод з правої руки (земля) прикріпити на правій руці.

Інтерпретація активної ортостатичної проби по КІГ. Особлива увага звертається на необхідність чітко розмежувати аналіз перехідного періоду, що має самостійне діагностичне значення та може використовуватися як при інтерпретації ортостатичної проби, так й в комплексі з іншими показниками при проведенні кардіоваскулярних проб. Перехідний період на КІГ являє собою характерного виду "яму" з наступним "піком", що відбиває прискорення, а потім уповільнення частоти серцевих скорочень. При аналізі перехідного періоду важливий наступний параметр: відношення мінімального значення RR-інтервалу, звичайно в районі 15 удару від початку устанання (RR15 відповідає "дну ями"), до самого довгого RR-інтервалу, звичайно близько 30 удару (RR30), - так званий коефіцієнт 30:15 ($K_{30:15}$).

Відношення $K_{30:15}$ характеризує реактивність парасимпатичного відділу вегетативної нервової системи. У нормі $K_{30:15} = 1.49 \pm 0.24$. Таким чином, нижня границя норми даного показника - 1.35. Діапазон від 1.20 до 1.35 варто вважати умовною нормою. Про зниження $K_{30:15}$, і, отже, про недостатню реактивність парасимпатичного відділу вегетативної нервової системи варто говорити в тому випадку, коли значення $K_{30:15}$ нижче 1.20.

Після аналізу перехідного періоду й оцінки реактивності парасимпатичного відділу автономної нервової системи проводиться спектральний аналіз показників КІГ. Для цього в обов'язковому порядку виключають з подальшого аналізу перехідний період.

1.1.2.2. Проба з глибоким керованим диханням. Метою даного тестування є визначення характеру реакції на стимуляцію парасимпатичного відділу вегетативної системи.

Методика проведення. Спочатку проводиться фоновий запис в стані спокою (200-300 циклів). Потім, за командою, пацієнт починає дихати глибоко та регулярно (200-300 циклів) з частотою шість разів на хвилину (5секунд вдих та 5 секунд видих). Не слід вимагати досить великих зусиль в обстежуваного, так як це може привести до активізації не парасимпатичного, а симпатичного відділу вегетативної системи. КІГ реєструється протягом всієї проби.

Інтерпретація проби з глибоким керованим диханням по КІГ. Оцінюється різниця між максимальною та мінімальною ЧСС протягом дихального циклу та

так званий дихальний коефіцієнт, зниження якого вказує на погіршення парасимпатичної функції.

1.1.2.3. Проба Вальсальви.

Методика проведення. Пацієнт, лежачи на спині, робить неглибоке вдихання та протягом 15-20 секунд видихає повітря через вузьку щілину в мундштуку, підтримуючи внутрішньолегеновий тиск на рівні 40 мм.рт.ст. за даними манометра.

Інтерпретація проби Вальсальви по КІГ. При комп'ютерній обробці КІГ визначають коефіцієнт Вальсальви, який знаходять як відношення тривалості максимального RR-інтервала після проби до тривалості мінімального RR-інтервала підчас проби.

1.1.2.4. Проба з фізичним навантаженням (велоергометрія). Проба призначена для оцінювання вегетативного забезпечення фізичної діяльності та дозволяє охарактеризувати гомеостатичні можливості та адаптаційні резерви як у хворих, так й у здорових людей.

Методика проведення. Проба передбачає виконання дозованого навантаження (степ-тест, велоергометрія, тредміл) до досягнення максимального (в здорових людей), субмаксимального або порогового навантаження (у хворих людей). Реєстрацію КІГ проводять у вихідному стані (фоновий запис) та при проведенні активної ортостатичної проби. Потім проводиться власне проба з навантаженням (10-15 хв) . Для практично здорових людей використовується методика багатоступеневого навантаження (через кожні 3 хв). При цьому всі показники зміни серцевого ритму та артеріального тиску фіксуються в протоколі. Проба зупиняється, якщо пацієнт жаліється на біль у грудях, у нього з'являється віддишка, підвищується тиск або на кардіограмі помітні явні ознаки ішемічної хвороби серця. Якщо ж пацієнт відчуває себе добре, то тест зупиняється, коли ЧСС досягає 85% від максимально допустимих значень.

Інтерпретація результатів велоергометрії. Апаратні дані включають наступні параметри: рівень працездатності пацієнта; зміну RR-інтервалів, виявлення її порушень (якщо є); швидкість відновлення ЧСС та артеріального тиску; тип реакції артеріального тиску; час та причина зупинки тестування і т.д.

1.2. Математичні моделі КІГ в задачах технічної кардіоінтервалометрії

1.2.1. Основні підходи до моделювання кардіоінтервалограм. Математичні моделі КІГ дозволяють визначити як клас діагностичних ознак, так й обумовлюють методи їх визначення у сучасних інформаційно-діагностичних системах. Тому природно при розгляді та порівняльному аналізі

моделей КІГ дотримуватися такої схеми: моделі – діагностичні ознаки (параметри моделі) – методи оцінювання діагностичних ознак.

Моделюванню КІГ присвячена значна кількість наукових праць [12-15, 26, 31-35, 47, 72, 84, 104-106, 112, 115, 123, 124, 125], в переважній більшості з яких викладені досить неузгоджені між собою підходи до моделювання та аналізу КІГ. Такий стан справ призводить до неоднозначності та розбіжності в інтерпретації результатів моделювання та аналізу КІГ.

Виходячи із необхідності систематизації та впорядкування відомостей фізичного, математичного та технічного характеру, що стосуються моделювання та аналізу КІГ, окреслимо нову науково-технічну область, шляхом введення поняття кардіоінтервалометрії [20].

Кардіоінтервалометрія – це область кардіометрії, що охоплює широкий спектр проблем технічного та фізико-математичного характеру (на відміну та в протиположності кардіоінтервалографії, що займається медико-біологічними аспектами дослідження, діагностики та лікування), науково-технічними проблемами якої є [20]:

- побудова математичних моделей, вибір діагностичних ознак, обґрунтування алгоритмів обробки КІГ для проведення діагностики адаптивно-регуляторних механізмів організму;
- створення алгоритмів функціонування систем діагностики на основі КІГ;
- створення методів комп'ютерного імітаційного моделювання КІГ та аналізу її перетворень в технічних системах;
- розробка інформаційно-вимірних діагностичних систем за КІГ.

В сучасній кардіоінтервалометрії умовно можна виділити два підходи до моделювання та аналізу КІГ: детермінований та стохастичний. Відповідно, детермінований базується на детермінованих моделях КІГ, а стохастичний – на імовірнісних з подальшою розробкою відповідних методів та алгоритмів обробки КІГ. Детермінований підхід до моделювання та аналізу КІГ можна розглядати як частковий випадок стохастичного.

При моделюванні розглядають умови, при яких реєструється КІГ. Так розглядаються КІГ в стані спокою та при фізичних навантаженнях. Детерміновані моделі описують тільки динаміку зміни КІГ в стані навантаження, а стохастичні моделі застосовують у переважній більшості випадків для моделювання КІГ у стані спокою.

Розглянемо детерміновані та стохастичні моделі більш детально та наведемо результати їх класифікації та порівняльного аналізу.

1.2.2. Детерміновані моделі кардіоінтервалограм. Математичні моделі КІГ у вигляді детермінованих функцій застосовуються в основному для прогнозування стану організму при фізичних навантаженнях [112]. Задача прогнозування за КІГ полягає в знаходженні можливих наступних значень КІГ на основі аналізу КІГ в попередні моменти часу. Розв'язання цієї задачі пов'язане із використанням апріорних знань про характер (тип функціональної

часової залежності) зміни КІГ в інтервалі часу, як правило, між двома результатами вимірювань відліків КІГ. Розглядають два простих методи прогнозування, що базуються на математичних моделях КІГ у вигляді лінійної функції [112]:

$$x(t) = x_0 + at, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.1)$$

де x_0 – початкове значення кардіоінтервалу;

a – коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни лінійної функції;

t – момент часу;

та експоненціальної функції виду [112]:

$$x(t) = x_{\max} \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.2)$$

де x_{\max} – гранично максимальне значення показника;

λ - коефіцієнт затухання, що характеризує інтенсивність зміни експоненціальної функції.

Діагностичними ознаками при аналізі КІГ на основі (1.1) та (1.2) вважаються коефіцієнти a та λ , які відображають швидкість зміни тривалостей кардіоінтервалів.

Значення коефіцієнтів a та λ знаходять дослідним шляхом. В рамках лінійної моделі (1.1) проводиться вимірювання показників КІГ в моменти часу $t=0$, $x(0)=x_0$ та $t=T_1$, $x(T_1)=x_1$ та розраховують середню швидкість зміни \hat{a} на інтервалі $(0, T_1)$:

$$\hat{a} = \frac{x_1 - x_0}{T_1}. \quad (1.3)$$

В іншому випадку вважають, що при дії фізичного навантаження КІГ спадає за експоненціальним законом. Після зняття навантаження на серцево-судинну систему (закінчення дії фізичного навантаження) зростання КІГ також відбувається за експоненціальним законом. Також вважається, що швидкісний параметр λ зростаючої та спадаючої експонент є однаковим.

Застосування експоненціальної функції (1.2) для моделювання КІГ має своєю основою використання зростаючого показника функції:

$$x(t) = x_{\max} - (x_{\max} - x_{\min}) \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

де x_{\min} – мінімальне значення RR-інтервалу КІГ.

Підставивши в (1.4) значення вимірювань показника x_0 , x_1 та відповідні моменти часу $t=0$ та $t=T_1$, отримуємо:

$$x_1 = x_{\max} - (x_{\max} - x_0) \cdot e^{-\lambda T_1}. \quad (1.5)$$

В отриманому рівнянні два невідомих, які необхідно визначити: x_{\max} та λ . Нехай з деяких фізіологічних міркувань зроблений апріорний вибір значення x_{\max} [112]. Тоді коефіцієнт затухання λ оцінюють за формулою:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T_1} \ln \frac{x_{\max} - x_0}{x_{\max} - x_1}. \quad (1.6)$$

Завдяки своїй простоті детерміновані моделі КІГ дають змогу досить легко реалізувати методи експрес-аналізу стану адаптивно-регулятивних механізмів організму, але вони не враховують стохастичний характер КІГ, що не дозволяє їх використовувати для високоінформативної діагностики.

1.2.3. Стохастичні моделі кардіоінтервалограм. Сучасні дослідження КІГ у значній мірі використовують стохастичний підхід до їх моделювання та дослідження. Стохастичний підхід базується на ймовірнісних моделях КІГ. У цьому випадку математичними моделями КІГ є випадкові величини та стаціонарні випадкові послідовності (дискретний стаціонарний випадковий процес).

Розглянемо коротко моделі, діагностичні ознаки та методи їх оцінювання в рамках стохастичного підходу до КІГ-діагностики.

Найбільш поширеною та найпростішою математичною моделлю КІГ, що лежить в основі більшості методів опрацювання та визначення діагностичних ознак в автоматизованих кардіометричних системах діагностики, є випадкова величина $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$. У такій моделі випадковою величиною вважають тривалість RR-інтервалів динамічного ряду КІГ [13, 114].

За діагностичні ознаки приймаються ймовірнісні характеристики відповідної моделі КІГ, тобто математичне сподівання, дисперсію тощо. За математичною моделлю КІГ у вигляді випадкової величини на основі експериментальних даних знаходять:

- оцінку математичного сподівання

$$\hat{m}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{\omega_i}, \quad (1.7)$$

де n – кількість RR-інтервалів (обсяг вибірки);
 $\{\xi_{\omega_i}, i = \overline{1, n}\}$ – множина відліків реалізацій КІГ;

- оцінку дисперсії

$$\hat{d}_\xi = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_{\omega_i} - \hat{m}_\xi)^2; \quad (1.8)$$

- оцінку середньоквадратичного відхилення

$$\hat{\sigma}_\xi = \sqrt{\hat{d}_\xi}; \quad (1.9)$$

- оцінку щільності розподілу $\hat{p}_\xi(x)$ знаходять шляхом побудови гістограми.

Модель у вигляді випадкової величини застосовується в статистичних методах обробки КІГ, що розглядаються в п.1.3.

Іншим ймовірнісним підходом до моделювання КІГ є використання математичних моделей у вигляді випадкових процесів (випадкових послідовностей), що дозволяє більш повно відобразити, врахувати особливості КІГ у порівнянні із їх моделями у вигляді випадкових величин. До найпростіших математичних моделей КІГ у вигляді випадкових процесів можна віднести моделі у вигляді стаціонарного випадкового процесу (стаціонарність у вузькому розумінні). На практиці, як правило, використовують опис стаціонарних випадкових процесів в рамках спектрально-кореляційної теорії (стаціонарність в широкому розумінні).

Для математичної моделі КІГ у вигляді стаціонарного випадкового процесу, крім оцінки математичного сподівання \hat{m}_ξ та оцінки дисперсії \hat{d}_ξ , виділяють також в якості діагностичних ознак:

- оцінку кореляційної функції \hat{r}_ξ ;
- оцінку спектральної щільності $\hat{S}(\omega)$ КІГ;
- оцінку щільності розподілу $\hat{p}(x)$ КІГ.

Кореляційну функцію оцінюють за формулою:

$$\hat{r}_\xi(k) = \frac{1}{N-k-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-k} [\xi_\omega(n) - \hat{m}_\xi] \cdot [\xi_\omega(n+k) - \hat{m}_\xi], \quad k \ll N, \quad n, k \in \mathbf{Z}, \quad (1.10)$$

де $\xi_\omega(n)$, $n = \overline{0, N}$ – реалізація КІГ.

Таким чином сучасні стохастичні моделі КІГ базуються переважно на її двох ймовірнісних моделях – у вигляді випадкової величини та у вигляді стаціонарної дискретної послідовності. Проте такі моделі є адекватними лише для випадку, коли КІГ реєструється в стані спокою. У випадку ж реєстрації КІГ при фізичних навантаженнях необхідно враховувати нестаціонарний, перехідний характер зміни тривалостей кардіоінтервалів.

1.3. Сучасні методи дослідження кардіоінтервалограми

В наш час існує значна кількість візуальних та кількісних методів дослідження КІГ. Їх можна згрупувати наступним чином [13, 84]:

1. Методи аналізу у часі:

- статистичні методи;
- геометричні методи.

2. Методи аналізу в частотній області (аналіз хвильової структури ритму серця):

- оцінка ритмограми;
- спектральний аналіз.

3. Деякі інші методи дослідження КІГ.

Враховуючи велику різноманітність методів вивчення КІГ, а також неоднозначність їх фізіологічної інтерпретації, в 1996 році на загальному засіданні Європейської спілки кардіологів та Північно-Американської спілки електростимуляції та електрофізіології були розроблені єдині стандарти для аналізу варіативності ритму серця [127]. Згідно цих стандартів варіативність ритму серця рекомендується вимірювати або за короткими (5 хвилин) або довгими (24 години) записами ЕКГ. Аналіз КІГ рекомендується проводити часовими та частотними методами.

1.3.1. Методи аналізу у часі. Часові методи полягають у вимірюванні тривалостей послідовних кардіоінтервалів між нормальними скороченнями серця та обчисленні їх характеристик класичними статистичними методами.

1.3.1.1. Статистичні методи. Модель у вигляді випадкової величини застосовується в статистичних методах обробки КІГ. Методи полягають у статистичному аналізі змін тривалості послідовних RR-інтервалів між нормальними синусовими кардіоциклами з розрахунком різноманітних коефіцієнтів. RR-інтервали між комплексами QRS нормальних кардіоциклів прийнято називати NN-інтервалами (normal-normal). Аналіз тривалостей кардіоінтервалів проводиться у двох напрямках: аналіз власне самих значень кардіоінтервалів та аналіз різниць між суміжними відліками КІГ. Розрахунок основних параметрів влючає в себе наступні показники [13, 68, 84, 100, 127]:

– частота серцевих скорочень (HR), що визначається як кількість n зареєстрованих NN- інтервалів, що поділена на тривалість їх запису

$$HR = 60 \times 1000 \times \frac{n}{\sum_{i=1}^n NN_i} \text{ (мс)},$$

– середнє значення $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$,

- дисперсія $D = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$,
- середньоквадратичне відхилення (SDNN) $\sigma = \sqrt{D}$,
- коефіцієнт варіації (CV) $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$,
- RMSSD - середньоквадратична різницева характеристика (root mean sum successful devitlon) розраховується згідно формули:

$$RMSSD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (NN_i - NN_{i+1})^2},$$

- рNN50 (%) - відсоток NN-інтервалів, різницеви характеристики яких $(x_i - x_{i-1}) > 50$ мс від загального обсягу вибірки NN-інтервалів.

Слід зазначити, що на сьогодні не розроблені єдині стандарти нормальних значень для вказаних вище показників. Багато дослідників розробляють власні критерії норми та патології.

1.3.1.2. Геометричні методи (варіаційна пульсометрія). Сутність варіаційної пульсометрії полягає у визначенні закону розподілу кардіоінтервалів як значень випадкової величини. При цьому будується варіаційна пульсограма (гістограма) та визначаються її основні характеристики [13, 82, 84, 127, 134].

В гістограмі висота кожного стовпчика відповідає кількості RR-інтервалів, що попали в часовий діапазон, який відповідає положенню цього стовпчика на часовій шкалі (рисунок 1.5). Форма гістограми залежить від ширини розряду h , яка вибирається або фіксовано (0,05 с) при обсязі вибірки біля 100 кардіоциклів, або за формулою [84]:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

де x_{\max} – максимальне значення RR-інтервалу;

x_{\min} – мінімальне значення RR-інтервалу;

k – кількість розрядів, що визначаються за формулою:

$$k = 1 + 3,322 \cdot \lg n,$$

де n – кількість спостережень випадкової величини.

Розрізняють нормальний, асиметричний, ексцесивний, амодальний та полімодальний типи гістограм КІГ.

Основними числовими характеристиками, що визначаються за гістограмою є [13, 84, 127]:

- оцінка моди (M_o) – відповідає кількості RR-інтервалів, що зустрічається найчастіше,
- амплітуда моди (AM_o) – кількість кардіоінтервалів у відсотках, значення яких відповідає значенню моди,
- варіаційний розмах ($MxDMn$) – різниця між тривалістю найбільшого та найменшого кардіоінтервалу,
- стрес-індекс (SI) - індекс напруженості регуляторних систем, що визначається за формулою:

$$SI = \frac{AM_o \cdot 100\%}{2 \cdot M_o \cdot MxDMn},$$

- індекс вегетативної рівноваги (ІВР);
- показник адекватності процесів регуляції (ПАПР);
- вегетативний показник ритму (ВПР).

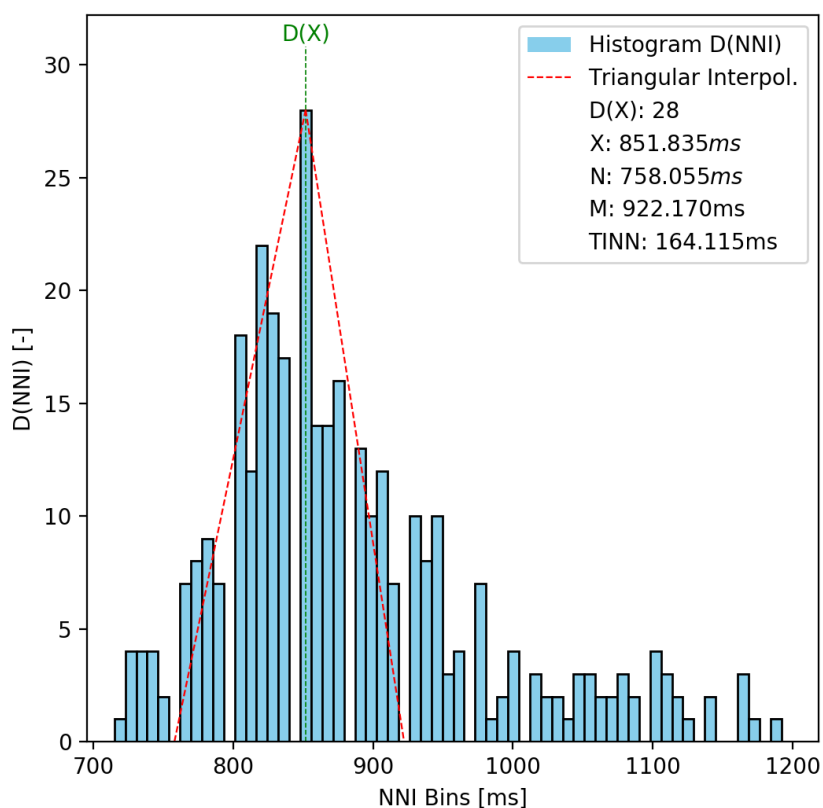


Рис. 1.5. Гістограма КІГ [134].

Таким чином, в сучасній медичній практиці застосовується велика кількість різноманітних методів оцінювання параметрів гістограм, що в свою чергу створюють проблему великої розмірності вектора діагностичних ознак. Та й саме трактування або графічне зображення гістограми є некоректне з точки зору математики. Досліджувана залежність (рис.1.5) є скоріше стовбчастою діаграмою, оскільки для гістограм повинна виконуватись умова

рівності одиниці площі під нею, що впливає із властивостей щільності розподілу випадкової величини.

1.3.2. Методи аналізу в частотній області

1.3.2.1. Оцінка ритмограми. Одним з методів зображення КІГ є ритмограма. Ритмограма (РГ) – це графічне зображення часового ряду міжсистеолічних інтервалів у вигляді послідовності відрізків прямої лінії, еквівалентних за довжиною до тривалості пауз між скороченнями серця [13, 47, 84]. Кожний з відрізків починається з вісі абсцис, на якій відкладається кількість інтервалів, та продовжується у додатному напрямку паралельно вісі ординат зі шкалою часу в секундах як це показано на рисунку 1.6.

В нормі верхній край РГ – нерівний, відповідно до постійної варіативності тривалостей RR-інтервалів. Рисунок цих нерівностей формується трьома видами гармонійних коливань з різними частотами: високочастотних коливань, низькочастотних коливань та коливань дуже низької частоти. Всі три типи коливань можна розрізнити візуально, а тому основу методу РГ складає візуально-логічний та математичний аналіз хвильової структури серцевого ритму.

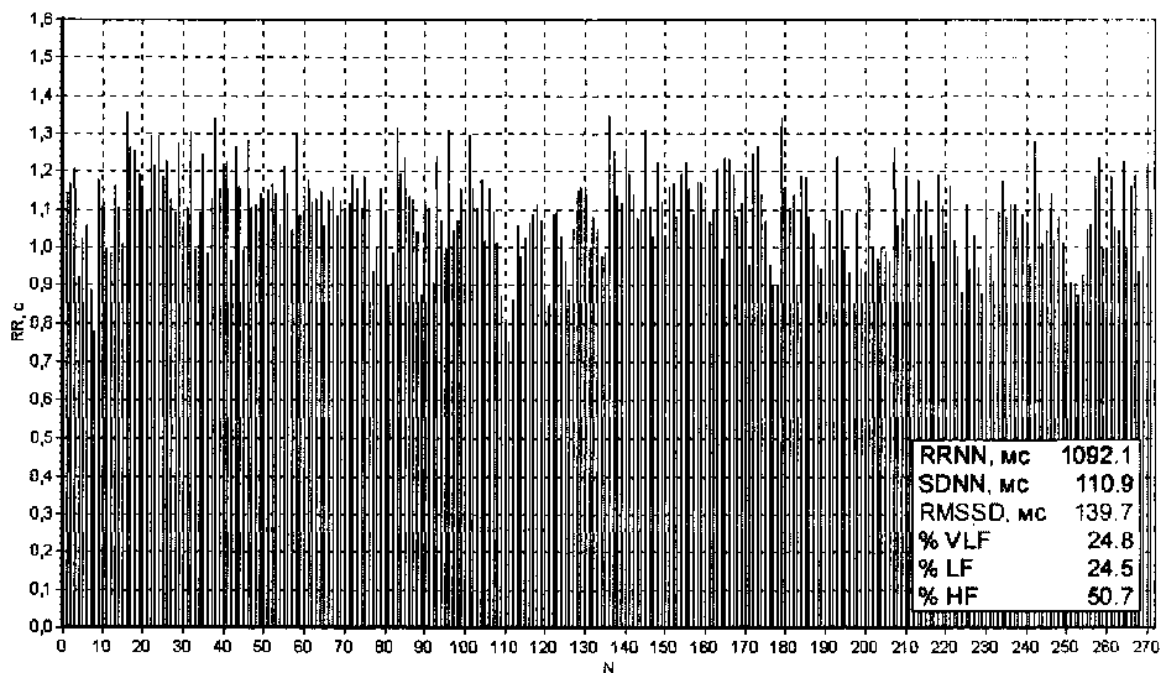


Рис. 1.6. Ритмограма [84].

Клініко-фізіологічну інтерпретацію показників РГ проводять за методикою Д.І. Жемайтіте [47], у відповідності до якої виділяють шість класів (типів) РГ. В сучасних комп'ютерних діагностичних системах оцінюють чотири класи РГ [13, 47, 84, 127]:

РГ 1-го класу – наявність суттєвих періодичних коливань з частотою 0,15-0,40 Гц (з періодом 2,5-6,7 с) – високочастотні хвилі;

РГ 2-го класу – слабо виражені дихальні хвилі та наявність хвиль з

частотою від 0,04 до 0,15 Гц (з періодом 6,6-25 с) – низькочастотні коливання;

РГ 3-го класу – відсутність вищеприписаної періодичності та наявність хвиль більшого періоду (більше 25 с) – коливання дуже низької частоти;

РГ 4-го класу – стабільний ритм, відсутність хвильової структури.

1.3.2.2. Спектральний аналіз. Застосування спектрального аналізу дозволяє кількісно оцінити частотні складові КІГ, що відображають активність різних ділянок регуляторного механізму. Розрізняють параметричні та непараметричні методи спектрального аналізу [9, 13, 84, 97-99, 127, 128, 135, 138].

В непараметричних методах виділяють періодограмний та корелограмний методи. При періодограмному методі оцінюють спектральну щільність потужності КІГ, яку потім згладжують; при корелограмному – спочатку одержують згладжену оцінку автокореляційної функції, після чого за допомогою перетворення Фур'є обчислюють періодограму. Перевагами непараметричних методів є простота використовуваного алгоритму та висока швидкість обробки.

Базовою процедурою при непараметричному спектральному аналізі КІГ є обчислення періодограми [97-99]:

$$I(f) = \frac{2}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \xi_{\omega}(n) \cdot \exp(-j2\pi f n T) \right|^2, \quad (1.11)$$

де $\xi_{\omega}(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ – послідовність з N відліків КІГ.

Періодограма $I(f)$ задає розподіл потужності досліджуваної КІГ за частотами.

При авторегресійному методі припускається, що досліджуваний ряд кардіоінтервалів можна представити моделлю лінійної регресії порядку p [97-99]:

$$\xi(\omega, n) = - \sum_{k=1}^p a(k) \cdot \xi(\omega, n - k) + \nu(\omega, n), \quad \omega \in \Omega, n \in \mathbf{Z}, \quad (1.12)$$

де $a(k)$, $k = 1, 2, \dots, p$ – коефіцієнти лінійної регресії,

$\nu(\omega, n)$ – дискретний білий шум.

В подальшому розраховується періодограма (1.11), в яку замість відліків реалізації $\xi_{\omega}(n)$ КІГ підставляються знайдені параметри лінійної регресії:

$$I(f) = \frac{2}{p^2} \left| \sum_{n=0}^{p-1} a(n) \cdot \exp(-j2\pi f n T) \right|^2. \quad (1.13)$$

Перевагою параметричних методів є прийнятна оцінка спектра навіть за короткою вибіркою. Основні недоліки параметричних методів – складність розрахункових алгоритмів [97].

На рисунках 1.7 та 1.8 подано приклади параметричного та непараметричного представлення спектрограм [2, 134].

Спектральний аналіз переважно використовують у короткотривалих лабораторних дослідженнях, досліджуючи стандартні 5-хвилинні записи КІГ. При цьому визначають наступні частотні (спектральні) показники [2]:

- TP – загальна спектральна потужність у діапазоні 0,0-0,4 Гц;
- HF – спектральна потужність високочастотного діапазону (0,15-0,4 Гц);
- LF – спектральна потужність низькочастотного діапазону (0,04-0,15 Гц);
- VLF – спектральна потужність дуже низькочастотного діапазону (0,0-0,04 Гц);
- ULF – спектральна потужність ультранизькочастотного діапазону (0,0-0,003 Гц), що визначається лише для довгих записів (24-годинний Холтерівський моніторинг);
- LF/HF – автономний баланс;
- LFnorm – співвідношення LF/(LF+HF);
- HFnorm – співвідношення HF/(LF+HF).

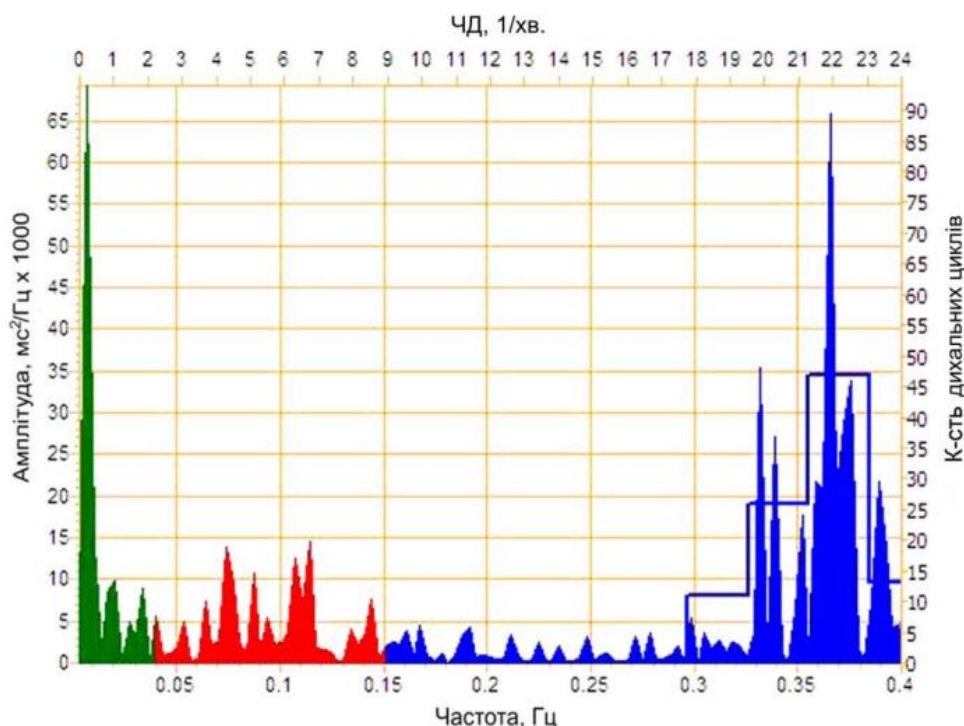


Рис. 1.7. Спектрограма (параметричний метод) [2].

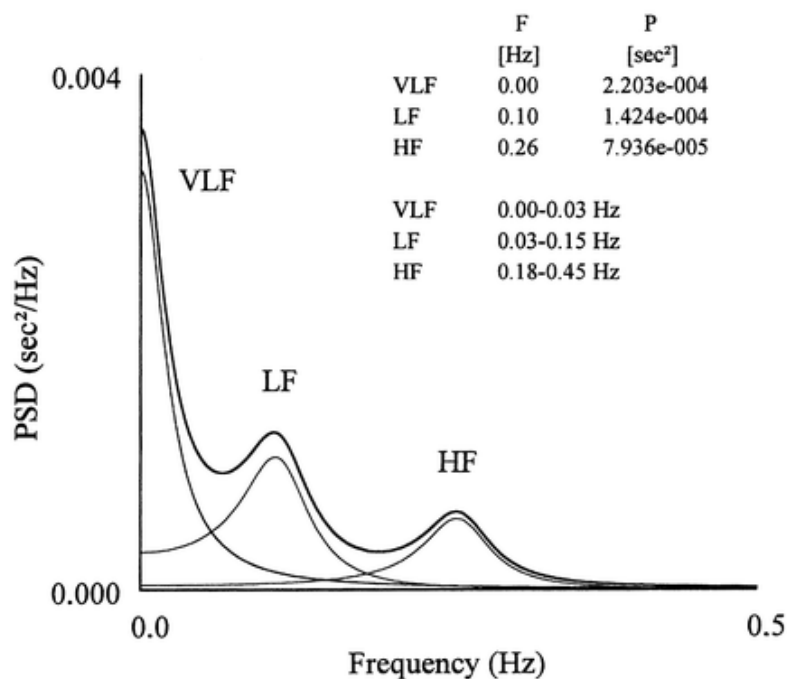


Рис. 1.8. Спектрограма (непараметричний метод) [134].

Недоліком спектрального аналізу є те, що його можна використовувати лише для стаціонарних ділянок КІГ [73]. Класичні методи спектрального аналізу для випадку діагностики за КІГ при фізичних навантаженнях, що відображають перехідні процеси, втрачають свою інформативність [13, 84, 97].

1.3.3. Деякі інші методи дослідження

1.3.3.1. Автокореляційний аналіз. Розрахунок та побудова автокореляційної функції динамічного ряду кардіоінтервалів спрямовані на вивчення цього ряду як стаціонарного випадкового процесу. Автокореляційна функція – це графік динаміки коефіцієнтів кореляції (рис 1.9), отриманих при послідовному зміщенні аналізованого динамічного ряду на одне число відносно свого власного ряду [13, 82, 24].

Після першого зсуву на одне значення коефіцієнт кореляції тим менше одиниці, чим більш виражені дихальні хвилі. Якщо в досліджуваній вибірці домінують повільнохвильові компоненти, то коефіцієнт кореляції після першого зсуву буде незначно нижчим за одиницю. Наступні зсуви призведуть до поступового зменшення кореляційних коефіцієнтів. Автокорелограма дозволяє говорити про приховані періодичності серцевого ритму [13, 84, 127].

За діагностичні ознаки в автокореляційному аналізі приймають [13, 84, 127]:

– значення коефіцієнтів кореляції після першого зсуву (CC1): $CC1 = r_{0,1}$, де $r_{0,1}$ – коефіцієнт кореляції, який розраховується шляхом визначення автокореляційної функції при величині зсуву 1 секунда:

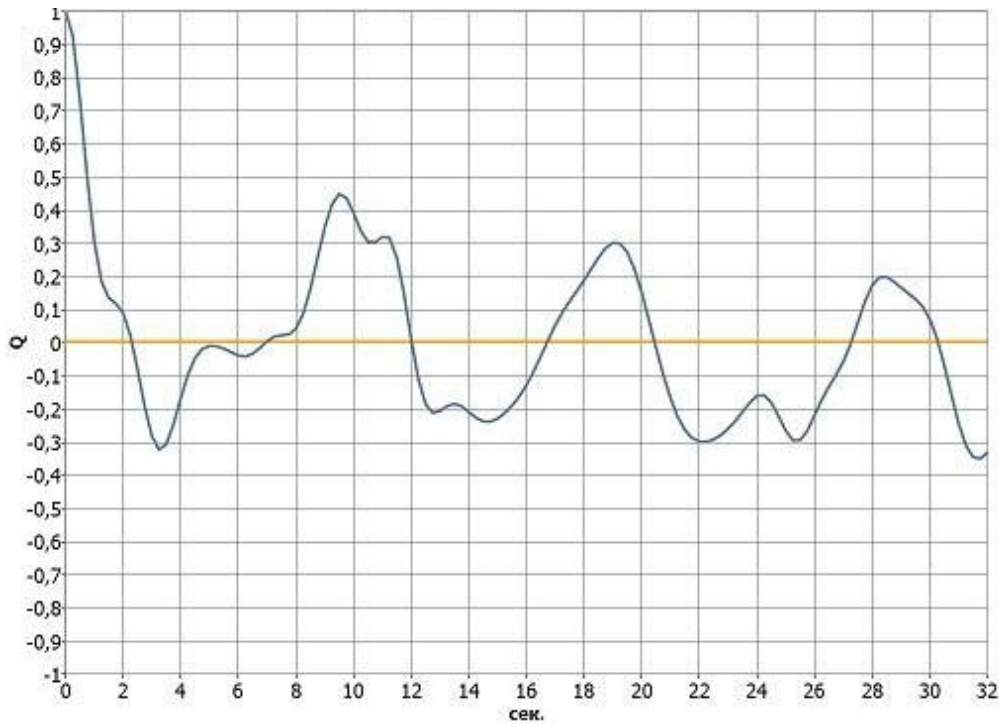


Рис 1.9 Автокореляційна функція [82].

$$r_{0,1} = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i x_{i+k} - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_{i+k}}{\sqrt{\left[m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 \right] \cdot \left[m \sum_{i=k+1}^{m+k} x_i^2 - \left(\sum_{i=k+1}^{m+k} x_i \right)^2 \right]}}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (1.14)$$

де k – номер кроку зміщення,
 m – кількість кроків зміщення;

– час до першого нульового значення коефіцієнта кореляції (ССО):

$$ССО = k\Delta t \cdot 10^{-3}, \text{ при } r_{0,k} = 0.$$

1.3.3.2. Кореляційна ритмографія (скаттерграма). Одним з методів зображення КІГ є кореляційна ритмограма, що полягає в графічній побудові пар тривалостей кардіоінтервалів (попереднього та поточного) на двовимірній площині, що відображає залежність тривалостей пар послідовних кардіоінтервалів (рисунок 1.10). При цьому по вісі абсцис відкладають поточне значення кардіоінтервала, а по вісі ординат – попереднє (або різницю між попереднім та поточним). Графік та область точок, отриманих таким чином (плями Пуанкаре або Лоренца) називаються кореляційною ритмограмою або скаттерграмою. Скаттерграму аналізують візуально, або застосовують методи нелінійної динаміки [13, 84].

При побудові скаттерграми утворюється сукупність точок, центр яких розташовано на бісектрисі. Відстань від центру до початку осей координат відповідає найбільш очікуваній тривалості серцевого циклу. Величина відхилення точки від бісектриси вліво показує, наскільки даний серцевий цикл коротший за попередній, вправо від бісектриси – наскільки він довший попереднього.

Вивчені наступні показники скаттерграми [13, 82, 84, 127]:

- довжина основної „хмаринки” (довга вісь еліпсу L) відповідає варіаційному розмаху. За фізіологічним змістом цей показник не відрізняється від $SDNN$, тобто вказує на максимальну амплітуду коливань тривалості кардіоінтервалів;
- ширина скаттерграми (перпендикуляр до довгої осі, що проведений через її середину – w);
- площа скаттерграми розраховується за формулою площі еліпсу

$$S = \frac{\pi \cdot L \cdot w}{4}.$$

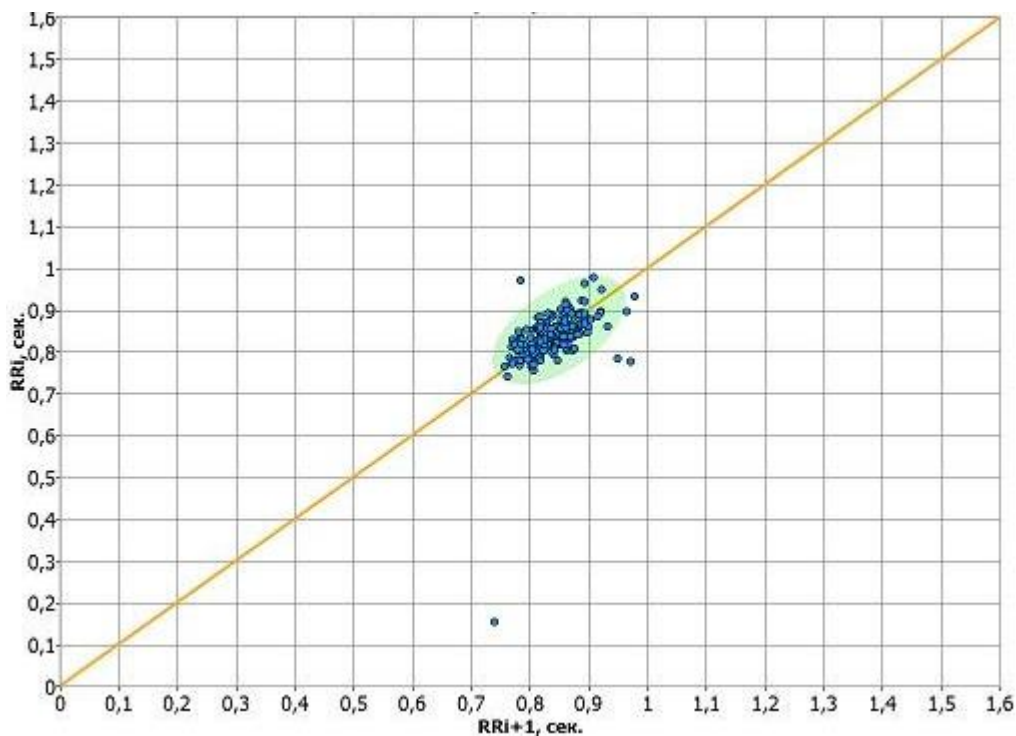


Рис. 1.10. Кореляційна ритмограма (скаттерограма) [82].

Вивчені наступні показники скаттерграми [13, 24, 82, 84, 127]:

- довжина основної „хмаринки” (довга вісь еліпсу L) відповідає варіаційному розмаху. За фізіологічним змістом цей показник не відрізняється від $SDNN$, тобто вказує на максимальну амплітуду коливань тривалості кардіоінтервалів;

– ширина скаттерграми (перпендикуляр до довгої осі, що проведений через її середину – w);

– площа скаттерграми розраховується за формулою площі еліпсу

$$S = \frac{\pi \cdot L \cdot w}{4}.$$

При аритміях, коли методи статистичного та спектрального аналізу КІГ малоінформативні або їх застосування є неможливим, доцільно використовувати оцінку кореляційної ритмограми (скаттерграми).

1.3.3.3. Нові методи дослідження. Методи аналізу КІГ, що розробляються останнім часом, базуються на розгляді серцевого ритму із погляду концепції самоорганізації та нелінійної динаміки [123, 132] та включають побудову діаграм Лоренца [123], нові ентропійні показники [132] (оціночну ентропію та ентропію символічної динаміки), підрахунок кореляційної розмірності, фрактальної розмірності та інші методи аналізу динаміки нелінійних систем [80, 125].

Найбільш відомим методом для визначення хаотичної (невизначеної) динаміки в поведінці складних систем є розрахунок показників максимальної експоненти Ляпунова. Існує два основних класи для їх розрахунку. Перший, найбільш поширений у фізіологічних дослідженнях, це метод прямого оцінювання. Як було показано в роботі [135], застосування його можливе лише при аналізі вибірок великого об'єму, після попередньої фільтрації шуму та відсутності в системі явищ стохастичного вибуху. Другий клас базується на методі Якобіана та апробований на імітаційних та біологічних даних [131]. Він показав свою ефективність як на великих ($n=2000$), так й на малих ($n=380$) вибірках. Суттєвим недоліком його є велика обчислювальна складність.

Всі ці методи в наш час представляють лише дослідницький інтерес, а практичне їх застосування обмежене.

1.4. Вимоги до розроблювальної математичної моделі кардіоінтервалограми

На основі проведеного огляду та порівняльного аналізу математичних моделей КІГ можна зауважити, що переважна більшість з них розглядає КІГ лише у стані спокою, описуючи кардіоінтервали тільки на стаціонарних ділянках досліджуваних послідовностей. Ті ж математичні моделі, що вказують на перехідні процеси в КІГ при фізичних навантаженнях, нехтують змінами імовірнісних характеристик кардіоінтервалів.

Таким чином, враховуючи специфіку задач кардіометрії та особливості КІГ при фізичних навантаженнях, сформулюємо вимоги до розроблювальної математичної моделі КІГ.

Математична модель КІГ при фізичних навантаженнях повинна задовольняти таким вимогам:

1. Враховувати стохастичну природу КІГ.

2. Враховувати перехідний характер зміни тривалостей серцевих циклів при фізичних навантаженнях.

3. Давати змогу розробити на її основі зручні, ефективні методи діагностування адаптивно-регулятивних можливостей організму людини внаслідок застосування функціональних проб.

4. Давати змогу проводити імітаційне моделювання КІГ (як при фізичних навантаженнях, так і в стані спокою), що в свою чергу дасть можливість формувати тестові (еталонні) та навчаючі сигнали для тестування та навчання систем розпізнавання образів при автоматизованій комп'ютерній діагностиці.

На основі розглянутих вище математичних моделей та запропонованої в даній монографії нової математичної моделі КІГ, а також методів опрацювання, що базуються на їх використанні, можна скласти наступну їх класифікацію (рисунок 1.11). В таблиці 1.1 подано порівняльну характеристику основних відомих математичних моделей КІГ та нової математичної моделі.

1.5. Висновки до першого розділу

На основі огляду літературних джерел розглянуто основні відомості про КІГ та методику її дослідження в кардіоінтервалографії, наведені методи опрацювання КІГ та діагностичні ознаки в автоматизованих системах діагностики.

1. Виділено область технічної кардіоінтервалометрії та сформульовано її основні задачі.

2. Проведено порівняльний аналіз та класифікацію існуючих математичних моделей КІГ, що використовуються для потреб автоматизованої діагностики як в стані спокою, так й при фізичних навантаженнях.

3. Враховуючи специфіку задач кардіоінтервалометрії та особливості КІГ при фізичних навантаженнях, сформульовані вимоги до нової математичної моделі.

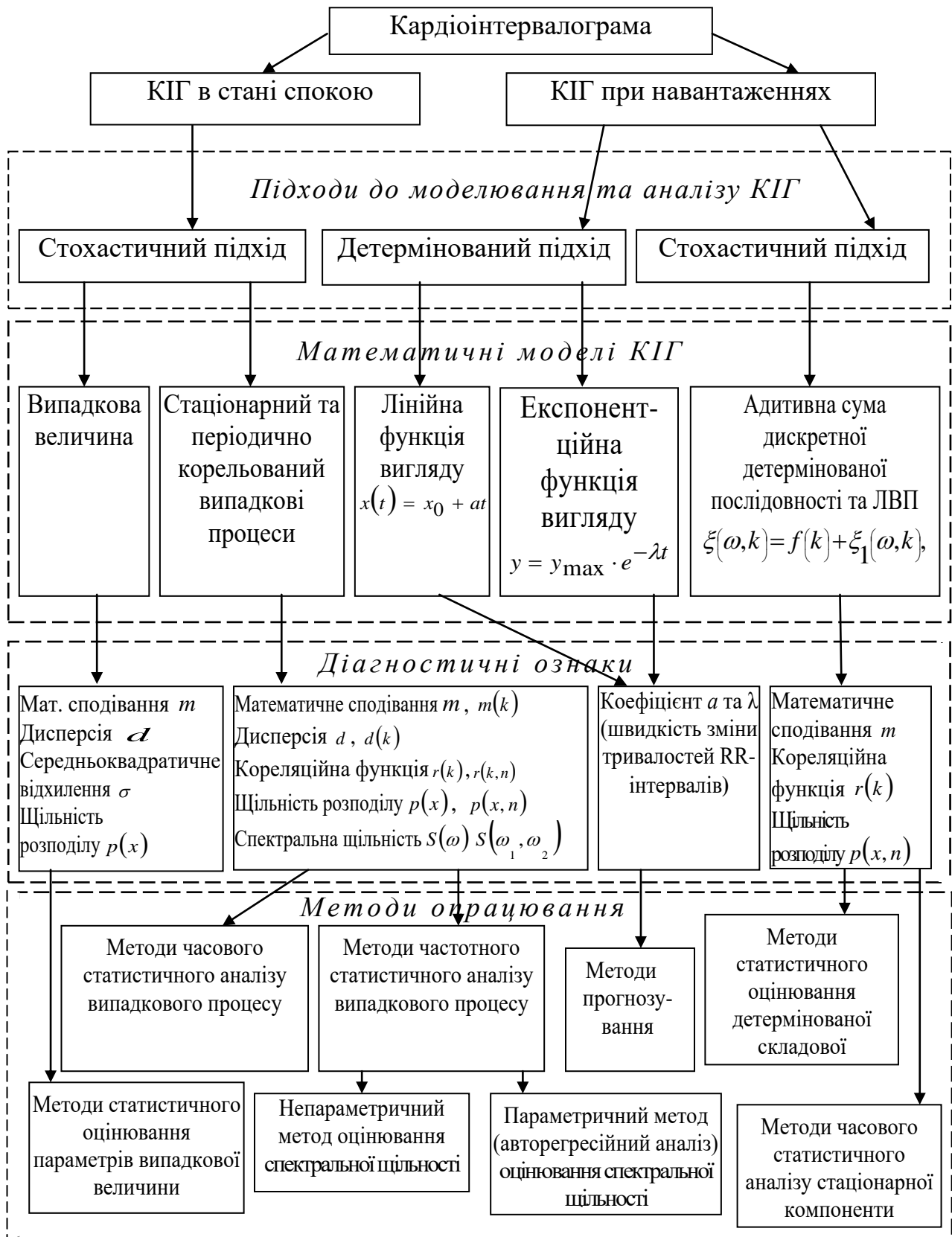


Рис. 1.11. Класифікація математичних моделей КІГ, діагностичних ознак та методів їх оцінювання в сучасній кардіоінтервалометрії та нова математична модель КІГ при фізичних навантаженнях.

Таблиця 1.1. Порівняльна характеристика основних відомих математичних моделей кардіоінтервалограм та нової математичної моделі

	Відомі математичні моделі					Нова математична модель
	Детерміновані моделі		Стохастичні моделі			
	Лінійна функція	Експоненційна функція	Випадкова величина	Стационарний випадковий процес	Періодично корельований випадковий процес	
Врахування випадкової природи КІГ	-	-	+	+	+	+
Врахування перехідного характеру КІГ при фізичних навантаженнях	+	+	-	-	-	+
Використання для діагностики в стані спокою	-	-	+	+	+	+
Використання для діагностики при фізичних навантаженнях	+	+	-	-	-	+
Можливість проведення імітаційного моделювання КІГ в стані спокою та при фізичних навантаженнях	-	-	-	-	-	+

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КАРДІОІНТЕРВАЛОГРАМИ ПРИ ФІЗИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Ґрунтуючись на особливостях формування, факті нестационарного (перехідного) характеру КІГ при фізичних навантаженнях, а також властивій стохастичності кардіоінтервалів, побудовано нову математичну модель КІГ при фізичних навантаженнях у вигляді суми дискретної детермінованої функції та стационарної лінійної випадкової послідовності. Розглянуто характеристики запропонованої математичної моделі. Запропоновано діагностичні ознаки для прийняття рішень щодо адаптивно-регулятивних можливостей організму людини будувати на основі ймовірнісних характеристик КІГ: математичного сподівання, кореляційної функції та щільності розподілу.

Основні результати цього розділу опубліковано в роботах [21, 62, 65, 67-70].

2.1. Обґрунтування математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях

Для побудови математичної моделі КІГ розглянемо механізми формування КІГ-сигналу при фізичних навантаженнях.

На основі медичних досліджень [32, 42, 85, 86, 112] відомо, що значення тривалостей RR-інтервалів КІГ залежать від ритмічної активності пейсмекерських клітин синусного вузла. У свою чергу ритмічна активність знаходиться під нервовим та ендокринним контролем, а також під впливом ряду гуморальних факторів, що змінюють поріг спонтанної деполяризації пейсмекерів синусного вузла. Останнє приводить, відповідно, до збільшення чи зменшення тривалостей RR-інтервалів. Крім названих факторів на зміну тривалостей кардіоінтервалів впливають також фактори, що пов'язані з випадковими подіями. Такими подіями можуть бути ковтання, подразнення зі сторони зовнішнього (звуковий чи світловий вплив) чи внутрішнього (раптове посилення перистальтики кишечника) середовища, зміна положення тіла. Таким чином, вплив названих вище факторів один на другий та на результуючу КІГ носить стохастичний характер. Отже, можна стверджувати, що процес виникнення та формування КІГ має стохастичний характер та тому він є випадковим процесом.

Як показують результати досліджень [14, 15, 101, 112], при дії на організм людини фізичного навантаження тривалості RR-інтервалів починають зменшуватися до певного рівня, а потім, в процесі зняття фізичного навантаження, зростають протягом деякого часу до попереднього рівня (стан відновлення). Це явище вимагає врахування нестационарності, перехідного характеру тривалостей кардіоінтервалів в математичній моделі КІГ при фізичних навантаженнях.

Враховуючи наведені вище міркування, математичну модель КІГ при фізичних навантаженнях запишемо у вигляді адитивної моделі:

$$\xi(\omega, k) = f(k) + \xi_1(\omega, k), \quad \omega \in \Omega, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (2.1)$$

де $f(k)$ – деяка дискретна функція, яка відображає динаміку зміни (тренд) тривалостей RR-інтервалів КІГ;

$\xi_1(\omega, k)$ – стаціонарний випадковий процес з нульовим математичним сподіванням. Стаціонарний випадковий процес враховує стохастичний характер змін (флуктуацій) тривалостей RR-інтервалів КІГ;

Ω – множина елементарних подій.

Зауважимо, що у випадку реєстрації КІГ в стані спокою (без фізичних навантажень), її моделлю також буде лінійний випадковий процес (2.1) причому $f(k) = const$.

2.2. Лінійна випадкова послідовність як модель стохастичної складової кардіоінтервалограми

Оскільки записана математична модель (2.1) КІГ при фізичному навантаженні передбачає в подальшому імітаційне моделювання, то стаціонарний випадковий процес виберемо з класу лінійних випадкових процесів [75, 76, 78]. Найбільш корисною, стосовно імітаційного моделювання, властивістю лінійних випадкових процесів є те, що вони за означенням, зображені в конструктивній формі, яка передбачає можливість отримання імітованого процесу шляхом перетворення найпростішої випадкової послідовності (наприклад, білого шуму) [10, 78]. Зокрема, якщо задано ядро та функцію розподілу породжуючого білого шуму лінійної випадкової послідовності, то її імітаційне моделювання зводиться до здійснення лінійного перетворення білого шуму.

Означення 2.1. Лінійним сепарабельним випадковим процесом називається процес [78], який допускає таке зображення:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (2.2)$$

де не випадкова функція $\varphi(\tau, t) \in L_2(-\infty, \infty)$ при кожному фіксованому $t \in (-\infty, \infty)$,

$\{\eta(\tau), \eta(0) = 0, \tau \in (-\infty, \infty)\}$ – випадковий процес з незалежними приростами та безмежно подільним законом розподілу.

Сепарабельний процес $\xi(t)$, що допускає зображення (2.2), називається лінійним у вузькому розумінні випадковим процесом. Якщо ж $\eta(t)$ в цьому

інтегралі вважати випадковим процесом з некорельованими або ортогональними приростами, то отримаємо лінійний в широкому розумінні випадковий процес.

Зупинимось на основних властивостях лінійних випадкових процесів [10, 78].

Теорема 1.1. Одновимірна характеристична функція лінійного випадкового процесу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \ln f(t, u) = iu\mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\tau - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{iux\varphi(\tau, t)} - 1 - \frac{iux\varphi(\tau, t)}{1+x^2} \right] d\Pi(x) d\tau, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де $\varphi(\tau, t), t \in (-\infty, \infty)$ – дійсна чи комплекснозначна невідповідна числова функція, що задовольняє умові

$$\varphi(\tau, t) \in L_p(-\infty, \infty), \quad p = 1, 2$$

при кожному фіксованому $t \in (-\infty, \infty)$;

$\{\eta(\tau), \tau(0) = 0, \tau \in (-\infty, \infty)\}$ – дійсний однорідний процес з незалежними приростами, характеристична функція якого визначається згідно виразу

$$\ln f(u) = iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) d\Pi(x), \quad (2.4)$$

де

$$d\Pi(x) = \begin{cases} dM(x) & \text{при } x < 0, \\ dN(x) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Функції $M(x)$ і $N(x)$ задовольняють таким умовам:

а) $M(x)$ – неспадна в $(-\infty, 0)$, $N(x)$ – неспадна в $(0, \infty)$ (в нулеві ці функції не означені);

б) $M(-\infty) = N(-\infty) = 0$;

$$в) \int_{-a}^0 x^2 dM(x) < \infty; \int_0^a x^2 dN(x) < \infty \text{ для для будь-якого скінченного } a > 0.$$

Величини μ та $\sigma \geq 0$ є деякими числовими дійсними постійними.

Доведення даної теореми приведено в роботі [78].

Логарифм характеристичної функції лінійного процесу $\xi(t)$, поданий у вигляді виразу (2.3) носить назву представлення у формі Леві за аналогією зображення характеристичної функції однорідного випадкового процесу з незалежними приростами (2.4). Логарифм характеристичної функції у формі А.М. Колмогорова подається наступним чином:

$$\ln f(t, u) = iu\mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{iux\varphi(\tau, t)} - 1 - iux\varphi(\tau, t) \right] \frac{1}{x^2} dK(x) d\tau, \quad (2.5)$$

де $K(x)$ – спектральна функція Колмогорова.

Для функції $K(x)$ має місце таке співвідношення

$$\frac{1}{x^2} dK(x) = \begin{cases} dM(x) & \text{при } x < 0, \\ dN(x) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Логарифми характеристичної функції як у формі Леві (2.3), так й у формі А.М. Колмогорова (2.4), однозначно задають лінійний випадковий процес із скінченною дисперсією, а для випадку $\sigma^2 = \infty$ може застосовуватися лише форма (2.3).

Зображення виду

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\tau) \quad (2.6)$$

є частинним випадком (2.2) і описує стаціонарний лінійний випадковий процес. Для того, щоб лінійний процес (2.2) був стаціонарним, необхідно й достатньо, щоб ядро $\varphi_{\tau, t}$ залежало лише від різниці аргументів, тобто $\varphi_{\tau, t} = \varphi_{t-\tau} = \varphi_s$, $s = t - \tau$. Якщо розглядати вираз (2.6) як інтегральну згортку випадкового процесу $\eta'(t) = \frac{d\eta(t)}{dt}$ та не випадкової функції $\varphi(t)$, що задовольняє тим самим умовам, що й в (2.2), то в такому частинному випадку лінійний процес $\xi(t)$ описує відгук лінійної стаціонарної системи (ланки) при дії випадкового процесу типу білого шуму.

Логарифм характеристичної функції лінійного стаціонарного випадкового процесу є частинним випадком (2.3) і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \ln f(u) = & i\mu u \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) dt + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{iux\varphi(t)} - 1 - \frac{iux\varphi(t)}{1+x^2} \right] d\Pi(x) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Математичне сподівання, дисперсія та кореляційна функція для стаціонарного лінійного випадкового процесу (2.6) мають такий вигляд:

$$M\xi_t = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds = const, \quad (2.8)$$

$$D\xi_t = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(s) ds = const, \quad (2.9)$$

$$R_{t_1, t_2} = R_{t_2 - t_1} = R_{\tau} = \sigma^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_s \varphi_{s+\tau}, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (2.10)$$

Оскільки КІГ-сигнал є дискретним сигналом, то як його модель природно прийняти лінійну випадкову послідовність.

Означення 2.2. Лінійною випадковою послідовністю називається послідовність виду [10]

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau, t} \zeta_{\tau}, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (2.11)$$

де $\varphi_{\tau, t}$ – не випадкова функція (ядро зображення (2.11)) двох дискретних аргументів, відносно якої вважається, що виконується нерівність

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_{\tau, t}|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbf{Z},$$

ζ_{τ} , $\tau \in \mathbf{Z}$ – породжуючий білий шум з дискретним часом.

Для того, щоб лінійна послідовність (2.11) була стаціонарною, необхідно й достатньо, щоб ядро $\varphi_{\tau, t}$ залежало лише від різниці аргументів, тобто $\varphi_{\tau, t} = \varphi_{t-\tau} = \varphi_s$, $s = t - \tau$. При цьому зображення (2.11) набуває вигляду

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{t-\tau} \zeta_{\tau} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau} \zeta_{t-\tau}, \quad t \in \mathbf{Z}. \quad (2.12)$$

Наведемо основні характеристики (математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію) стаціонарної випадкової лінійної послідовності:

$$M\xi_t = m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_s = \text{const}, \quad (2.13)$$

$$D\xi_t = \sigma^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_s^2 = \text{const}, \quad (2.14)$$

$$R_{t_1, t_2} = R_{t_2 - t_1} = R_{\tau} = \sigma^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_s \varphi_{s+\tau}, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (2.15)$$

Послідовність (2.12) можна записати у вигляді лінійного стохастичного різницевого рівняння [10], яке називається послідовністю авторегресії ковзної суми (АРКС) порядку (p, q)

$$\xi_t = -\sum_{k=1}^p a_k \xi_{t-k} + \sum_{\tau=-\infty}^q b_{\tau} \xi_{t-\tau}, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (2.16)$$

де $a_k, k = \overline{1, p}; b_k, k = \overline{0, q}$ – дійсні параметри.

При $q=0$ та $b_0=1$ отримаємо частинний випадок послідовності АРКС – послідовність авторегресії (АР) p -го порядку:

$$\xi_t = -\sum_{k=1}^p a_k \xi_{t-k}, \quad t \in \mathbf{Z} \quad (2.17)$$

Якщо у виразі (2.16) покласти $p=0$, то отримаємо послідовність, яка носить назву ковзної суми (КС) q -го порядку:

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^q b_{\tau} \xi_{t-\tau}, \quad t \in \mathbf{Z}. \quad (2.18)$$

Важливою властивістю лінійних послідовностей АРКС, АР та КС є те, що їхні кореляційні функції та спектральні щільності потужності повністю визначаються параметрами відповідних стохастичних різницевих рівнянь.

Спектральна щільність потужності процесу (2.16) має вигляд

$$S(f) = 2\sigma^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^q b_k \cdot \exp(-i2\pi fk)}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot \exp(-i2\pi fk)} \right|^2, \quad f \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (2.19)$$

де $\sigma^2 = D\xi_t$, $i = \sqrt{-1}$.

З (2.19) можна визначити, що спектральна щільність потужності для послідовності АР рівна:

$$S(f) = \frac{2\sigma^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot \exp(-i2\pi fk) \right|^2}, \quad f \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (2.20)$$

а спектральну щільність потужності для КС можна знайти згідно виразу:

$$S(f) = 2\sigma^2 \left| \sum_{k=0}^q b_k \cdot \exp(-i2\pi fk) \right|^2, \quad f \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (2.21)$$

Кореляційна функція послідовності АР задовольняє наступні рекурентні співвідношення

$$R_\tau = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_{-k} + \sigma^2, & \tau = 0, \\ -\sum_{k=1}^p a_k R_{\tau-k}, & \tau > 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

а при $\tau < 0$ кореляційна функція $R_{-\tau} = \overline{R_\tau}$.

Записавши вираз (2.22) для $\tau = 0, p$, отримаємо систему лінійних рівнянь – нормальних рівнянь Юла-Уокера для послідовності авторегресії, які можна записати у матричній формі

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & \cdots & R_{-p} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{-p+1} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{-p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_p & R_{p-1} & R_{p-2} & \cdots & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Кореляційна функція КС має вигляд

$$R_\tau = \begin{cases} \sigma^2 \cdot \sum_{k=0}^{q-\tau} b_k b_{k+\tau}, & 0 \leq \tau \leq q, \\ 0, & \tau > q, \end{cases} \quad (2.24)$$

а при $\tau < 0$ кореляційна функція $R_{-\tau} = R_\tau$.

2.3. Вибір детермінованої складової математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях

Важливою задачею математичного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях є вибір детермінованої складової в (2.1). Ця функція має апроксимувати будь-який перехідний процес із задовільною точністю. Представимо функцію $f(k), k = \overline{1, K}$ у такому вигляді

$$f(k) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot g_n(k), \quad k = \overline{1, K}, \quad (2.25)$$

де $c_n, n = \overline{0, N}$ – коефіцієнти ряду,

$g_n(k), k = \overline{1, K}$ – елементи деякого функціонального базису.

Необхідною умовою вибору базису функції $g_n(k), k = \overline{1, K}$ є умова, щоб кількість членів ряду (2.25) була меншою за кількість відліків КІГ, тобто $N \ll k$.

В роботі [69] детерміновану функцію моделі (2.1) $f(k)$ запропоновано представити у вигляді степеневого ряду

$$f(k) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot k^n, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2.26)$$

Функцію $f(k)$ можна записати й в іншому вигляді, використовуючи відомі ортогональні функції дискретного аргументу [18, 39, 49, 79, 89, 91].

Перевагою вибору ортогонального базису функції $g_n(k), k = \overline{1, K}$ є можливість суттєвого спрощення визначення коефіцієнтів $c_n, n = \overline{0, N}$ у порівнянні з лінійно-незалежними базисами.

Скінченновимірна система дійсних функцій $\{\psi_n(k), n \in \overline{0, \infty}\}$ ортогональна на решітці $(K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}, k_n = k_1 + (n-1)h, n \in \overline{1, \infty})$ відносно вагової функції $j(k)$, якщо для будь-яких елементів цієї системи виконується рівність [79]:

$$\sum_{k \in K} \psi_l(k) \psi_m(k) j(k) = 0, \quad l \neq m, \quad (2.27)$$

де $\{\psi_n(k) \neq 0, n \in \overline{0, \infty}\}$.

Поділивши на норми елементи ортогональної системи, отримаємо ортонормовану систему

$$\hat{\psi}_n = \frac{\psi_n(k)}{(\psi_n, \psi_n)^{\frac{1}{2}}}, \quad n \in \overline{0, \infty}. \quad (2.28)$$

Розглянемо задачу розкладу функції $f(k), k = \overline{1, K}$ з допомогою лінійної комбінації із дискретної системи $\{\hat{\psi}_n(k) \neq 0, n \in \overline{0, \infty}\}$.

Функцію $f(k), k = \overline{1, K}$ можна представити у вигляді ряду

$$f(k) \approx \sum_n \alpha_n \hat{\psi}_n(k), \quad n = \overline{0, m}, \quad (2.29)$$

де α_n – постійні дійсні коефіцієнти.

У випадку, коли α_n є коефіцієнтами Фур'є $\alpha_n = (f, \psi_n)$, то найкращим наближенням до функції $f(k), k = \overline{1, K}$ за критерієм мінімальної квадратичної помилки буде дискретний ортогональний ряд (2.29)

$$\varepsilon^2 = \sum_{n=0}^m [f(k) - \alpha_n \hat{\psi}_n(k)]^2 j(k) = (f, f) - \sum_{n=0}^m a_n^2 + \sum_{n=0}^m (\alpha_n - a_n). \quad (2.30)$$

Величина ε^2 приймає мінімальне значення при $\alpha_n = a_n$ і вираз (2.30) запишемо як

$$\varepsilon^2 = (f, f) - \sum_{n=0}^m a_n^2, \quad (2.31)$$

якщо $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, то з (2.31) випливає, що

$$(f, f) \geq \sum_{n=0}^m a_n^2. \quad (2.32)$$

Іншими словами, сума квадратів коефіцієнтів ортогонального розкладу не перевищує енергії сигналу, який розкладається в ряд.

Відомо, що одну і ту ж функцію можна розкласти в ряд за різними ортонормованими базисами. Тому для розкладу функції $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ виберемо класичні, найчастіше використані ортогональні базиси. Широко відомими з добре вивченими властивостями ортогональними базисами є [57, 79, 89]:

1. Поліноми дискретного аргументу Чебишева. Поліноми Чебишева, задані на дискретній множині точок $k \in \overline{0, K-1}$ запишемо у вигляді

$$t_n(k) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n+j}{j} \frac{(K-1)^{[n]}}{(K-1)^{[j]}} k^{[j]}, \quad n \in \overline{0, K-1}. \quad (2.33)$$

де $\binom{n}{j}$ та $\binom{n+j}{j}$ – узагальнені коефіцієнти, що дорівнюють $\binom{n}{j} = \frac{n^{[j]}}{j!}$ та $\binom{n+j}{j} = \frac{(n+j)^{[j]}}{j!}$;

$k^{[j]}$ - узагальнений степінь.

Зупинемося на характеристиках узагальнених коефіцієнтів та узагальнених степенів більш детально, оскільки вони посідають важливу роль при вивченні ортогональних поліномів та функцій дискретного аргументу.

Функція

$$\begin{aligned} x_h^{[k]} &= x(x-h)(x-2h)\dots[x-(k-1)h] = \\ &= \prod_{m=1}^k [x-(m-1)h]; \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad k \in \overline{0, \infty}; \quad h > 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

змісту й при $h < 0$, але тоді одна і та ж функція буде мати дві різних форми запису, що є небажаним. При $h = 0$ функція (2.34) є степеневою, звідки й назва – „узагальнений степінь”. Функція (2.34) без формальної зміни співвідношень може розглядатися як при $x \in (-\infty, \infty)$, так й при $x \in \{0, \pm h, \pm 2h, \dots\}$.

Як видно з виразу (2.34), $x_h^{[k]} = 0$ при $k > x > 0$ та x , кратне h . Тому $x_h^{[k]} = 0$ при $x = -mh, m \in \frac{h}{[1, \infty)}$.

Якщо $h = 1$, тоді

$$x^{[k]} = x_1^{[k]} = \prod_{m=1}^k (x - m + 1), x \in (-\infty, \infty), \quad (2.35)$$

звідки випливає, що всі співвідношення, які містять функцію (2.34) при $h \neq 1$ можна одержати із аналогічній для випадку $h = 1$ шляхом заміни x відношенням x/h , тобто відповідною зміною масштабу по x . При цьому може бути корисним відношення

$$(hx)_h^{[k]} = h^k x^{[k]}, \quad (2.36)$$

яке безпосередньо випливає з виразу (2.34).

У випадку $h = 1$ нижній індекс в функції (2.34) опускається. Якщо в виразі (2.34) формально покласти $h = -1$, то воно переходить в символ Похгаммера:

$$(x)_k = x_{-1}^{[k]} = \prod_{m=1}^k (x + m - 1). \quad (2.37)$$

У випадку натуральних x маємо

$$x^{[k]} = \frac{x!}{(x-k)!} = k! \binom{x}{k}; k \in [0, x]; x \in [1, \infty] \quad (2.38)$$

та $x^{[k]} = 0$ при $k > x$.

Зокрема,

$$\begin{aligned} x^{[x]} &= x!; x^{[x-k]} = \frac{x!}{k!}; (x-k)^{[n-k]} = \frac{x^{[n]}}{x^{[k]}}; \\ x^{[x+k]} &= 0; (-1)^{[x]} = (-1)^x x!; x, k \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Безпосередньо з (2.34) виводяться так звані узагальнені біноміальні коефіцієнти

$$\binom{x}{k}_h = \frac{x_h^{[k]}}{k!}, \quad (2.40)$$

які узагальнюють формулу (2.38) на випадкове $h > 0$.

В теорії кінцевих рівнянь функція (2.34) $x_h^{[k]}$ грає таку ж роль, як і степенева функція (яка із неї формально одержується при $h \rightarrow 0$) в аналізі аналітичних функцій. Так, якщо Δ_h - різницевий оператор по змінній x , то

$$\Delta_h x_h^{[k]} = kh x_h^{[k-1]} \quad (2.41)$$

є аналогом

$$dx^k = kx^{k-1} dx.$$

Використовуючи для виразу (2.41) повторно різницевий оператор, отримаємо

$$\Delta_h^n x_h^{[k]} = k^{[n]} h^n x_h^{[k-n]}, \quad n \in [0, k], \quad (2.42)$$

та $\Delta_h^n x_h^{[k]} = 0$ при $n > k$. Має місце співвідношення

$$\sum_{x=0}^N x_h^{[k]} = \frac{(N+h)^{[k+1]}}{(k+1)h}, \quad (2.43)$$

аналог в інтегральному представленні

$$\int_0^N x^k dx = \frac{N^{k+1}}{k+1}$$

та

$$(x+\tau+1)^{[k+1]} - x^{[k+1]} = (k+1) \sum_{m=0}^{\tau} (x+m)^{[k]}, \quad \tau \geq 0. \quad (2.44)$$

Відмітимо, що для виразу (2.40)

$$\Delta_h \binom{x}{k} = \frac{1}{k!} \Delta_h x_h^{[k]} = \frac{kh}{k!} x_h^{[k-1]} = h \binom{x}{k-1}. \quad (2.45)$$

Використовуючи повторно різницевий оператор, отримаємо

$$\Delta_h^n \binom{x}{k}_h = h^n \binom{x}{k-n}_h, \quad n \in [0, k], \quad (2.46)$$

та 0 при $h > k$. Для функції $x_h^{[k]}$ мають місце два різновиди теорем додавання: перша має вигляд

$$x_h^{[k+m]} = x_h^{[k]}(x-kh)_h^{[m]}, \quad k, m \in [0, \infty], \quad (2.47)$$

що впливає безпосередньо із виразу (2.34): друга –

$$P\tau x_h^{[k]} = (x+\tau)_h^{[k]} = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} x_h^{[k-m]} \tau_h^{[m]}, \quad \tau \in (-\infty, \infty). \quad (2.48)$$

виходячи із співвідношень (2.47) та (2.48), отримаємо теорему множення

$$\begin{aligned} x_h^{[m]} x_h^{[k]} &= x_h^{[m]}(x-mh+mh)_h^{[k]} = \\ &= x_h^{[m]} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (x-mh)_h^{[k-n]} (mh)_h^{[n]}; \end{aligned}$$

з врахуванням (2.47) –

$$\begin{aligned} x_h^{[m]} x_h^{[k]} &= \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} h^n m^{[n]} x_h^{[m+k-n]} = \\ &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} h^n k^{[n]} x_h^{[k+m-n]}, \quad k, m \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Використовуючи біноміальні коефіцієнти (2.40), отримаємо

$$x_h^{[m]} x_h^{[k]} = \sum_{n=0}^m n! \binom{k}{n} \binom{m}{n} h^n x_h^{[m+k-n]}. \quad (2.50)$$

У випадку $h=1$ відношення (2.50) можна представити так:

$$x^{[m]} x^{[k]} = \sum_{n=0}^{m+k} S_{mk}^{(n)} x^n, \quad (2.51)$$

тобто отримуємо поліном степеня $k+m$. Коефіцієнти цього поліному

$$S_{mk}^{(n)} = S_{km}^{(n)}; \quad S_{k0}^{(n)} = S_k^{(m)}$$

є числа Стерлінга. Для них можна записати

$$S_{mk+1}^{(n)} = S_{mk}^{(n-1)} - kS_{mk}^{(n)}.$$

При побудові $S_{mk}^{(n)}$ треба будувати першу строку по $n \in [\overline{0, m+k}]$, яка співпадає з $S_{m0}^{(n)}$ або з $S_{0k}^{(n)}$ (зручніше брати $\max(m, k)$ в якості індекса), а далі використовувати рекурентну формулу, додаваючи в кінці одиницю.

Узагальненням відношень (2.48) та (2.49) є наступна теорема додавання та множення:

$$\begin{aligned} x_h^{[m]}(x+\tau)_h^{[k]} &= x_h^{[m]}(x-mh+mh+\tau)_h^{[k]} = \\ &= x_h^{[m]} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (x-mh)_h^{[k-n]} (mh+\tau)_h^{[n]} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Тому з врахуванням формули (2.47) остаточно отримаємо

$$x_h^{[m]}(x+\tau)_h^{[k]} = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (mh+\tau)_h^{[n]} x_h^{[k+m-n]}. \quad (2.53)$$

Формула диференціювання узагальненого степеня при $x \in (-\infty, \infty)$ має вигляд

$$\frac{d^m}{dx^m} x_h^{[k]} \Big|_{x=0} = S_k^{(m)} h^{k-m} m!, \quad m \in [\overline{0, k}],$$

та рівний 0 при $m > k$.

Деякі формули для узагальненого степеня при $x = 1$.

$$\begin{aligned} x^{[-k]} &= [(x+k)^{[k]}]^{-1}; \\ x^{[n]} &= x^{[k]}(x-k)^{[n-k]}; \quad k \in [\overline{0, \infty}]. \\ x^{[k]} x^{[-k]} &= x^{[k]}(x+k)^{-k}; \\ 1^{[-k]} &= [(k+1)!]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Повернемося до поліномів Чебишева. Поліноми Чебишева з вільним членом, що дорівнює одиниці, на відрізку $k \in [\overline{0, K}]$ можна знайти за формулою

$$\tilde{t}_n(k, K) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+j}{j} \frac{k^{[n]}}{K^{[j]}} = \sum_{j=0}^n (-1)^j a_{nj} \frac{k^{[j]}}{K^{[j]}}. \quad (2.55)$$

Поліноми (2.33) зв'язані з поліномами (2.55) співвідношенням

$$t_n(k) = (-1)^n (K-1)^{[n]} \tilde{t}_n(k, K-1). \quad (2.56)$$

Використовуючи поліноми Чебишева функцію $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ можна представити у вигляді

$$f(k) = \sum_{n=0}^{K-1} c_n t_n(k). \quad (2.57)$$

2. Поліноми дискретного аргументу Кравчука. Поліноми Кравчука задані на дискретній множині точок $k \in \overline{0, K}$ визначаються виразом

$$\begin{aligned} s_m(k, p, K) = s_m(k) &= \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} \binom{K-k}{m-k} \binom{k}{n} p^{m-n} q^n = \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} \binom{m}{n} p^{m-n} (K-n)^{[m-n]} k^{[n]}, \quad m = \overline{0, K}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

вагова функція $j(k)$ поліномів має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} j(k) &= \binom{K}{k} p^k q^{K-k}, \quad k = \overline{0, K} \\ p &> 0, q > 0, p + q = 1. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Використовуючи поліноми Кравчука функцію $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ можна представити у вигляді

$$f(k) = \sum_{m=0}^K c_m s_m(k). \quad (2.60)$$

3. Поліноми дискретного аргументу Лагера. Поліноми Лагера задані на дискретній множині точок $k \in \overline{0, \infty}$. Вагова функція для даних поліномів має вигляд

$$j(k) = e^{-\lambda k}, \quad \lambda > 0, k \in \overline{0, \infty}. \quad (2.61)$$

Поліноми Лагера записуються

$$\begin{aligned}
l_m(k) &= (-1)^m \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} \frac{(k+n)^{[m]}}{m!} \exp(-\lambda n) = \\
&= \frac{a^m}{(a+1)^m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{(-1)^n k^{[n]}}{a^n n!}, \quad k, m \in \overline{[0, \infty)},
\end{aligned}
\tag{2.62}$$

де $a = (e^{-\lambda} - 1)^{-1}$.

Використовуючи поліноми Лагера функцію $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ можна представити у вигляді

$$f(k) = \sum_{m=0}^K c_m l_m(k). \tag{2.63}$$

Задачу вибору базисної функції сформулюємо наступним чином. Якщо задана деяка множина базисів, то основним критерієм порівняння та вибору системи базисних функцій з даної множини є мінімум кількості перших коефіцієнтів розкладу функції $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ при однаковій точності апроксимації (степеня близькості).

В даній дисертаційній роботі як критерій вибору системи ортогональних функцій будемо використовувати енергетичний критерій, тобто критерій мінімуму кількості перших коефіцієнтів ряду при розкладі функції $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ в ортогональний ряд, які несуть у собі однакову долю енергії сигналу.

Порівняння та вибір систем базисних функцій розглянуто в розділі 3.

2.4. Характеристики математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях

Одним з основних завдань математичного моделювання КІГ для сучасних комп'ютерних діагностичних систем є визначення достатньої кількості параметрів запропонованої моделі, що можуть у повній мірі характеризувати дану модель, а через неї й саму змодельовану КІГ.

Ці параметри (діагностичні ознаки) повинні бути чутливим індикатором стану серцево-судинної системи як в стані спокою, так й при фізичних навантаженнях для визначення адаптивно-регулятивних можливостей організму.

Так як діагностичні ознаки та методи опрацювання КІГ впливають з її моделі, то будемо притримуватися наступної схеми: математична модель – діагностичні ознаки – методи опрацювання – оптимізація вектора розмірності діагностичних ознак (без зменшення їх інформативності).

Діагностичні ознаки при визначенні адаптивно-регулятивних можливостей організму людини побудуємо на основі ймовірнісних характеристик (математичного сподівання, кореляційної функції та щільності розподілу) процесу $\xi(\omega, k)$. Так, математичне сподівання процесу (2.1) згідно теорем про числові характеристики (математичне сподівання невинядкової величини, винесення невинядкових величин за знак математичного сподівання, математичне сподівання суми) [27] дорівнює:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\xi(\omega, k)\} &= \mathbf{M}\{f(k) + \xi_1(\omega, k)\} = \mathbf{M}\{f(k)\} + \mathbf{M}\{\xi_1(\omega, k)\} = \\ &= f(k) + \sum_{i=-\infty}^k \varphi(k-i) \mathbf{M}\{v(\omega, i)\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Оскільки $\mathbf{M}\{v(\omega, k)\} = 0$, то

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, k)\} = f(k).$$

Отже, обчислення математичного сподівання $\mathbf{M}\{\xi(\omega, k)\}$ зводиться до визначення функції $f(k)$.

Кореляційну функцію процесу (2.1) можна визначити згідно виразу:

$$\begin{aligned} R_{\xi}(k, l) &= \mathbf{M}\{(\xi(\omega, k) - \mathbf{M}\{\xi(\omega, k)\}) \cdot (\xi(\omega, l) - \mathbf{M}\{\xi(\omega, l)\})\} = \\ &= \mathbf{M}\{(f(k) + \xi_1(\omega, k) - f(k)) \cdot (f(l) + \xi_1(\omega, l) - f(l))\} = \\ &= \mathbf{M}\{\xi_1(\omega, k) \cdot \xi_1(\omega, l)\} = R_{\xi_1}(k, l) = R_{\xi_1}(k-l), \quad k, l \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$R_{\xi_1}(k-l) = R_{\xi_1}(\tau), \quad \tau = k-l, \quad k, l \in \mathbf{Z}.$$

Тобто, кореляційна функція випадкового процесу (2.1) дорівнює кореляційній функції стаціонарної лінійної випадкової послідовності $\xi_1(\omega, k)$.

Одновимірна функція щільності розподілу $p_{\xi_1}(x, k)$ стаціонарної компоненти $\xi_1(\omega, k)$ не змінюється при зсуві за параметром k , що можна подати так:

$$p_{\xi_1}(x, k) = p_{\xi_1}(x, k+j) = p_{\xi_1}(x), \quad k, j \in \mathbf{Z}. \quad (2.66)$$

Таким чином, діагностичними ознаками при проведенні діагностики стану адаптивно-регулятивних можливостей організму при фізичних навантаженнях на основі вище запропонованої моделі будуть математичне сподівання, що дорівнює детермінованій функції $f(k)$, кореляційна функція

$R_{\xi_1}(\tau)$ та функція щільності розподілу $p_{\xi_1}(x, k)$ стаціонарної компоненти $\xi_1(\omega, k)$ моделі (2.1).

Методи статистичного опрацювання запропонованих діагностичних ознак розглянуті в розділі 3.

2.5. Висновки до другого розділу

1. Побудовано нову математичну модель КІГ при фізичних навантаженнях, базуючись на аналізі формування та факті нестационарного (перехідного) характеру КІГ при фізичних навантаженнях, а також властивій стохастичності кардіоінтервалів, у вигляді суми дискретної детермінованої функції та стаціонарної лінійної випадкової послідовності.

2. Розглянуто основні характеристики стохастичної складової – стаціонарної лінійної випадкової послідовності.

3. Розглянуто питання вибору детермінованої складової.

4. Запропоновано діагностичні ознаки – ймовірнісні характеристики моделі (математичне сподівання, кореляційну функцію та щільність розподілу) – для діагностики стану адаптивно-регулятивних можливостей організму людини, базуючись на розробленій математичній моделі КІГ при фізичних навантаженнях.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ ОПРАЦЮВАННЯ КАРДІОІНТЕРВАЛОГРАМИ ТА ДІАГНОСТИЧНІ ОЗНАКИ НА БАЗІ ЇЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

У цьому розділі обґрунтовано методи статистичного оцінювання діагностичних ознак, а саме, коефіцієнтів розкладу оцінки математичного сподівання та оцінки кореляційної функції КІГ у ряди за ортогональними поліномами Чебишева, а також параметрів кривих Пірсона для оцінювання щільності розподілу, що дало можливість зменшити (оптимізувати) розмірність вектора діагностичних ознак. За результатами статистичного оцінювання математичного сподівання уточнено математичну модель КІГ при фізичних навантаженнях. Обґрунтовано метод прийняття рішень при діагностиці адаптивно-регулятивних механізмів організму людини за КІГ на основі критерію Неймана-Пірсона та критерію Байєса.

Основні результати цього розділу опубліковано в роботах [19, 20, 60-63, 69].

3.1. Методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм

3.1.1. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм при аналізі детермінованої складової їх математичної моделі. Виходячи із запропонованих в розділі 2 діагностичних ознак, наведемо методи їх статистичного оцінювання.

Оскільки статистичне оцінювання математичного сподівання здійснюється тільки за однією реалізацією КІГ, а КІГ при фізичних навантаженнях не є стаціонарною, то оцінювання математичного сподівання, що дорівнює детермінованій складовій $f(k)$ моделі (2.1), здійснено на основі методу найменших квадратів [27, 114]. Обґрунтуємо це твердження.

Припустимо, що істина залежність (математичне сподівання) тривалостей кардіоінтервалів від свого порядкового номеру на КІГ в точності виражається залежністю $f(k)$. Експериментальні точки відхиляються від цієї залежності внаслідок випадкових похибок вимірювання. Ці похибки, як правило, підпорядковуються нормальному закону розподілу. Розглянемо будь-яке значення аргументу k_i . Результатом досліду є значення випадкової величини $\xi_i(\omega)$, розподілене за нормальним законом з математичним сподіванням $f(k_i)$ та середньоквадратичним відхиленням σ_i , що характеризує ступінь відхилення похибки від математичного сподівання. Нехай точність вимірювання у всіх точках однакова:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma.$$

Тоді нормальний закон, за яким розподіляється величина $\xi_i(\omega)$, можна записати у вигляді:

$$p_i(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - f(k_i)]^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.1)$$

В результаті нашого дослідження – ряду вимірювань – відбулася наступна подія: випадкові величини $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ набули множини значень (y_1, y_2, \dots, y_n) . Поставимо задачу: як підібрати математичне сподівання $f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_n)$, щоб ймовірність цієї події була максимальною.

Строго кажучи, ймовірність будь-якої з подій $\xi_i(\omega) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, так само як й їх зсув, дорівнює нулеві, так як величини $\xi_i(\omega)$ неперервні; тому ми будемо користуватися не ймовірностями подій $\xi_i(\omega) = y_i$, $i = \overline{0, n}$, а відповідними елементами ймовірностей:

$$p_i(y_i) dy_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - f(k_i)]^2}{2\sigma^2}} dy_i, \quad (3.2)$$

Знайдемо ймовірність того, що система випадкових величин $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ прийме сукупність значень, що лежить в межах

$$(y_i, y_i + dy_i), \quad y = 1, 2, \dots, n.$$

Так як дослідження є незалежними, ця ймовірність дорівнює добутку елементів ймовірностей (3.2) для всіх значень i :

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - f(k_i)]^2}{2\sigma^2}} dy_i = B e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f(k_i)]^2}, \quad (3.3)$$

де B – деякий коефіцієнт, що не залежить від $f(k_i)$.

Необхідно так вибрати математичне сподівання $f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_n)$, щоб вираз (3.3) перетворювався в максимум.

Величина

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f(k_i)]^2}$$

завжди менше одиниці; очевидно, вона має найбільше значення, коли показник степені за абсолютною величиною мінімальний:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - f(k_i)]^2 = \min$$

Звідси, відкидаючи постійний множник $\frac{1}{2\sigma^2}$, отримаємо вимогу методу найменших квадратів: для того щоб дана сукупність спостережних значень y_1, y_2, \dots, y_n була наймовірнішою, необхідно вибрати функцію $f(k)$ так, щоб сума квадратів відхилень спостережних значень y_i від $f(k_i)$ була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(k_i)]^2 = \min.$$

Перейдемо до задачі оцінювання математичного сподівання виходячи з принципу найменших квадратів [17, 88, 114].

Нехай $\{\xi_\omega(k)\}$, $k = \overline{1, K}$ – ω -реалізація КПГ, а функція $f(k)$, $k = \overline{1, K}$ апроксимується її оцінкою $\hat{f}(k)$, що є многочленом степені L :

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^L b_n k^n, \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.4)$$

де b_n – коефіцієнт розкладу многочлена.

В межах методу найменших квадратів оцінка математичного сподівання відбувається шляхом мінімізації квадрата різниці вихідної послідовності $\{\xi_\omega(k)\}$, $k = \overline{1, K}$ й значень множини $\{\hat{f}(k)\}$. Введемо функцію

$$Q(b_n, n = \overline{0, L}) = \sum_{k=1}^K (\xi_\omega(k) - \hat{f}(k))^2 = \sum_{k=1}^K \left[\xi_\omega(k) - \sum_{n=0}^L b_n k^n \right]^2 = \rho^2(\xi_\omega(k), \hat{f}(k)). \quad (3.5)$$

Вихідна послідовність коефіцієнтів b_n , $n = 0, 1, \dots, L$ отримується шляхом прирівнювання нулю похідних функції (3.5) по змінним b_n . Це дає систему з $L + 1$ рівняння

$$\sum_{n=0}^L b_n \sum_{k=1}^K k^{n+m} = \sum_{k=1}^K \xi_\omega(k) \cdot k^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, L. \quad (3.6)$$

Таким чином, задавши степінь многочлена L та, розв'язавши систему рівнянь (3.6), отримуємо коефіцієнти розкладу b_n . Далі, за формулою (3.4) обраховуємо значення функції $\hat{f}(k)$.

В результаті оцінювання математичного сподівання отримаємо досить великий обсяг значень функції $\hat{f}(k)$, що рівний кількості відліків на КІГ.

Зменшити розмірність діагностичного простору можна шляхом розкладу оцінки математичного сподівання $\hat{f}(k)$ в базисах ортогональних функцій або в тригонометричному базисі, а за діагностичні ознаки прийняти коефіцієнти розкладу тої базисної функції, яка дозволить апроксимувати функцію $\hat{f}(k)$ з однаковою точністю, але меншою кількістю коефіцієнтів у порівнянні з усіма іншими базисними функціями.

Базуючись на матеріалі розділу 2, виконаємо розклад оцінки математичного сподівання в ряди за ортогональними дискретними поліномами Кравчука, Лагера та Чебишева.

У загальній постановці задачу ортогонального розкладу оцінки математичного сподівання сформулюємо таким чином.

Нехай реалізація оцінки математичного сподівання описується функцією $\hat{f}(k)$, $k = \overline{1, K}$. Необхідно в заданому базисі побудувати ортогональний розклад виду

$$f(k) = \sum_{n=0}^{K-1} c_n \varphi_n(k), \quad (3.7)$$

де c_n – коефіцієнти розкладу;

$\varphi_n(k)$ – система ортогональних функцій.

Коефіцієнти ортогонального розкладу в ряд за поліномами Кравчука функції $\hat{f}(k)$, $k = \overline{0, K}$ обчислюються за співвідношенням

$$a_m = \left[\binom{K}{m} (pq)^m \right]^{-1} \sum_{k=0}^K j(k) f(k) s_m(k). \quad (3.8)$$

де $s_m(k)$ – поліном Кравчука, який можна знайти згідно виразу (2.58);

$j(k)$ – вагова функція, що обчислюється за формулою (2.59).

Базис функцій Кравчука має вигляд

$$\left\{ \varphi_m(k) = \left(\|s_m\|^{-1} \sqrt{j(k)} s_m(k) U(k, 0, K) \right), k = \overline{-\infty, \infty}, m = \overline{0, K} \right\}, \quad (3.9)$$

де $\|s_m\| = \sqrt{\binom{K}{m}(p \cdot q)^m}$ – норма полінома Кравчука.

Рекурентне співвідношення для поліномів Кравчука має вигляд

$$(m+1)s_{m+1}(k) = [k - m(1-2p) - pK]s_m(k) - pq(K-m+1)s_{m-1}(k), \quad (3.10)$$

$$m \in [1, K-1]$$

Наведемо вигляд перших поліномів Кравчука:

$$s_0(k) = 1,$$

$$s_1(k) = k - pK,$$

$$s_2(k) = \frac{1}{2}[k^2 + (p - q - 2pK)k + p^2K(K-1)],$$

$$s_3(k) = \frac{1}{6}\{k^3 - 3p(q+K)k^2 + [3p^2(K-1)(K-2) + 3p(K-2) + 2]k - p^3K(K-1)(K-2)\}$$

Графіки поліномів Кравчука зображені на рисунку 3.1.

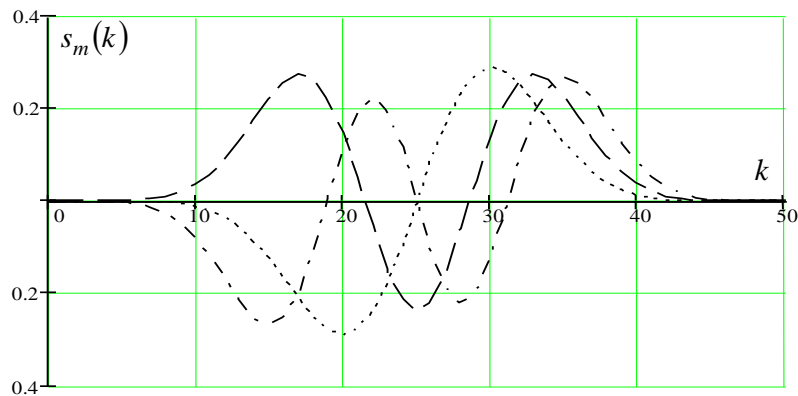


Рис. 3.1. Графіки поліномів Кравчука.

Коефіцієнти ортогонального розкладу в ряд за поліномами Лагера функції $\hat{f}(k)$, $k = 0, \overline{K}$ обчислюються за співвідношенням

$$a_n = \sum_{k=0}^{K-1} f(k)\varphi_n(k), \quad (3.11)$$

де $\varphi_n(k)$ – базис функцій Лагера дискретного аргументу

$$\left\{ \varphi_m(k) = \left((-1)^m \exp\left(-\frac{\lambda k}{2}\right) \hat{l}_m(k) \mathcal{U}(k), \quad k = \overline{0, \infty} \right), \quad m = \overline{0, \infty} \right\}, \quad (3.12)$$

де $\hat{l}_m(k) = \left[e^{\lambda m} (1 - e^{-\lambda}) \right]^{\frac{1}{2}} l_m(k)$, а $l_m(k)$ – поліном Лагера, який обчислюється згідно виразу (2.62).

Рекурентна формула для поліномів Лагера з вільним членом, що рівний одиниці, має вигляд:

$$l_{m+1}(k) = \left[1 + \frac{me^\lambda + (1 - e^\lambda)k}{n+1} \right] \tilde{l}_m(k) - \frac{me^\lambda}{m+1} \tilde{l}_{m-1}(k), \quad \tilde{l}_{-1}(k) = 0, \quad \tilde{l}_0(k) = 1. \quad (3.13)$$

Наведемо вигляд перших поліномів Лагера:

$$\begin{aligned} l_0(k) &= 1, \\ l_1(k) &= e^{-\lambda} \left[1 + k(1 - e^\lambda) \right], \\ l_2(k) &= e^{-2\lambda} \left[1 + 2k(1 - e^\lambda) + \frac{1}{2}(1 - e^\lambda)^2 k^2 \right], \\ l_3(k) &= e^{-3\lambda} \left[1 + 3k(1 - e^\lambda) + \frac{3}{2}(1 - e^\lambda)^2 k^2 + \frac{1}{6}(1 - e^\lambda)^3 k^3 \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Графіки перших п'яти поліномів Лагера зображені на рисунку 3.2.

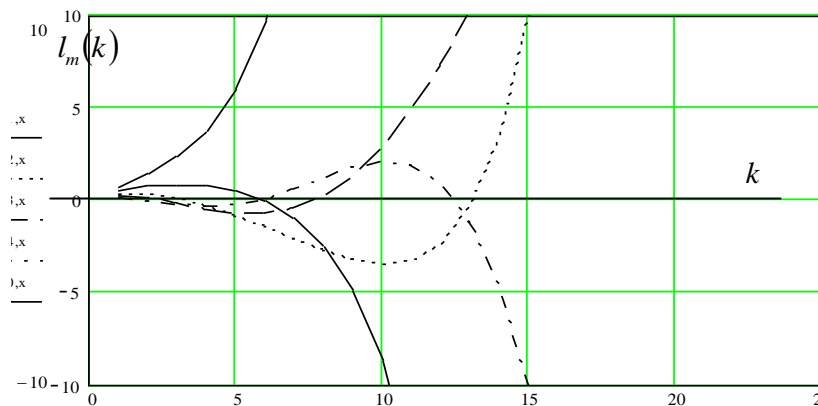


Рис. 3.2. Реалізації перших п'яти поліномів Лагера.

Коефіцієнти ортогонального розкладу функції $\hat{f}(k), k = \overline{0, K}$ в ряд за поліномами Чебишева мають вигляд

$$c_n = \frac{2n+1}{K(K^2-1)\dots(K^2-n^2)} \sum_{k=0}^{K-1} f(k) t_n(k), \quad n \in [0, K-1], \quad (3.15)$$

де $t_n(k)$ – поліном Чебишева n -го порядку, який визначається згідно виразу (2.33).

Рекурентні співвідношення, які дозволяють послідовно обраховувати значення поліномів Чебишева, можна записати таким чином:

$$(n+1)t_{n+1}(k) - (2n+1)(2k - K + 1)t_n(k) + n(K^2 - n^2)t_{n-1}(k) = 0, \quad n \in \overline{1, K-2}. \quad (3.16)$$

Перших п'ять поліномів Чебишева запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} t_0(k, K) &= 1, \\ t_1(k, K) &= 1 - 2\frac{k}{K}, \\ t_2(k, K) &= 1 - 6\frac{k}{K} + 6\frac{k(k-1)}{K(K-1)}, \\ t_3(k, K) &= 1 - 12\frac{k}{K} + 30\frac{k^{[2]}}{K^{[2]}} - 20\frac{k^{[3]}}{K^{[3]}}, \\ t_4(k, K) &= 1 - 20\frac{k}{K} + 90\frac{k^{[2]}}{K^{[2]}} - 140\frac{k^{[3]}}{K^{[3]}} + 70\frac{k^{[4]}}{K^{[4]}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Графіки поліномів Чебишева подані на рисунку 3.3.

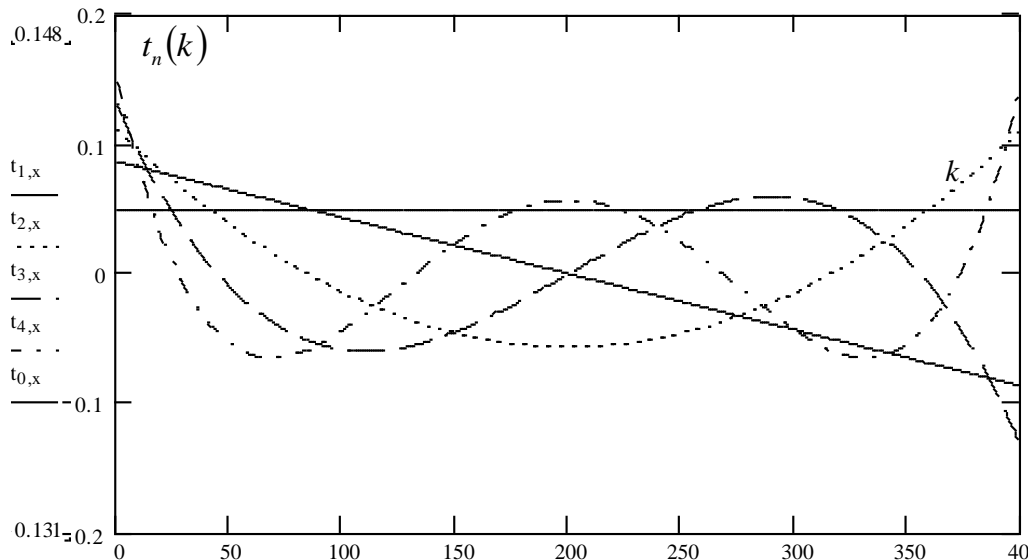


Рис. 3.3. Реалізація перших п'яти поліномів Чебишева.

Функцію $\hat{f}(k)$, $k \in \overline{0, K}$ можна також представити тригонометричним поліномом, зображуючи її так:

$$f(k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \pi n \frac{k}{l} + b_n \sin \pi n \frac{k}{l} \right), \quad (3.18)$$

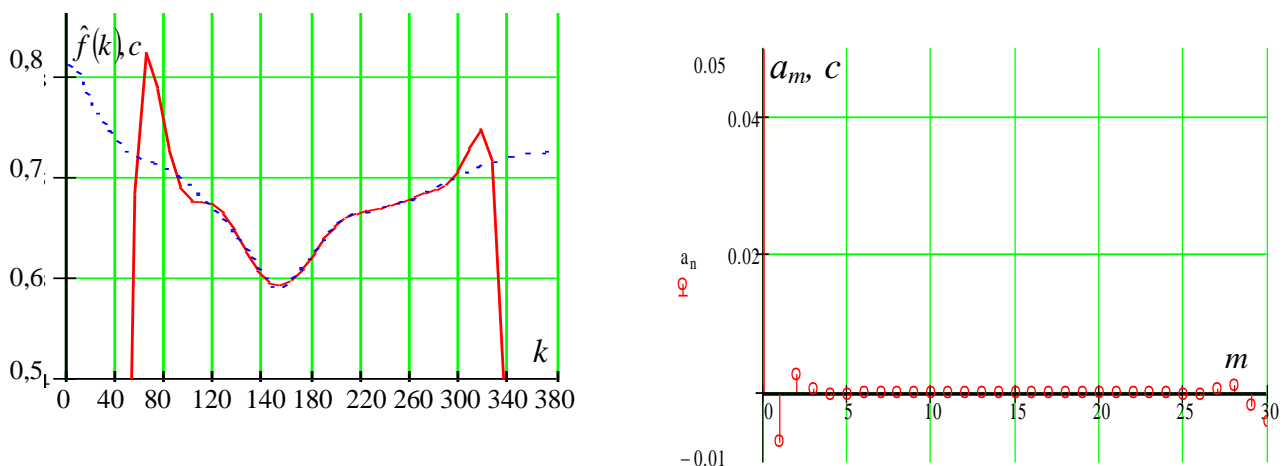
де коефіцієнти a_n та b_n визначаються з формул

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(k) \cos \frac{\pi n k}{l} dk,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(k) \sin \frac{\pi n k}{l} dk, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\frac{\pi}{l}$ – основна частота розкладу.

Приклади розкладів функції $\hat{f}(k)$, $k = \overline{0, K}$, що рівна оцінці математичного сподівання КІГ (для здорової людини), наведені на рисунках 3.4-3.8.



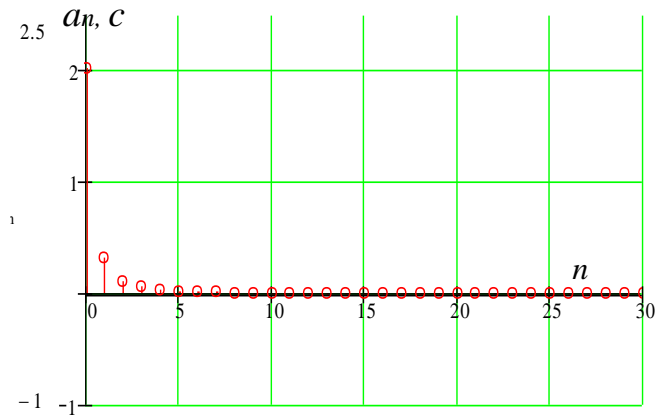
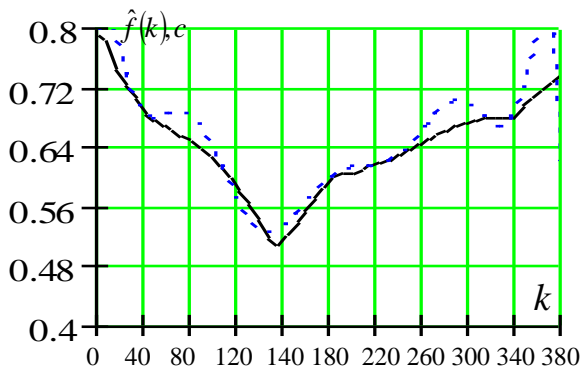
а)

б)

Рис. 3.4. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ в ряд за поліномами Кравчука:

а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),

б) спектр коефіцієнтів в базисі Кравчука.

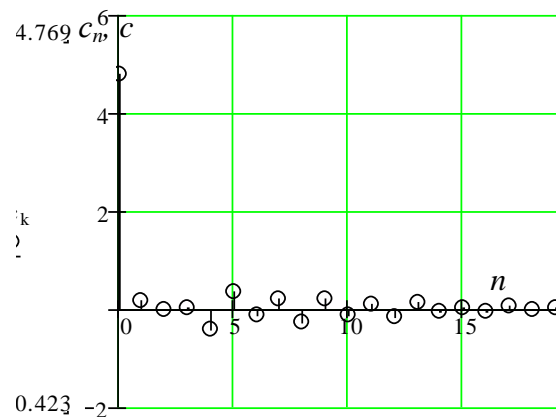
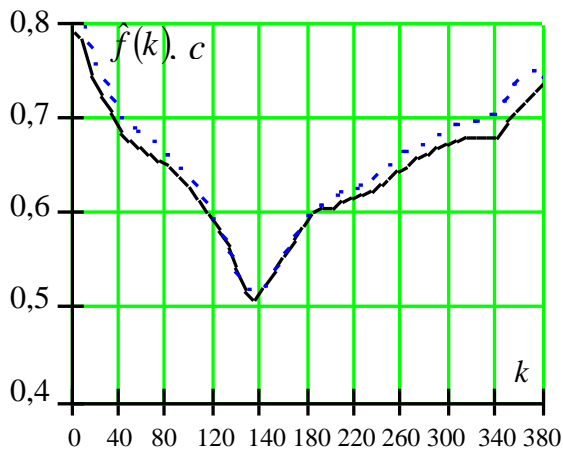


а)

б)

Рис. 3.5. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ в ряд за поліномами Лагера:

- а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (суцільна лінія) та її апроксимація (пунктирна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Лагера.



а)

б)

Рис. 3.6. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.

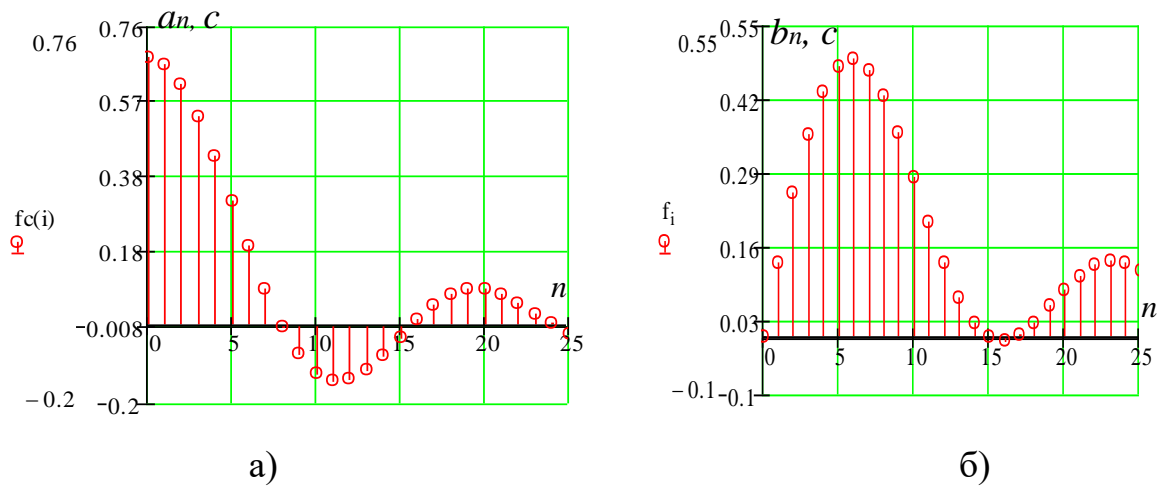


Рис. 3.7. Спектри коефіцієнтів розкладу оцінки математичного сподівання КІГ в ряд за тригонометричними функціями:
 а) косинусні складові,
 б) синусні складові.

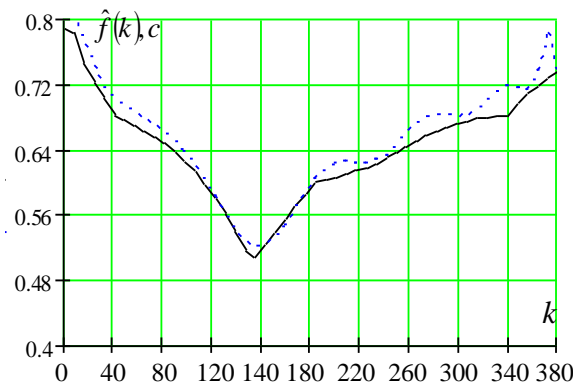


Рис. 3.8. Графіки оцінки математичного сподівання КІГ (суцільна лінія) та її апроксимація (пунктирна лінія) в тригонометричному базисі.

Для розкладу функції $\hat{f}(k)$ за базисними функціями справедлива нерівність Бесселя:

$$\sum_n a_n^2 \leq \sum_{k \in K} \hat{f}^2(k), \quad (3.19)$$

тобто сума квадратів коефіцієнтів розкладу в ряд не перевищує енергії сигналу. Отже, при $n \rightarrow 0$ коефіцієнти розкладу $a_n \rightarrow 0$ й тому основну інформацію про сигнал містять тільки перші коефіцієнти ряду.

Нерівність (3.19) запишемо у такому вигляді:

$$\sum_n a_n^2 \geq B(N) \sum_{k \in K} \hat{f}^2(k), \quad (3.20)$$

де $0 < B(N) < 1$ – вагова функція, яка вказує, яку долю енергії у відношенні до загальної енергії сигналу несуть N коефіцієнтів розкладу узагальненого ряду Фур'є.

Задаючи величину $B(N)$, можна визначити кількість коефіцієнтів у ряд Фур'є, що гарантує точність наближеного скінченного ряду Фур'є до самої функції.

Залежність долі енергії сигналу від кількості коефіцієнтів розкладу наведена на рисунку 3.9, який показує, що для апроксимації оцінки математичного сподівання КІГ з точністю 95% необхідно 4 коефіцієнти розкладу за функціями Чебишева, 6 – за тригонометричними функціями, 9 – за функціями Лагера, 10 – за функціями Кравчука.

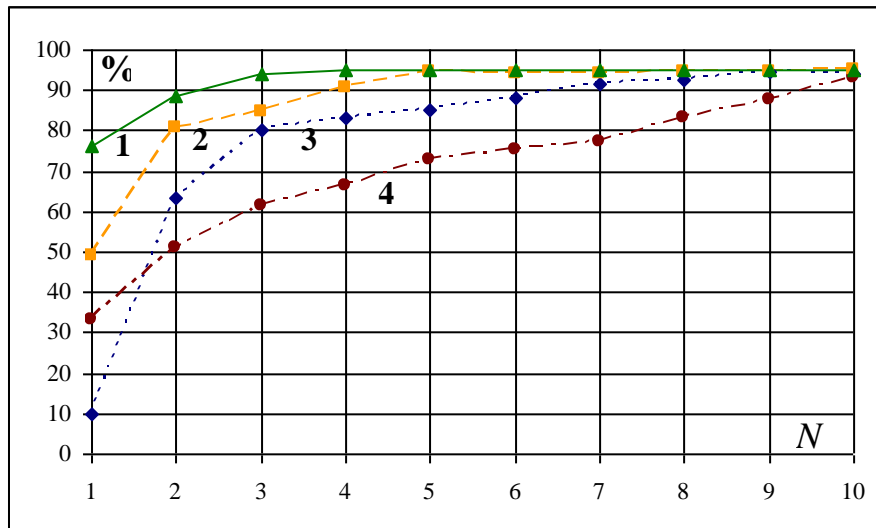
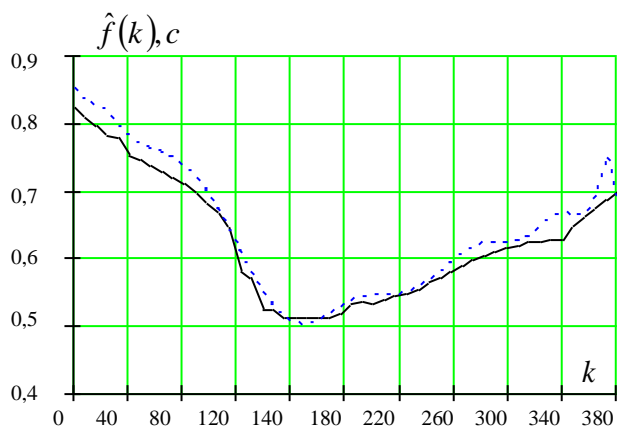


Рис. 3.9. Залежність долі енергії сигналу від кількості коефіцієнтів розкладу:

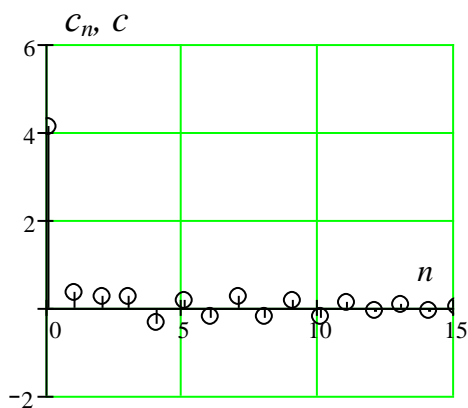
- 1 – за функціями Чебишева;
- 2 – за тригонометричними функціями;
- 3 – за функціями Лагера;
- 4 – за функціями Кравчука.

Отже, встановлено, що найменша кількість коефіцієнтів використовується при розкладі функції $\hat{f}(k), k = \overline{0, K}$ в ряд за дискретними ортогональними поліномами Чебишева. Таким чином, як діагностичні ознаки за оцінкою математичного сподівання приймемо коефіцієнти її розкладу за поліномами Чебишева.

Результати розкладу оцінок математичних сподівань за поліномами Чебишева для чотирьох пацієнтів, що різняться за віком, статтю та станом здоров'я наведені на рисунках 3.10-3.13, а значення перших чотирьох коефіцієнтів – діагностичних ознак – в таблиці 3.1.



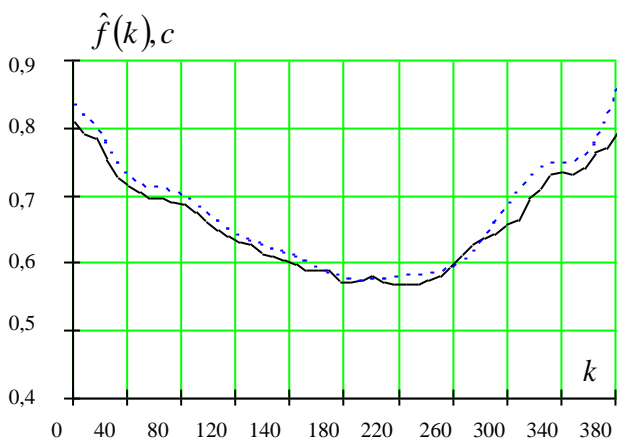
а)



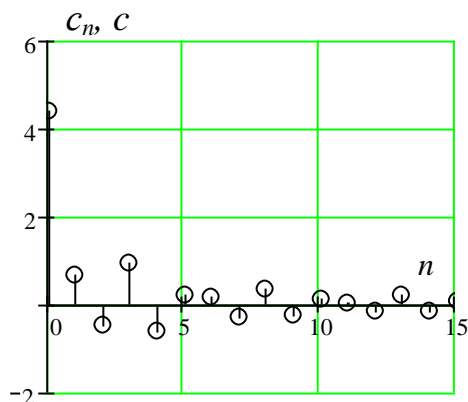
б)

Рис. 3.10. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ (пацієнт 1 – чоловік з ризиком ішемічної хвороби серця) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.

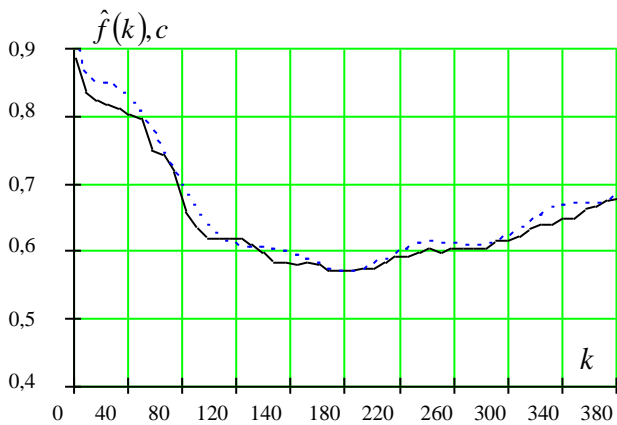


а)

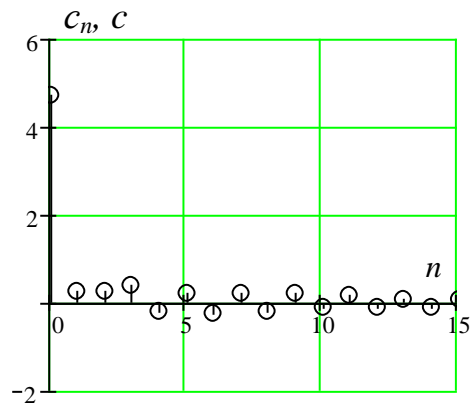


б)

Рис. 3.11. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ (пацієнт 2 – здорова молода дівчина) в ряд за поліномами Чебишева:
 а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.



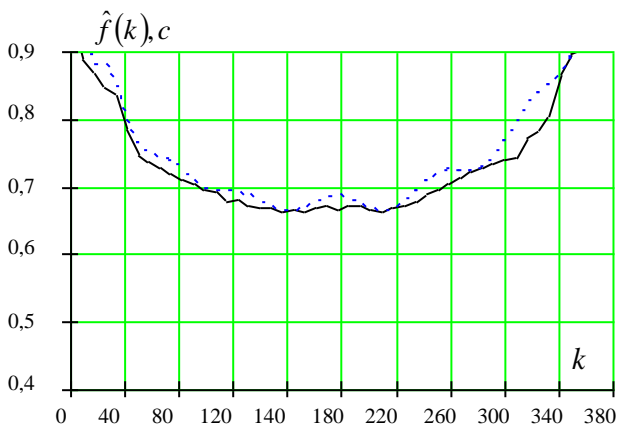
а)



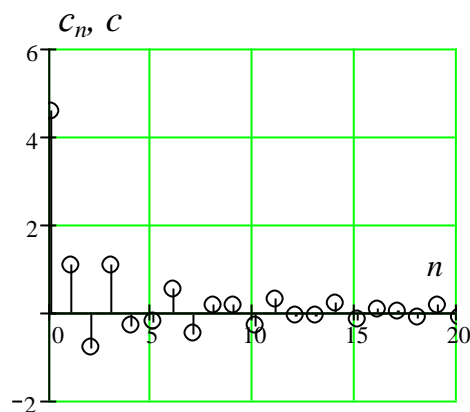
б)

Рис. 3.12. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ (пацієнт 3 – чоловік з ризиком ішемічної хвороби серця) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.



а)



б)

Рис. 3.13. Результати розкладу оцінки математичного сподівання КІГ (пацієнт 4 – молодий спортсмен) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графіки оцінки математичного сподівання КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.

Враховуючи отримані вище результати розкладу оцінки математичного сподівання, математичну модель (2.1) можна записати у вигляді суми детермінованої складової, що представлена поліномом Чебишева, та стаціонарної лінійної випадкової послідовності:

Таблиця 3.1. Значення коефіцієнтів ортогональних розкладів оцінок математичного сподівання КІГ у системі базисних функцій Чебишева

Коефіцієнти ортогонального розкладу	Пацієнт 1	Пацієнт 2	Пацієнт 3	Пацієнт 4
1	4,12	4,39	4,67	4,58
2	0,36	0,67	0,28	1,06
3	0,26	-0,44	0,24	-0,82
4	0,26	0,94	0,41	1,09

$$\xi(\omega, k) = \sum_{n=0}^N \left[c_n \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+j}{j} \frac{k^{[j]}}{K^{[j]}} \right] + \sum_{i=-\infty}^k \varphi(k-i) \cdot \nu(\omega, i), \quad \omega \in \Omega, \quad k = \overline{1, K} \quad (3.21)$$

де c_n - коефіцієнти ряду Чебишева;

$k^{[j]}$ - узагальнений степінь;

$\varphi(k-i)$, $k = \overline{1, K}$, $i \in \mathbf{Z}$ - ядро лінійної випадкової послідовності;

$\nu(\omega, i)$, $\omega \in \Omega$, $i \in \mathbf{Z}$ - дискретний білий шум з нульовим математичним сподіванням.

Оскільки для необхідної точності діагностування за детермінованою складовою, як було встановлено, достатньо 4 коефіцієнти ряду, то перший доданок в формулі (3.21) можна наближено замінити сумою чотирьох перших поліномів Чебишева:

$$\begin{aligned} t_0(k, K) &= 1, \\ t_1(k, K) &= 1 - 2 \frac{k}{K}, \\ t_2(k, K) &= 1 - 6 \frac{k}{K} + 6 \frac{k(k-1)}{K(K-1)}, \\ t_3(k, K) &= 1 - 12 \frac{k}{K} + 30 \frac{k^{[2]}}{K^{[2]}} - 20 \frac{k^{[3]}}{K^{[3]}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.1.2. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм при аналізі стохастичної складової їх математичної моделі. Випадковий характер КІГ відображається другим доданком моделі

(2.1), а саме лінійною випадковою послідовністю, яку можна знайти як різницю між процесом $\xi(\omega, k)$ та його оцінкою математичного сподівання $\hat{f}(k)$:

$$\xi_1(\omega, k) = \xi(\omega, k) - \hat{f}(k), \quad \omega \in \Omega, \quad k = \overline{1, K}. \quad (3.23)$$

Приклад отриманої стаціонарної лінійної випадкової послідовності представлений на рисунку 3.14.

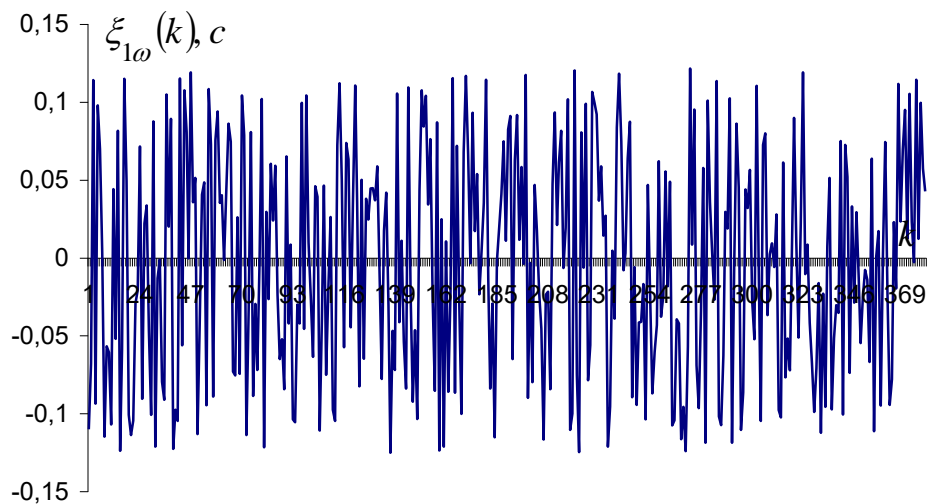


Рис. 3.14. Реалізація стаціонарної лінійної випадкової послідовності.

Діагностичні ознаки за стаціонарною лінійною випадковою послідовністю (3.23) можна будувати на основі аналізу гістограми розподілу КІГ та її кореляційної функції.

3.1.2.1. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм за щільністю розподілу. Як показали результати роботи [69], структура гістограми розподілу стаціонарної компоненти КІГ є чутливим індикатором стану пацієнта, тому її можна використовувати при діагностиці КІГ.

Приклад гістограм для різних пацієнтів наведено на рисунках 3.15 та 3.16.

Для зменшення простору діагностичних ознак (зведення їх до кількох коефіцієнтів) за щільністю розподілу скористаємося згладжуванням гістограм кривими Пірсона [33]. Загальна ідея методу кривих Пірсона полягає в побудові кривої розподілу, форма та область визначення якої залежить від даних про розподіл випадкової величини (чи ергодичної випадкової послідовності). Тобто, можна підібрати параметри закону розподілу, що найбільш адекватно описує ймовірнісний характер досліджуваного сигналу, який спостерігається в статистичних дослідженнях та експериментах.

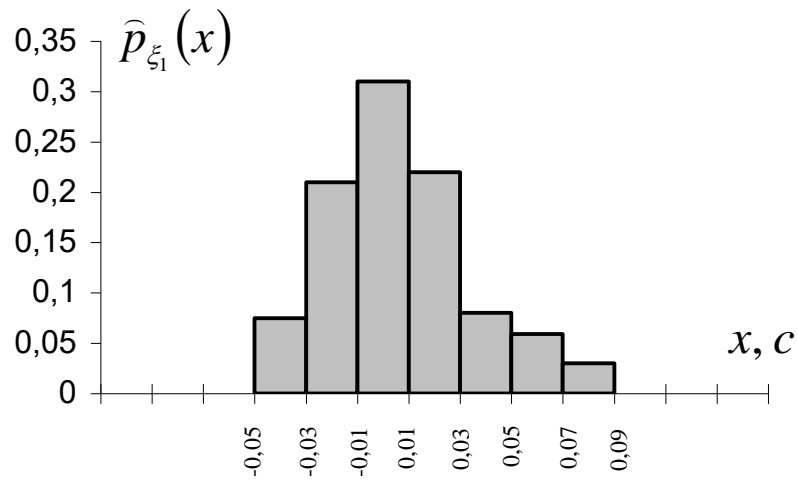


Рис. 3.15. Гістограма стаціонарної компоненти КІГ (пацієнт 1).

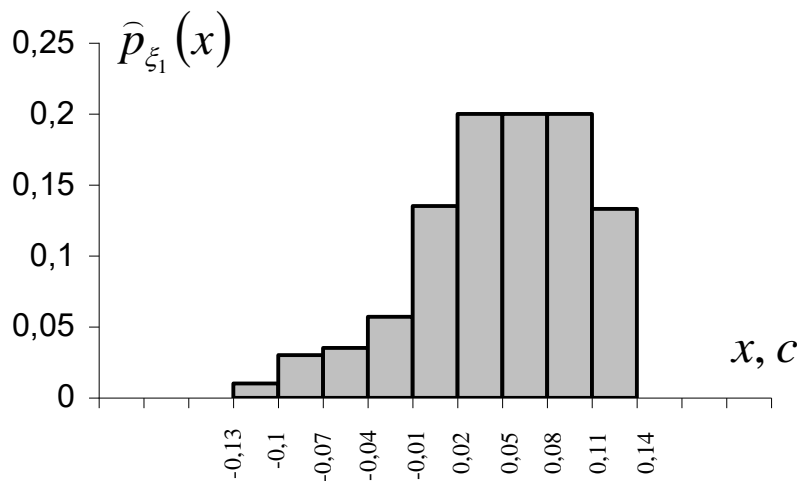


Рис. 3.16. Гістограма стаціонарної компоненти КІГ (пацієнт 2).

Метод кривих Пірсона заснований на твердженні, що функція щільності будь-якого неперервного розподілу $f(x)$ задовольняє диференціальне рівняння [33, 93]:

$$\frac{df(x)}{dx} = -f(x) \frac{a + x}{b_0 + b_1x + b_2x^2}, \quad (3.24)$$

де коефіцієнти a , b_i , $i=0,1,2$ однозначно задаються значеннями перших чотирьох моментів розподілу та визначаються з системи:

$$\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{r-2}, \\ b_1 = \frac{\mu_3(r+2)}{2(r-2)}, \\ b_2 = \frac{\mu_2(r+1)}{2(r-2)}, \end{cases} \quad (3.25)$$

де

$$r = \frac{6 \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} - 1 \right)}{3 \cdot \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} - 2 \cdot \frac{\mu_4}{\mu_2^2} + 6}, \quad (3.26)$$

а центральні моменти μ_i , $i=2,3,4$ оцінюються за вибіркою з використанням відомих в математичній статистиці формул.

Загальний інтеграл рівняння (3.24) має вигляд:

$$f(x) = y_0 \cdot \exp \left[- \int \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} dx \right]. \quad (3.27)$$

Конкретний вигляд інтегралу в (3.27) залежить від характеру коренів рівняння

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0. \quad (3.28)$$

Мають місце три практично значимих випадки.

Випадок 1 (крива Пірсона першого типу). Рівняння (3.28) має дійсні корені різних знаків. Цьому випадку відповідає крива Пірсона наступного вигляду:

$$f(x) = y_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{m_1} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{m_2}. \quad (3.29)$$

Крива визначена в межах $-a_1 = x_{\min} - \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} < x < x_{\max} - \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = a_2$. Інші параметри кривої визначаються з наступних рівнянь:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{2\left(a_1 + \bar{x} - \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}\right)(r-2)}{\sigma \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}(r+2)^2 + 16(r+1)}}, \\
m_2 &= \frac{2\left(a_2 - \left(\bar{x} - \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}\right)\right)(r-2)}{\sigma \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}(r+2)^2 + 16(r+1)}}, \\
y_0 &= \frac{1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2}} \cdot \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + 2)}{\Gamma(m_1 + 1)\Gamma(m_2 + 1)}, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

де $\Gamma(\bullet)$ - гамма-функція.

Випадок 2 (крива Пірсона четвертого типу). Рівняння (3.28) має комплексно-спряжені корені. Цьому випадку відповідає крива Пірсона наступного вигляду:

$$f(x) = y_0 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m \cdot e^{-v \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}. \tag{3.31}$$

Крива є асиметричною та визначена для всіх дійсних x . Параметри кривої визначаються зі співвідношень:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{-16(r+1) - \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}(r+2)^2}, \\
m &= \frac{2-r}{2}, \\
v &= \frac{r(r+2) \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}}}{\sqrt{-16(r+1) - \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}(r+2)^2}}, \\
y_0 &= \frac{1}{a \cdot e^{-\frac{v\pi}{2}} \cdot \int_0^\pi e^{v\pi} \cdot \sin^{-\gamma} \varphi \, d\varphi}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Випадок 3 (крива Пірсона шостого типу). Рівняння (3.28) має дійсні корені одного знаку. Цьому випадку відповідає крива Пірсона наступного вигляду:

$$f(x) = y_0 \cdot (x - a)^{m_1} \cdot x^{-m_2}. \quad (3.33)$$

Параметри кривої визначаються зі співвідношень:

$$a = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} (r + 2)^2 + 16(r + 1)},$$

де знак a співпадає зі знаком μ_3 ,

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ -m_2 \end{matrix} \right\} = \frac{r - 2}{2} \pm \frac{r(r + 2)}{2} \sqrt{\frac{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}}{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} (r + 2)^2 + 16(r + 1)}},$$

$$m_2 > m_1 + 1,$$

$$y_0 = \frac{a^{m_2 - m_1 - 1} \cdot \Gamma(m_2)}{\Gamma(m_2 - m_1 - 1) \cdot \Gamma(m_1 + 1)}. \quad (3.34)$$

Отже, опис гістограми за допомогою кривих Пірсона суттєво зменшує кількість діагностичних ознак, яка дорівнює кількості параметрів кривої Пірсона.

Для вирішення задачі зменшення діагностичних ознак, отриманих за щільністю розподілу, побудуємо гістограми розподілу та згладимо їх за допомогою кривих Пірсона.

Значення отриманих експериментально коефіцієнтів b_i , $i = 0, 1, 2$, а також значення коренів рівняння (3.28), в залежності від яких будувалися відповідні типи кривої розподілу, наведено в таблиці 3.2.

Як видно з таблиці 3.2, для кожного з пацієнтів коефіцієнти b_i , $i = 0, 1, 2$ набули різних значень. Тому можна запропонувати їх використання в якості діагностичних ознак за функцією щільності розподілу КІГ при фізичних навантаженнях. Отримані значення коренів рівняння (3.28) є дійсними числами різних знаків для двох пацієнтів (умовно здорових людей різної статі). Тому для побудови кривих Пірсона вибираємо криві першого типу.

Таблиця 3.2. Значення коефіцієнтів a та b_i , $i = 0,1,2$
та коренів рівняння (3.28)

	Пацієнт 1	Пацієнт 2
a	-0,027928408	0,018598447
b_0	-0,001218221	0,001249653
b_1	-0,027928408	0,018598447
b_2	-0,407330101	-0,108325226
x_1	0,098827	-0,05165
x_2	-0,03026	0,223343

Графіки гістограм стаціонарної компоненти КІГ в період фізичного навантаження та отримані криві Пірсона подано на рис. 3.17 та 3.18.

Як видно з візуальної оцінки рис. 3.17 та 3.18, отримані криві $f(x)$ добре описують щільність розподілу стаціонарної компоненти КІГ при фізичних навантаженнях. Для точної оцінки адекватності підібраної кривої скористаємося критерієм згоди χ^2 [37, 40, 41, 120].

Результати розрахунків за критерієм показали, що розбіжність емпіричних (визначених за гістограмою) та теоретичних (визначених з кривої Пірсона) частот незначне. Іншими словами, немає причин заперечувати правильність підібраної кривої Пірсона.

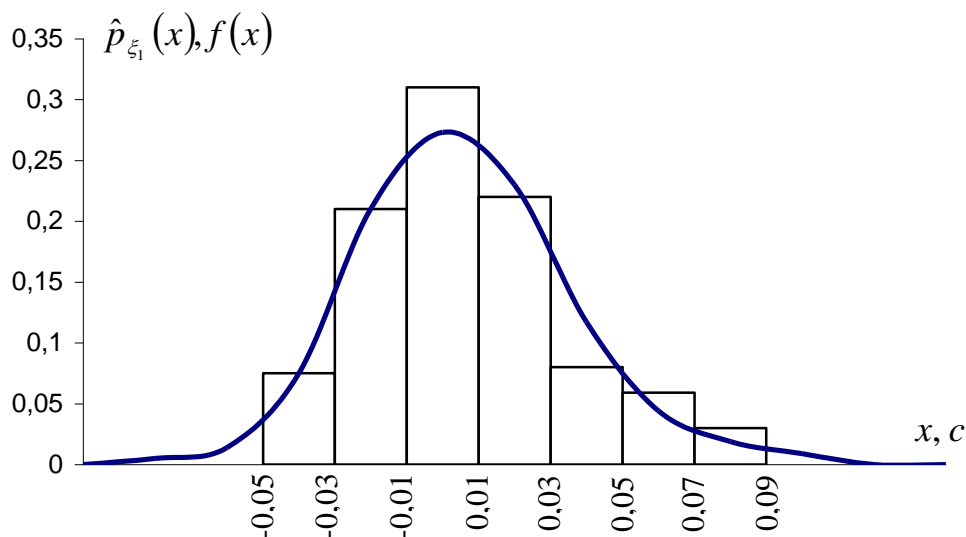


Рис. 3.17. Гістограми стаціонарної компоненти кардіоінтервалограми та застосовані криві Пірсона для оцінок розподілу цієї компоненти (пацієнт 1).

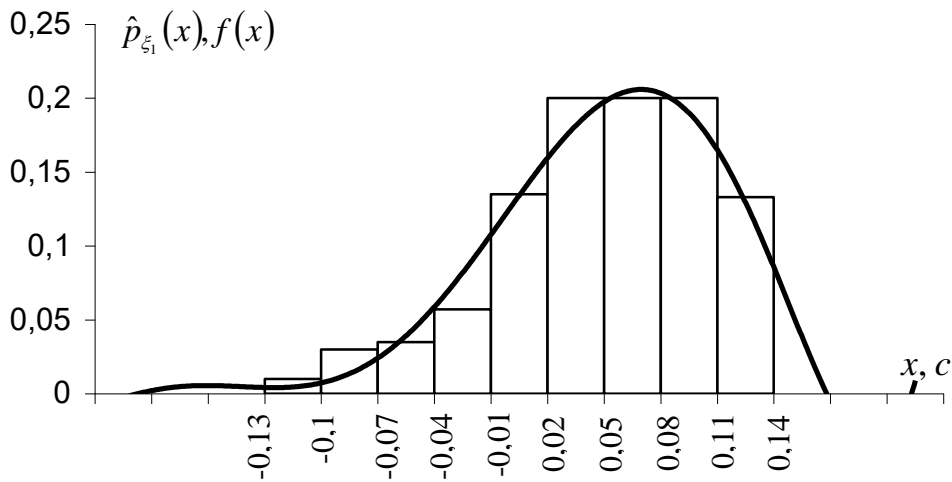


Рис. 3.18. Гістограми стаціонарної компоненти кардіоінтервалограми та застосовані криві Пірсона для оцінок розподілу цієї компоненти (пацієнт 2).

Отже, перейшовши в оцінюванні діагностичних ознак КІГ за функцією щільності розподілу від побудови гістограми до згладжування її за допомогою побудови кривих Пірсона, було зменшено розмірність простору діагностичних ознак до чотирьох параметрів диференціального рівняння (3.28), що повністю характеризують розподіл стаціонарної компоненти КІГ (3.23).

3.1.2.2. Діагностичні ознаки та методи статистичного оцінювання кардіоінтервалограм за кореляційною функцією. Однією з характеристик, а отже й діагностичних ознак за КІГ, стаціонарної лінійної випадкової послідовності є кореляційна функція, яку можна оцінити таким чином:

$$\hat{R}_{\xi}(k) = \hat{R}_{\xi_1}(k) = \frac{1}{K-n-1} \cdot \sum_{k=0}^{K-n} \xi(\omega, k) \cdot \xi_1(\omega, n+k), \quad k = \overline{1, K}, \quad n = \text{const} \ll K. \quad (3.35)$$

Для зменшення діагностичного простору за оцінкою кореляційної функції КІГ розкладемо $\hat{R}_{\xi}(k), k = \overline{1, K}$ в тригонометричному базисі та в ряди за дискретними ортогональними поліномами (Кравчука, Лагера та Чебишева):

$$\hat{R}_{\xi}(k) \approx \sum_{n=0}^M r_n \cdot \varphi_n(k), \quad k = \overline{1, K}, \quad M+1 \ll K, \quad (3.36)$$

де $\{r_n, n = \overline{0, M}\}$ – спектральні коефіцієнти оцінки кореляційної функції $\hat{R}_{\xi}(k), k = \overline{1, K}$ в ортогональному базисі $\{\varphi_n(k), n = \overline{0, M}, k = \overline{1, K}\}$.

За діагностичні ознаки адаптивно-регулятивних можливостей організму людини за оцінкою кореляційної функції КІГ при фізичних навантаженнях прийемо коефіцієнти розкладу тієї базисної функції, яка дозволить

апроксимувати оцінку кореляційної функції з однаковою точністю, але меншою кількістю коефіцієнтів у порівнянні з усіма іншими базисними функціями.

Приклади розкладів оцінок кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ (для здорової людини) наведені на рисунках 3.19–3.23.

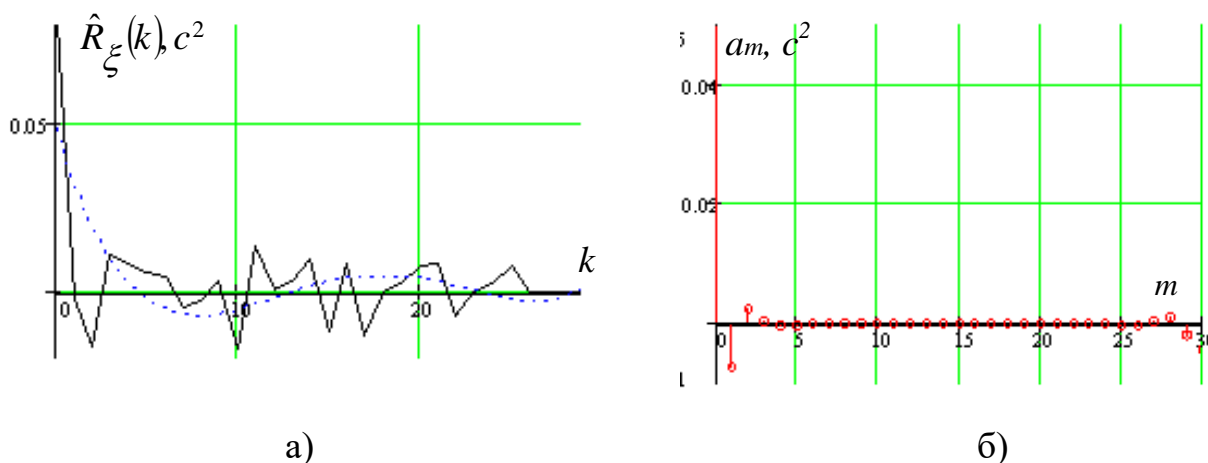


Рис. 3.19. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ в ряд за поліномами Кравчука:
 а) графіки оцінки кореляційної функції (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Кравчука.

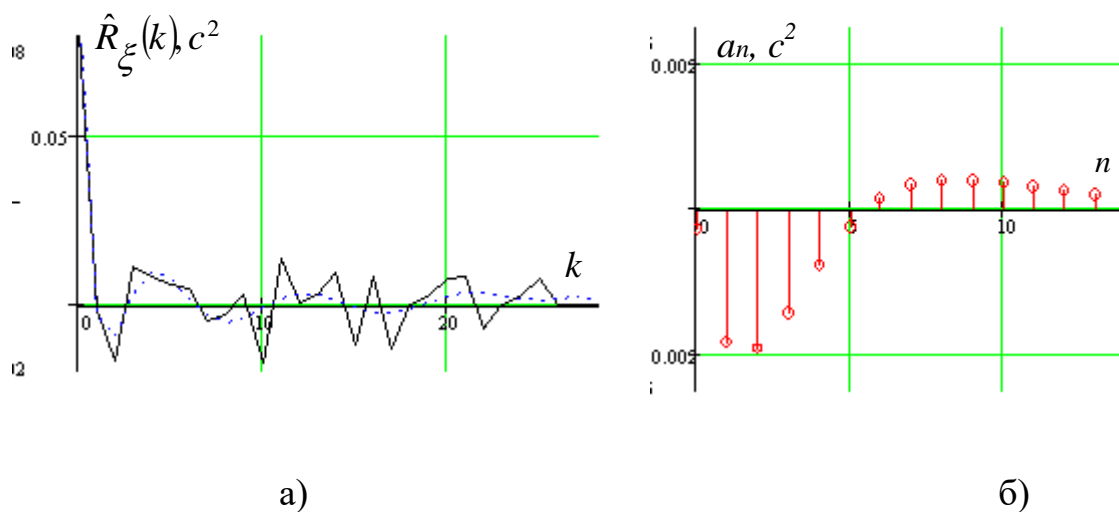
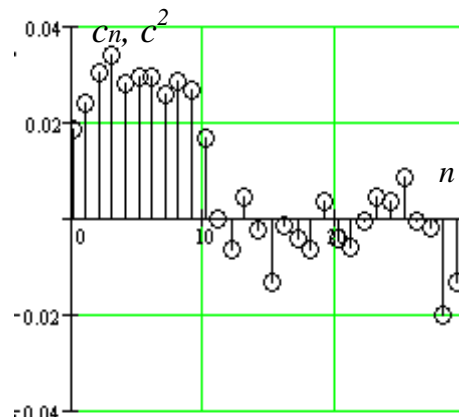
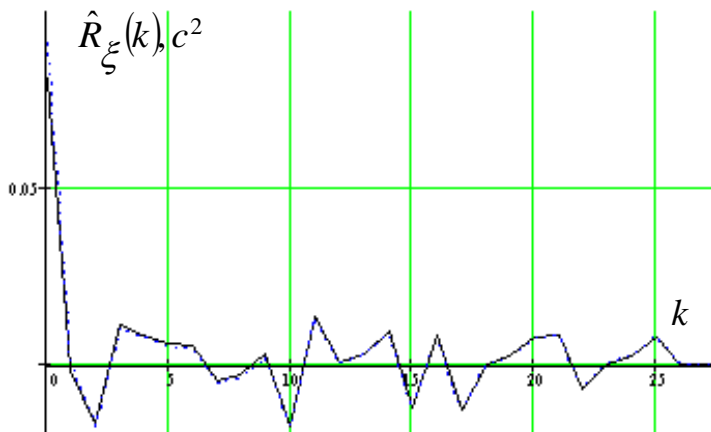


Рис. 3.20. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ в ряд за поліномами Лагера:
 а) графіки оцінки кореляційної функції (суцільна лінія) та її апроксимація (пунктирна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Лагера.

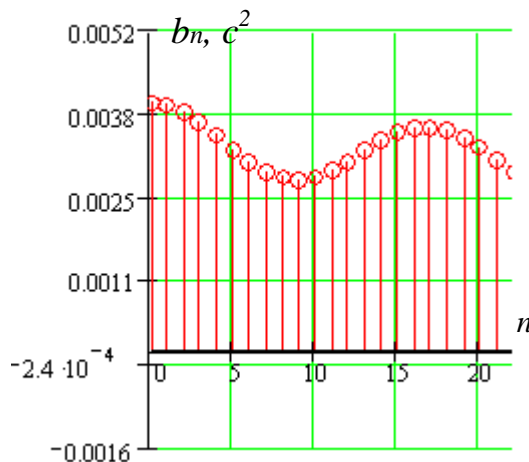
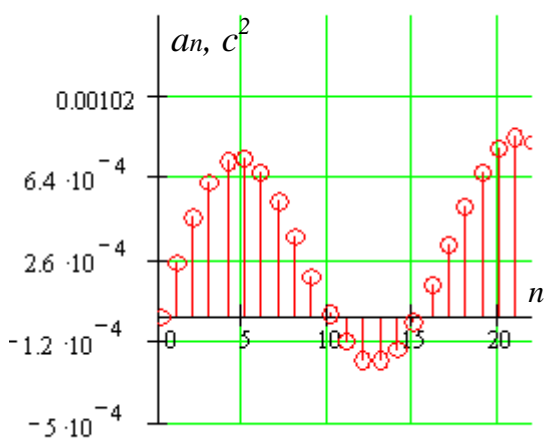


а)

б)

Рис. 3.21. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графіки оцінки кореляційної функції КІГ (пунктирна лінія) та її апроксимація (суцільна лінія),
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.



а)

б)

Рис. 3.22. Спектри коефіцієнтів розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ в ряд за тригонометричними функціями:

- а) косинусні складові,
 б) синусні складові.

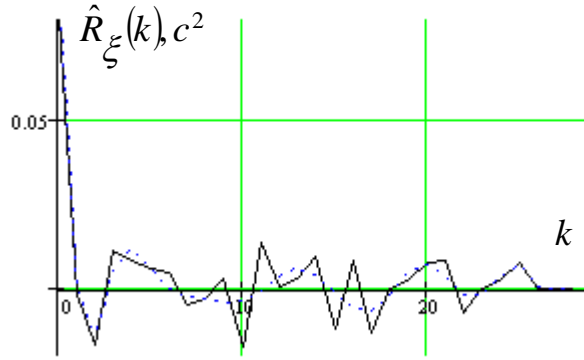


Рис. 3.23. Графіки оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ (суцільна лінія) та її апроксимація (пунктирна лінія) в тригонометричному базисі.

Залежність долі енергії сигналу від кількості коефіцієнтів розкладу наведена на рисунку 3.24, який показує, що для апроксимації оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ з точністю 95% необхідно 15 коефіцієнтів розкладу за функціями Чебишева, 17 – за тригонометричними функціями, 23 – за функціями Лагера, 25 – за функціями Кравчука.

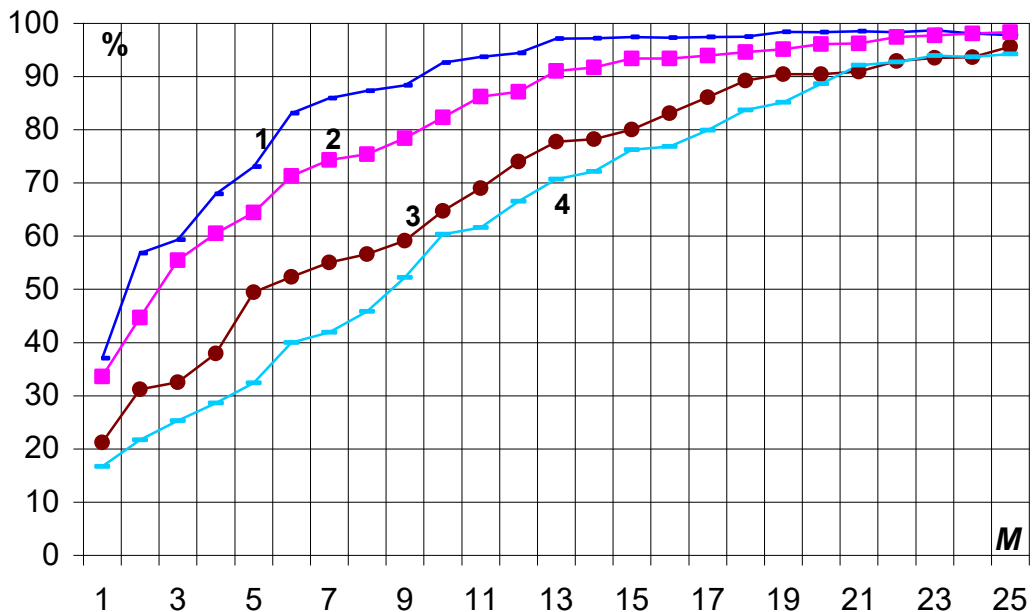


Рис. 3.24. Залежність долі енергії сигналу від кількості коефіцієнтів розкладу:
 1 – за функціями Чебишева;
 2 – за тригонометричними функціями;
 3 – за функціями Лагера;
 4 – за функціями Кравчука.

Отже, встановлено, що найменша кількість коефіцієнтів використовується при розкладі функції $\hat{R}_\xi(k)$, $k = \overline{1, K}$ в ряд за дискретними ортогональними поліномами Чебишева. Таким чином, в якості діагностичних ознак за оцінкою кореляційною функцією приймаємо коефіцієнти її розкладу за поліномами Чебишева.

Результати розкладу оцінок кореляційних функцій за поліномами Чебишева для чотирьох пацієнтів, що різняться за віком, статтю та станом здоров'я наведені в на рисунках 3.25-3.28, а значення перших п'ятнадцяти коефіцієнтів – діагностичних ознак – в таблиці 3.3.

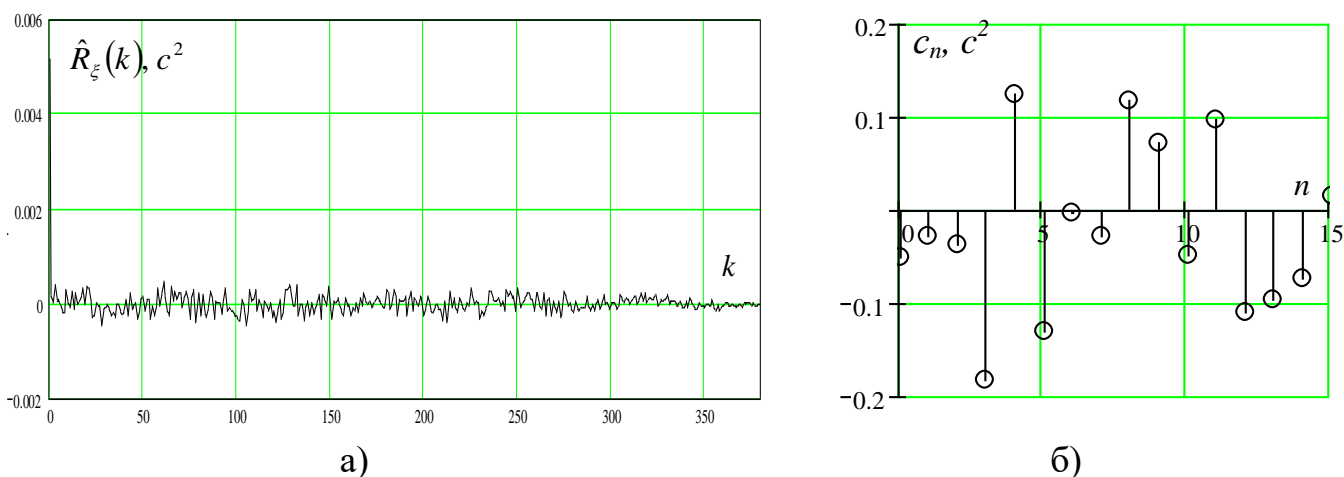


Рис. 3.25. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ (пацієнт 1 – чоловік з ризиком ішемічної хвороби серця) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графік оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ,
- б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.

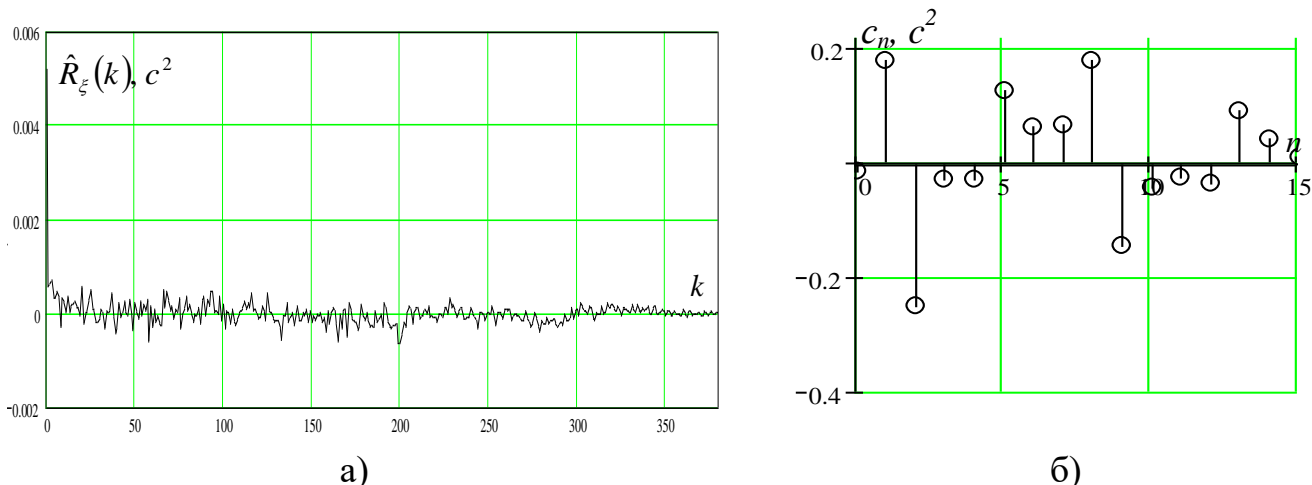
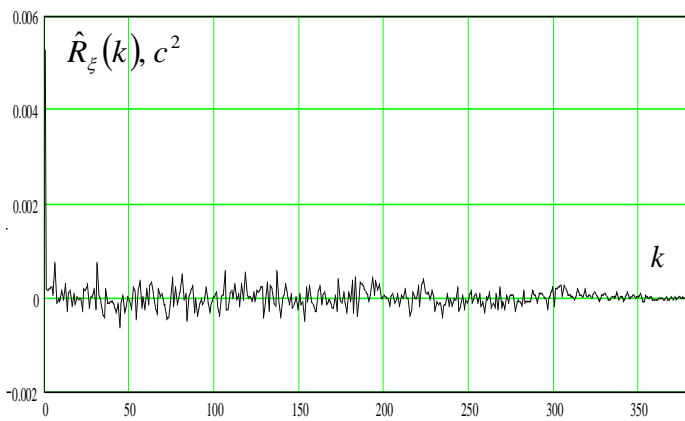
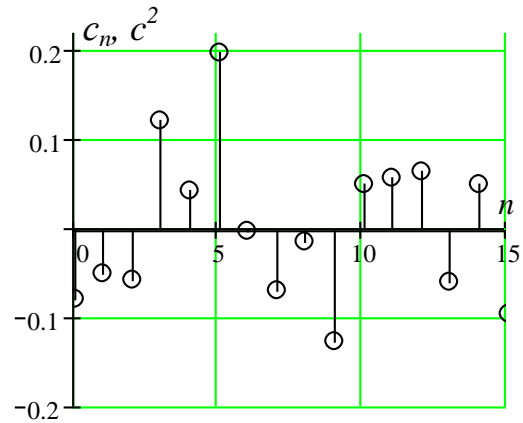


Рис. 3.26. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ (пацієнт 2 – здорова молода дівчина) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графік оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ,
- б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.



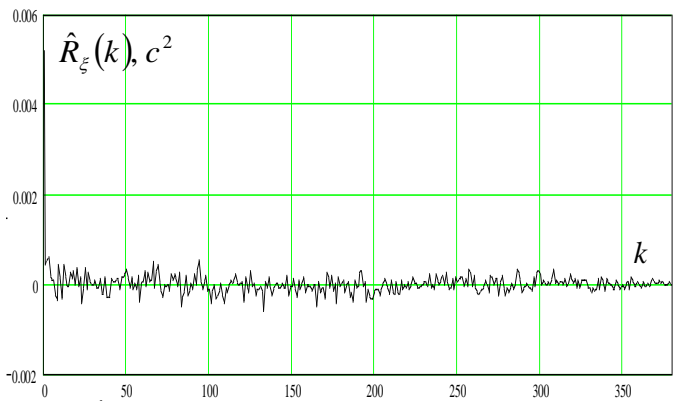
а)



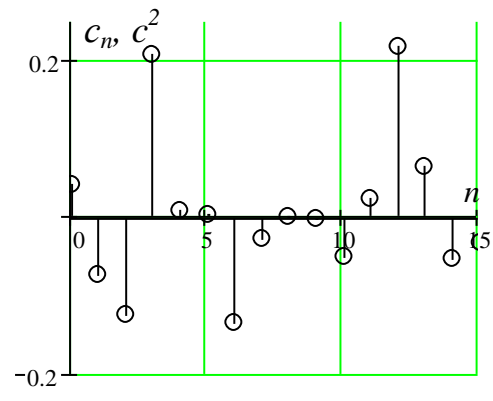
б)

Рис. 3.27. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ (пацієнт 3 – чоловік з ризиком ішемічної хвороби серця) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графік оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ ,
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.



а)



б)

Рис. 3.28. Результати розкладу оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ (пацієнт 4 – молодий спортсмен) в ряд за поліномами Чебишева:

- а) графік оцінки кореляційної функції стаціонарної компоненти КІГ ,
 б) спектр коефіцієнтів в базисі Чебишева.

Таблиця 3.3. Значення коефіцієнтів ортогональних розкладів оцінок кореляційних функцій КІГ у системі базисних функцій Чебишева

Коефіцієнти ортогонального розкладу	Пацієнт 1	Пацієнт 2	Пацієнт 3	Пацієнт 4
1	-0,0523	-0,014	-0,081	0,04
2	-0,0283	0,18	-0,052	-0,072
3	-0,0386	-0,25	-0,0576	-0,122
4	-0,183	-0,0273	0,12	0,206
5	0,123	-0,0274	0,042	0,0091
6	-,131	0,129	0,197	0,008
7	-0,0042	0,0636	-0,0026	0,134
8	-0,0248	0,065	-0,0713	0,0273
9	0,116	0,18	-0,013	0,0016
10	0,0713	-0,143	-0,126	-0,0019
11	-0,0489	-0,0424	0,0489	-0,092
12	0,0954	-0,0222	0,0558	0,024
13	-0,111	-0,0377	0,063	0,217
14	-0,097	0,09	0,061	0,0650
15	-0,0729	0,0434	0,0489	-0,0527

3.2. Методи приймання рішень при діагностиці за кардіоінтервалограмою

Зрозуміло, що кожен нормальний чи патологічний стан пацієнта буде характеризуватися певними значеннями діагностичних ознак. Тому, важливим етапом розробки діагностичної системи має бути побудова так званих діагностичних просторів ("навчання" діагностичної системи). Основним завданням "навчання" є встановлення відповідності між конкретною патологією та областю значень діагностичних ознак. Така відповідність встановлюється шляхом набору та аналізу статистичного матеріалу, отриманого при обстеженні великої кількості пацієнтів із наперед відомими патологіями.

В даній монографії ми не будемо торкатися цього етапу, оскільки він вимагає знань та досвіду спеціалістів-медиків. Завданням даної роботи полягає у побудові математичної моделі, запропонуванні методів опрацювання КІГ на основі нової математичної моделі та вибору діагностичних ознак (характеристик моделі), але, щоб звести діагностичну систему до єдиного цілого, наведемо деякі можливі підходи до вибору правил прийняття рішень при діагностиці.

Після проведення етапу навчання кожна патологія чи норма буде характеризуватися відповідною їй сукупністю коефіцієнтів ортогонального розкладу оцінки математичного сподівання та оцінки кореляційної функції в ряд за ортогональними дискретними поліномами Чебишева та параметрів кривих Пірсона, що характеризують щільність розподілу. Звісно, в процесі дослідження медици можуть відкинути якийсь клас діагностичних ознак. Тому виникає необхідність в розробці методів прийняття діагностичних рішень, які дозволяють прийняти статистичні гіпотези окремо для кожного комплексу діагностичних ознак.

Оскільки кожен клас запропонованих діагностичних ознак являє собою деякий вектор, тому наведемо загальний підхід до діагностики адаптивно-регулятивних можливостей організму на основі КІГ.

Задачу діагностики можна звести до перевірки гіпотез про один параметр або сукупності параметрів одновимірної або багатовимірної функції розподілу випадкової величини [4, 7, 10, 45, 54, 93, 108, 122].

Для проведення діагностування введемо наступні позначення. Через $\Xi_m = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_m)$ позначимо вектор випадкових величин, кожна з компонент якого $\xi_i, i = \overline{1, m}$ являє собою відповідний інформаційний параметр. У цьому випадку реалізацією вектора Ξ_m буде матриця

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_i^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ \xi_1^{(k)}, \dots, \xi_i^{(k)}, \dots, \xi_m^{(k)} \\ \dots\dots\dots \\ \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

де Ξ_m^k – апріорний вектор випадкових величин в k -му експерименті.

$\mathbf{X} = \|x_{j,k}\|, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}$ – матриця реалізацій (апріорна матриця), кожен рядок якої відповідає одному експерименту, кількість рядків – кількості експериментів, кількість стовпчиків – кількості інформаційних параметрів.

Компоненти ξ_i вектора Ξ_m відповідають нормальному закону розподілу, що підтверджується результатами експериментів.

Позначимо середнє значення вектора Ξ_m через $\bar{\Theta}$:

$$\bar{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_i, \dots, \Theta_m), \quad (3.38)$$

де $\Theta_i = M\xi_i$.

Позначимо кореляційну матрицю, компонент цього ж вектора Ξ_m через

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11}, \dots, r_{1i}, \dots, r_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{i1}, \dots, r_{ii}, \dots, r_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{m1}, \dots, r_{mi}, \dots, r_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

де $r_{ij} = M\{\xi_i, \xi_j\}$, $i, j = \overline{1, m}$.

На основі наведених позначень щільність розподілу Ξ_m має вигляд [63,89]

$$p(Y) = \frac{|\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y - \Theta)^T \mathbf{R}^{-1}(Y - \Theta)\right], \quad (3.40)$$

де \mathbf{R} – кореляційна матриця (3.39);

Y – аргумент щільності розподілу, яка при дослідженні конкретних реалізацій буде приймати їх значення.

При проведенні діагностування конкретних пацієнтів математичне сподівання вектора Ξ_m приймає конкретні значення, це фактично визначає (ідентифікує) захворювання.

Для нормального (здорового) пацієнта введемо вектор $\bar{\Theta}^{(0)} = (\Theta_1^{(0)}, \dots, \Theta_i^{(0)}, \dots, \Theta_m^{(0)})$. Відповідно при наявності певного захворювання $\bar{\Theta}^{(1)} = (\Theta_1^{(1)}, \dots, \Theta_i^{(1)}, \dots, \Theta_m^{(1)})$.

При дослідженні пацієнта на наявність захворювання будемо висувати дві гіпотези.

$$\begin{aligned} H_0 & \text{ – параметр в (3.44): } \Theta = \bar{\Theta}^{(0)}, \\ H_1 & \text{ – параметр в (3.44): } \Theta = \bar{\Theta}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

де $\bar{\Theta}^{(0)} \neq \bar{\Theta}^{(1)}$.

Надалі гіпотезу H_0 будемо називати основною, а гіпотезу H_1 – конкуруючою.

Для прийняття рішення про правильність однієї з гіпотез використаємо теорію, що була запропонована Нейманом й Пірсоном та базується на аналізі логарифма відношення правдоподібності.

Суть методу Неймана-Пірсона полягає у виборі на множині допустимих значень деякого порога C , для якого при заданому обмеженні ймовірності помилки першого роду $\alpha \leq \alpha_0$ мінімізується значення помилки другого роду [36, 48, 59, 77, 117].

Функція $p(\Xi_m)$, отримана із (3.40) заміною випадкового аргументу Y на випадковий вектор Ξ_m , називається функцією правдоподібності [8, 77, 117].

Вона приймає випадкові значення, як функція випадкового вектора $\Xi_m^{(k)}$, і залежить від невідомого векторного параметра Θ , тому будемо записувати його в вигляді $p(\Xi_m, \Theta) = p(\Xi_m)$.

Статистика

$$l(\Xi_m) = \frac{p(\Xi_m, \bar{\Theta}^{(1)})}{p(\Xi_m, \bar{\Theta}^{(0)})} \quad (3.42)$$

називається відношенням правдоподібності.

Позначимо через $\eta^{(n)}$ логарифм відношення правдоподібності

$$\eta^{(n)} = \ln \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{p(\Xi_m, \bar{\Theta}^{(1)})}{p(\Xi_m, \bar{\Theta}^{(0)})} \right\} = \sum_{k=1}^n \zeta^{(k)}, \quad (3.43)$$

де

$$\zeta^{(k)} = (\Xi_m^{(k)})^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)}) - \frac{1}{2} (\bar{\Theta}^{(1)} + \bar{\Theta}^{(0)})^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)}), \quad k = \overline{1, n};$$

$p(\Xi_m^{(k)}, \bar{\Theta}^{(1)})$ – функція правдоподібності для гіпотези H_1 ;

$p(\Xi_m^{(k)}, \bar{\Theta}^{(0)})$ – функція правдоподібності для гіпотези H_0 .

Елементи послідовності $\zeta^{(k)}, k = \overline{1, n}$ являють собою гаусові величини, кожна з яких лінійно залежить від компонент матриці (3.37). Тобто $\zeta^{(k)}, k = \overline{1, n}$ можна розглядати як дискретний білий шум або як скалярний гаусів випадковий процес з дискретним аргументом і незалежними значеннями [77].

Прийняття рішення, зв'язане з вибором однієї з гіпотез (3.41), характеризується ймовірностями помилок першого й другого роду.

Помилка першого роду виникає, коли відкидається основна гіпотеза H_0 , в тому випадку її ймовірність рівна

$$\alpha = P(H_1 | H_0), \quad (3.44)$$

де α – рівень значимості критерію.

Помилка другого роду виникає – приймається гіпотеза H_0 , коли вірна гіпотеза H_1

$$\beta = P(H_0 | H_1), \quad (3.45)$$

де $1 - \beta$ – потужність критерію.

Основним в задачі прийняття однієї з гіпотез є вибір на множині допустимих значень процесу $e^{\eta^{(n)}}$ порогу C , для якого при заданому значенні α , фіксованому об'єму вибірки n і найменшому β можна зробити висновок, що має місце гіпотеза H_0 при $\eta^{(n)} \leq \ln C$ і H_1 при $\eta^{(n)} > \ln C$.

Враховуючи (3.42) критерій прийняття гіпотези H_0 запишемо як

$$\tilde{\Xi}_m \mathbf{R}^{-1}(\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)}) \leq K, \quad (3.46)$$

а гіпотези H_1 – як

$$\tilde{\Xi}_m \mathbf{R}^{-1}(\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)}) > K \quad (3.47)$$

де

$$\tilde{\Xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\Xi_m^{(k)})^T = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_1^{(k)}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_m^{(k)} \right), \quad (3.48)$$

$\xi_i^{(k)}$ – елемент матриці (3.37).

Формули для розрахунку порогового значення K та об'єму вибірки n приведено з [77]:

$$K = \frac{k_2(U_\alpha - U_\beta)}{2(U_\alpha + U_\beta)} + \frac{1}{2}(\bar{\Theta}^{(1)} + \bar{\Theta}^{(0)}) \mathbf{R}^{-1}(\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)})^T, \quad (3.49)$$

$$n = \frac{U_\alpha + U_\beta}{\kappa_2}, \quad (3.50)$$

де

$$\kappa_2 = (\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)}) \mathbf{R}^{-1}(\bar{\Theta}^{(1)} - \bar{\Theta}^{(0)})^T, \quad (3.51)$$

де U_α, U_β – квантілі нормального розподілу.

Описаний вище критерій Неймана-Пірсона дозволяє розв'язувати задачу прийняття рішення тільки у випадку формування двох гіпотез (пацієнт здоровий, пацієнт хворий). У медичній практиці необхідно вивчати не тільки стан пацієнта, а й мати можливість визначити захворювання. Тобто необхідно формулювати $H_j, j = \overline{0, m}$ гіпотез.

При прийнятті рішення на основі однієї реалізації випадкового процесу виникають помилки, коли випадкова вибірка, яка спостерігається попадає в область X_k і приймається рішення γ_k , хоча має місце гіпотеза $H_i, i \neq k$.

Отже, прийняття рішення пов'язано з втратами на обробку спостережень для отримання правильних рішень, із втратами, коли рішення є помилковими.

Вказані втрати можна врахувати, ввівши функцію втрат. Ця функція кожній парі тверджень істина – прийняте рішення ставить у відповідність певну величину – плату за рішення. У випадку перевірки гіпотез $H_j, j = \overline{0, m}$ вводиться матриця втрат розміром $(m + 1) \times (m + 1)$, кожен елемент якої є платою за рішення.

Припустимо, що відомий повний комплект апіорних даних для задачі, яку розв'язуємо. Оскільки розмір вибірки фіксований, простір спостереження є n -вимірним евклідовим простором X^n , на якому задані дві щільності розподілу $p(x|H_0)$ і $p(x|H_1)$. Відомі апіорні ймовірності гіпотез H_0 і H_1 , де

$$p_0 = P\{H_0\} = 1 - P\{H_1\} = 1 - p_1. \quad (3.52)$$

Простір рішень Γ складається з двох елементів: γ_0 – прийняти гіпотезу H_0 , γ_1 – прийняти гіпотезу H_1 (відхилити H_0).

Матриця втрат

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{pmatrix}, \quad \Pi_{01} > \Pi_{00} \geq 0, \Pi_{10} > \Pi_{11} \geq 0, \quad (3.53)$$

де Π_{00}, Π_{11} – плата за прийняття правильного рішення,

Π_{01}, Π_{10} – плата за помилки першого роду $\gamma_1 \cap H_0$ і другого роду $\gamma_0 \cap H_1$.

Ймовірність помилки першого роду і другого роду:

$$\alpha = P\{\gamma_1|H_0\} = P\{x \in X_1|H_0\} = \int_{X_1} p(x|H_0) dx; \quad (3.54)$$

$$\beta = P\{\gamma_0|H_1\} = P\{x \in X_0|H_1\} = \int_{X_1} p(x|H_1) dx. \quad (3.55)$$

Ймовірність прийняття правильного рішення дорівнює $P\{\gamma_0|H_0\} = 1 - \alpha$ до одиниці.

Апіорні ймовірності рішень γ_0 і γ_1 згідно введених позначень мають вигляд

$$P\{\gamma_0\} = p_0 P\{\gamma_0|H_0\} + p_1 \{\gamma_0|H_1\} = p_0(1 - \alpha) + p_1 \beta; \quad (3.56)$$

$$P\{\gamma_1\} = p_0 P\{\gamma_1|H_0\} + p_1 \{\gamma_1|H_1\} = p_0(1 - \alpha) + p_1(1 - \beta), \quad (3.57)$$

де $p_1 \beta, p_0 \alpha$ – апіорні ймовірності помилок,

$p_0(1 - \alpha), p_1(1 - \beta)$ – апіорні ймовірності правильних рішень.

Згідно з [59], середній ризик запишемо у вигляді

$$R = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \Pi_{ij} p_j \int_{x_k} p(x|H_j) dx, \quad (3.58)$$

звідси

$$R = P_0 (\Pi_{00} P\{\gamma_0|H_0\} + \Pi_{0j} \{\gamma_1|H_0\}) + P_j \{\Pi_{10} P\{\gamma_0|H_1\} + \Pi_{11} P\{\gamma_1|H_1\}\}. \quad (3.59)$$

Вираз (3.59) представимо у вигляді

$$R = P_0 r_0 + P_1 r_1 \quad (3.60)$$

де $r_0 = \Pi_{00}(1-\alpha) + \Pi_{01}\alpha$, $r_1 = \Pi_{10}\beta + \Pi_{11}(1-\beta)$ – умовні ризики, які відповідають гіпотезам H_0 і H_1 .

Враховуючи сказане вище, представимо (3.60) у вигляді

$$R = P_0 \Pi_{00} + P_1 \Pi_{10} + P_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) \alpha - P_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) (1 - \beta). \quad (3.61)$$

Для зменшення ймовірності помилок першого роду необхідно зменшити до малого розміру критичну область X_1 , а це приведе до збільшення ймовірності помилок другого роду. Тому необхідно використати інший підхід.

Згідно з [59, 117] за критерій оптимальності алгоритму прийняття рішення приймаємо мінімальне значення середнього ризику.

Підставляючи (3.54) та (3.55) у вираз (3.61), отримаємо залежність середнього ризику R від вибору області X_1 у вибраному просторі:

$$R = P_0 \Pi_{00} + P_1 \Pi_{10} - \int_{X_1} [P_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) p(x|H_1) - P_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) p(x|H_0)] dx, \quad (3.62)$$

де $R = P_0 \Pi_{00} + P_1 \Pi_{10} \geq 0$.

Позначимо підінтегральний вираз наступним чином:

$$f(x) = P_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) W(x|H_1) - P_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) W(x|H_0). \quad (3.63)$$

Якщо розглянути будь-яку підмножину A множини X_1 при $f(x) \geq 0$, то виконується нерівність $\int_{X_1} f(x) dx \geq \int_A f(x) dx$. Отже, $\int_{X_1} f(x) dx$ досягає максимуму тоді й тільки тоді, коли в область інтегрування X_1 включаються всі точки виборочного простору, для яких підінтегральна функція $f(x) \geq 0$. Мінімальне значення середнього ризику досягається за умови, що в область X_1

включаються всі вибірки, для яких $f(x) \geq 0$, а в область X_0 – всі вибірки для яких $f(x) < 0$. Базуючись на сказаному вище, сформулюємо байєсівський алгоритм перевірки простої гіпотези H_0 проти простої альтернативи H_1 :

$$P_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})p(x|H_1) - P_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})p(x|H_0) \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{\geq}} 0 \quad (3.64)$$

або

$$l(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{>}} \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} \times \frac{P_0}{P_1}. \quad (3.65)$$

Байєсівський алгоритм полягає в порівнянні відношення правдоподібності $l(x)$ з порогом

$$C_0 = \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} \times \frac{P_0}{P_1}. \quad (3.66)$$

Відношення правдоподібності несе всю статистичну інформацію, яка міститься у вибірці, про гіпотези, що перевіряються. Інколи замість функції правдоподібності вигідно використовувати її логарифм.

При діагностуванні стану серцево-судинної системи за КІГ виникає необхідність у формулюванні $m+1$ гіпотез H_0, H_1, \dots, H_m і задача полягає у тому, щоб прийняти одну з гіпотез по вибірці фіксованого розміру n .

Для розв'язку даної, багато альтернативної задачі, так як і в попередньому випадку необхідно, щоб були задані щільності розподілу $p(x|H_k)$, $k = \overline{0, m}$. Крім того повинні бути відомі апіорні ймовірності гіпотез $P_k = P\{H_k\}$, $k = \overline{0, m}$,

$\sum_{k=0}^m P_k = 1$. Простір рішень Γ , складається з елементів γ_k , $k = \overline{0, m}$, де γ_k - рішення прийняти одну із гіпотез H_k . Простір X_m^n розділений на $(m+1)$

областей, які не перетинаються X_k , $k = \overline{0, m}$, $\bigcup_{k=0}^m X_k = X^n$. Кожен елемент

матриці $\Pi_{jk} \geq 0$ є плата за рішення γ_j , коли істина гіпотеза H_j .

Узагальнимо підхід, який використано вище, на даний випадок, і, не виводячи викладок, які наведено в [59], запишемо основні співвідношення, необхідні для прийняття рішення.

Враховуючи (3.58), запишемо

$$\sum_{i=1}^m (\Pi_{ij} - \Pi_{ik}) \frac{p_i p(x|H_1)}{p_0 p(x|H_0)} \geq \Pi_{0k} - \Pi_{0j}, j = \overline{0, m}, j \neq k, k = \overline{1, m}. \quad (3.67)$$

Вектор відношення правдоподібності у такому випадку має вигляд

$$l(x) = [l_1(x), \dots, l_m(x)], \quad (3.68)$$

де

$$l_k(x) = \frac{p(x|H_k)}{p(x|H_0)}, k = \overline{1, m} \quad (3.69)$$

Звідси (3.67) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^m (\Pi_{ij} - \Pi_{ik}) \frac{p_i}{p_j} l_i(x) \geq \Pi_{0k} - \Pi_{0j}, j = \overline{0, m}, j \neq k, k = \overline{1, m}. \quad (3.70)$$

Для реалізації байєсівського алгоритму необхідно вирахувати m -вимірний вектор відношення правдоподібності, який несе всю інформацію про гіпотези, які перевіряються.

3.4. Висновки до третього розділу

1. Обґрунтовано методи статистичного опрацювання КІГ, а саме: використання методу найменших квадратів для оцінювання математичного сподівання КІГ, а з використанням теорії статистичного оцінювання імовірнісних характеристик ергодичної відносно кореляційної функції та щільності розподілу випадкової послідовності, запропоновано метод оцінювання кореляційної функції та щільності розподілу.

2. Вибрані нові класи діагностичних ознак на основі запропонованої математичної моделі: чотири коефіцієнти розкладу оцінки математичного сподівання та п'ятнадцять коефіцієнтів розкладу оцінки кореляційної функції в ряди за ортогональними дискретними поліномами Чебишева та чотири параметри кривої Пірсона, що апроксимує щільність розподілу.

3. Побудований алгоритм прийняття рішень при діагностиці адаптивно-регулятивних механізмів організму людини по КІГ за вибраними діагностичними ознаками на основі критерію Неймана-Пірсона та критерію Байєса

РОЗДІЛ 4

КОМП'ЮТЕРНЕ ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КАРДІОІНТЕРВАЛОГРАМ ПРИ ФІЗИЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ ДЛЯ СИСТЕМ КАРДІОІНТЕРВАЛОМЕТРИЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ

В даному розділі розглянуто питання комп'ютерного імітаційного моделювання кардіоінтервалограм на базі лінійних випадкових послідовностей. Проведено серію експериментів по моделюванню кардіоінтервалограм. Розглянуто питання точності комп'ютерних моделюючих експериментів. Розроблено систему комп'ютерних програм для проведення імітаційних експериментів та обробки кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях на основі запропонованих у монографії методів.

Основні результати даного розділу опубліковані у роботах [21, 64].

4.1. Загальні підходи до імітаційного моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях

Задача імітаційного моделювання КІГ на ЕОМ є актуальною науково-технічною проблемою, вирішення якої дає змогу формувати тестові (еталонні) та навчаючі сигнали для тестування та навчання системи розпізнавання образів при автоматизованій комп'ютерній діагностиці адаптивно-регулятивних можливостей організму людини. Ефективність моделюючих алгоритмів КІГ суттєво визначається її математичною моделлю. Оскільки в даній роботі як математична модель КІГ використовується лінійна випадкова послідовність, що відноситься до класу конструктивно заданих математичних моделей, то цей факт дозволяє побудувати алгоритм її імітаційного моделювання [10].

Розглянемо основні принципи імітаційного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях.

Алгоритм комп'ютерного моделювання КІГ полягає в моделюванні нестационарного випадкового процесу:

$$\xi(\omega, k) = f(k) + \xi_1(\omega, k), \quad \omega \in \Omega, \quad k = \overline{1, K}, \quad (4.1)$$

що зводиться до імітації детермінованої складової $f(k)$, що зображається рядом на основі поліномів Чебишева у такому вигляді:

$$f(k) = \sum_{n=0}^N \left[c_n \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+j}{j} \frac{k^{[j]}}{K^{[j]}} \right], \quad k = \overline{1, K} \quad (4.2)$$

за визначеними за допомогою спектрального розкладу оцінки математичного сподівання в ряд за поліномами Чебишева коефіцієнтами $\{c_n, n = \overline{0, N}\}$ та

моделювання на основі методу Юла-Уокера стаціонарної лінійної випадкової послідовності:

$$\xi_1(\omega, k) = \sum_{i=-\infty}^k \varphi(k-i) \cdot \zeta(\omega, i), \quad \omega \in \Omega, \quad k = \overline{1, K}, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad (4.3)$$

де $\{\varphi(k-i), \quad k = \overline{1, K}, \quad i \in \mathbf{Z}\}$ – множина відліків імпульсної характеристики дискретної системи, а випадкова послідовність $\zeta(\omega, i)$ є дискретним білим шумом – процесом з некорельованими значеннями.

Лінійну випадкову послідовність (4.3) можна трактувати як відгук лінійної системи при впливі на її вхід дискретного білого шуму. Лінійну випадкову послідовність можна повністю задати, якщо відома послідовність відліків імпульсної реакції дискретної лінійної системи та одновимірний закон розподілу білого шуму [10].

Таким чином, початковою інформацією для імітаційного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях є послідовність коефіцієнтів $\{c_n, \quad n = \overline{0, N}\}$ при розкладі оцінки математичного сподівання КІГ за поліномами Чебишева та кореляційна функція КІГ:

$$R_\xi(k-l) = R_\xi(s), \quad s = k-l, \quad s = \overline{1, p}, \quad (4.4)$$

з якої за методом Юла-Уокера можна визначити послідовність відліків ядер $\{\varphi(k-i), \quad k = \overline{1, K}, \quad i \in \mathbf{Z}\}$ лінійної стаціонарної випадкової послідовності (4.3).

Для моделювання дискретної лінійної випадкової послідовності необхідно задатися ймовірнісними (статистичними) характеристиками дискретного білого шуму $\{\zeta(\omega, j), \quad j = \overline{-J, K}\}$.

Білим шумом з дискретним часом називається послідовність випадкових величин

$$\{\zeta(\omega, i), \quad \omega \in \Omega, \quad i \in \mathbf{Z}\}, \quad (4.5)$$

будь-які два різні значення якої незалежні (некорельовані) [10].

Базовим білим шумом називається білий шум, рівномірно розподілений на відріжку $[0,1]$, тобто послідовність (4.5), щільність розподілу якої

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases} \quad (4.6)$$

Існує декілька способів генерування базового білого шуму [23, 46, 107]: таблиці випадкових чисел, генератори випадкових чисел і так звані методи псевдовипадкових чисел.

Таблиці випадкових чисел містять реалізації дискретного базового білого шуму, що отримані раніше тим чи іншим способом, та містять близько 1000000 відліків реалізації рівномірного на $[0,1]$ дискретного базового білого шуму.

Генератором випадкових чисел називають певний технічний засіб, на виході якого можна спостерігати білий шум. Найчастіше для побудови генератора (давача) використовують “шумлячі” радіоелектронні прилади (діоди, стабілітрони, транзистори і т.д.). Один із можливих способів побудови давача білого шуму, рівномірно розподіленого на відрізок $[0,1]$, полягає в наступному. Нехай на виході шумлячого пристрою є лічильник, який через кожний фіксований проміжок часу Δt видає 0, якщо за цей проміжок кількість флуктуацій вихідного сигналу (наприклад напруги), що перевищили заданий рівень, парна, та видає 1, якщо така кількість непарна.

Якщо імовірність появи 0 і 1 в такому процесі рівні між собою, тобто $\zeta(v = 2k + 1) = \frac{1}{2}$, де k – невід’ємне число, то можна вважати, що пристрій генерує випадкову послідовність двійкових цифр.

Якщо m таких генераторів працюють паралельно і засилають випадкові нулі чи одиниці у всі двійкові розряди спеціальні комірки пам’яті, то через кожен проміжок часу Δt можна отримати m - розрядні двійкові дробові числа, які можна вважати реалізаціями випадкових величин ζ_i , рівномірно розподіленими на відрізок $[0,1]$.

Хоча на виході генераторів випадкових чисел спостерігається значення реальних сигналів, проте цей метод отримання реалізації білого шуму пов’язаний з певними технічними труднощами (числа, що генеруються, неможливо відтворити, необхідно утримувати та експлуатувати додаткові пристрої, які також потребують догляду і перевірки “якості” чисел, що генеруються з допомогою спеціальних тестів). Тому, маючи сучасні ЕОМ, для реалізації дискретного базового білого шуму в ряді випадків вигідно використовувати методи псевдовипадкових чисел.

Методи псевдовипадкових чисел – це різні способи реалізації білого шуму (або послідовностей незалежних випадкових величин) отриманих за допомогою певних арифметичних алгоритмів:

1. Метод середніх квадратів. Це є перший алгоритм отримання псевдовипадкових чисел запропонований Дж. Нейманом. Основна його ідея полягає у виділенні середніх розрядів квадратів певних чисел. Кожний наступний елемент послідовності випадкових чисел утворюється з попереднього наступним чином. Нехай число ξ_i належить проміжку $(0,1)$ і має вигляд $2n$ - розрядного десяткового дробу, тобто

$$\xi_i = 0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}, \quad (4.7)$$

а квадрат цього числа – $\xi_i^2 = 0, b_1, b_2, \dots, b_{4n}$ – десяткове дробове $4n$ - розрядне число. Вибравши $2n$ середніх розряди цього числа, наступним членом псевдовипадкової послідовності візьмемо число

$$\xi_{i+1} = 0, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{3n}, \quad (4.8)$$

і т.д.

2. Метод лишків. Метод лишків ще називають мультиплікативним методом. Основна його ідея полягає в утворенні за певним рекурентним співвідношенням допоміжної послідовності цілих чисел, з якої утворюється базова послідовність.

Допоміжна послідовність невід'ємних чисел $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ отримується за допомогою формули

$$x_{i+1} = \lambda x_i \pmod{M}, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

тобто x_{i+1} рівне залишку, отриманому при діленні числа λx_i на M , отже, $x_{i+1} > M$. Початкове число x_0 , а також множник λ вибираються взаємно простими з M , причому λ і M достатньо великі цілі числа.

Використовуючи тепер цілі числа послідовності (4.9), отримується послідовність

$$\xi_i = \frac{x_i}{M}, i = 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

яка буде реалізацією білого шуму, рівномірно розподіленого на відріжку $(0, 1)$.

Зауважимо, що довільна послідовність псевдовипадкових чисел отримується, наприклад, при $\lambda = 5^{17}$, $M = 2^{43}$.

Єдиним недоліком методів псевдовипадкових чисел є обмеженість їх кількості, яка проявляється в тому, що для кожної з отриманих послідовностей

$$\{\xi_i, i = 1, 2, \dots\} \quad (4.11)$$

існує своє число T , що $\{\xi_i = \xi_{i+T}, i = 1, 2, \dots\}$, тобто послідовність є періодичною. Множину чисел називають відрізком аперіодичності. При розрахунках рекомендують використовувати не більше ніж T чисел послідовності.

3. Метод збурень. Для збільшення відрізка аперіодичності застосовують різні способи. Один із них полягає в наступному. Нехай

$$\xi_{i+1} = \Phi(\xi_i), i = 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

$$\xi_{i+1} = F(\xi_i), i = 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

– два різних алгоритми отримання псевдовипадкових послідовностей.

Утворимо нову послідовність з використанням функцій $\Phi(\chi)$ і $F(\chi)$:

$$\begin{cases} \Phi(\xi_i), & i \neq 0(\text{mod } N), \\ F(\xi_i), & i = 0(\text{mod } N). \end{cases} \quad (4.14)$$

де $N < T_1, N < T_2, T_1$ і T_2 – періодичність послідовностей (4.12) та (4.13). Як видно з останнього виразу, для отримання псевдовипадкової послідовності майже весь час використовується формула $\xi_{i+1} = \Phi(\xi_i)$, і лише тоді, коли i кратне N , послідовність “збурюється” елементом $\xi_{i+1} = F(\xi_i)$. Тому цей метод називають методом збурень, а число N періодом збурень. Метод збурень збільшує довжину відрізка аперіодичності. Але необхідно застерегти користувачів від некритичного застосування того чи іншого з методів отримання псевдовипадкових послідовностей. Для отримання якісних послідовностей випадкових чисел, останні повинні перевірятися згідно з певних критеріїв. До найбільш важливих критеріїв (гіпотез) відносяться:

- перевірка базової послідовності (білого шуму) на незалежність;
- перевірка відповідності емпіричного закону розподілу базової послідовності заданому закону розподілу;
- перевірка базової послідовності на значення її імовірнісних характеристик (математичного сподівання, дисперсії і т.д.).

Отже, моделювання дискретних білих шумів полягає в генеруванні послідовності незалежних випадкових величин з заданими статистичними характеристиками [5, 10, 23, 46, 50, 58, 92, 95, 107, 119].

В загальному, моделювання реалізацій базового білого на основі методи формування псевдовипадкових чисел можна записати у вигляді рекурентного співвідношення для його відліків:

$$\alpha_\omega(k+1) = \mathbf{G}[\alpha_\omega(k)], \quad (4.15)$$

де $\mathbf{G}[\cdot]$ – оператор, що відображає конкретний алгоритм перетворення за одним із методів формування псевдовипадкових чисел.

Необхідним елементом статистичного моделювання є перевірка якості в статистичному сенсі послідовності значень базового білого шуму. Такими перевірками реалізацій базового білого шуму є: перевірка на некорельованість, періодичність, відповідність заданому типу функції розподілу ймовірностей.

Наведемо моделюючий алгоритм білого шуму з гауссівською функцією розподілу більш детально.

Означення 4.1. Дискретним білим шумом $\{\zeta(\omega, n), \omega \in \Omega, n \in \mathbf{N}\}$ з нормальною функцією розподілу називається послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин, для кожної з яких функція розподілу є нормальною, тобто має щільність розподілу вигляду:

$$p_{\zeta}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.16)$$

де a – математичне сподівання нормального білого шуму, σ^2 – його дисперсія.

Для моделювання на ЕОМ нормально розподіленої випадкової величини використаємо метод, в основі якого лежить гранична теорема Ліндеберга-Леві.

Теорема 4.1. Якщо випадкові величини $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ незалежні і мають одну й ту ж функцію розподілу з середнім μ і дисперсією σ^2 , то при $k \rightarrow \infty$ сума

$$\zeta^{(k)} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \quad (4.17)$$

збігається до випадкової величини з нормальним законом розподілу $N(\mu_k, \sigma_k)$, де $\mu_k = k\mu$, $\sigma_k = \sigma\sqrt{k}$.

Як наслідок, при $k \rightarrow \infty$ випадкова величина

$$z^{(k)} = \frac{\zeta^{(k)} - \mu_k}{\sigma_k} = \frac{\zeta^{(k)} - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \quad (4.18)$$

збігається до випадкової величини із стандартним нормальним законом розподілу $N(0,1)$.

Розрахунки показують, що сума $\zeta^{(k)}$ в (4.17) має розподіл, близький до нормального вже при порівняно невеликих k . На практиці для отримання білого шуму з нормальною функцією розподілу можна скористатися значенням k , рівним $8 \div 12$, а в простіших випадках і меншими значеннями, наприклад $4 \div 5$.

Нехай тепер у сумі (4.17) складові α_i мають рівномірний на відрізку $[0,1]$ розподіл. Враховуючи, що для так розподілених випадкових величин ζ_i математичне сподівання кожної з них $\mu = 0.5$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, випадкова величина $\zeta^{(k)}$ в (4.17) буде мати математичне сподівання

$$\mu_k = \frac{k}{2} \quad (4.19)$$

і середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{3}}. \quad (4.20)$$

Внаслідок цього в формулі (4.18) величини μ_k та σ_k набудуть конкретних значень: $\mu_k = \frac{k}{2}, \sigma_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{3}}$.

Для підвищення степені співпадання закону розподілу суми (4.17) з нормальним законом розподілу, очевидно необхідно збільшити кількість доданків k . При формуванні елементів ζ_n необхідно, щоб для різних ζ_n та ζ_m доданки α_i , які входять у відповідні суми, не співпадали, тобто були з різними значеннями індексів i . Інакше ці випадкові величини α_n та α_m будуть корельованими. Якщо, наприклад, об'єм модельованої випадкової послідовності рівний N , то в цьому випадку з послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{Nk}$ утворюють N послідовностей по k елементів у кожній:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \\ & (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{2k}), \\ & \dots \dots \dots \\ & (\alpha_{(n-1)k+1}, \dots, \alpha_{nk}), \\ & \vdots \\ & (\alpha_{(N-1)k+1}, \dots, \alpha_{Nk}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Далі на основі співвідношення (4.17) знаходять суми для кожної послідовності. Внаслідок цього утворюється послідовність випадкових величин $\left(\zeta_n, n = \overline{1, N} \right)$, які мають нормальний закон розподілу $N(a, \sigma)$. Для утворення з цих випадкових величин послідовності з нормальним розподілом, але з іншими параметрами, наприклад, $N(\tilde{a}, \tilde{\sigma})$, над випадковими величинами $\left(\zeta_n, n = \overline{1, N} \right)$ слід зробити певні елементарні перетворення. Наприклад, для утворення послідовності $\left(z_n, n = \overline{1, N} \right)$ з функцією розподілу $N(0,1)$ таке перетворення матиме вигляд:

$$z_n = \frac{\zeta_n - a}{\sigma}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (4.22)$$

Після моделювання білого шуму з нормальною функцією розподілу важливо отримати оцінку основних його параметрів (математичного сподівання, середньоквадратичного відхилення), а також перевірити, чи справді для змодельованого білого шуму функція розподілу є нормальною.

4.2. Імітаційне моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях на базі їх математичної моделі

4.2.1. Моделюючий алгоритм детермінованої складової. Імітаційне моделювання детермінованої складової проводиться згідно виразу (4.2).

Оскільки, як показали результати роз. 3, для діагностування за детермінованою складовою достатньо чотири перших коефіцієнти поліному Чебишева (4.2), то імітаційне моделювання першого доданку імітаційної моделі (4.1) зведеться до виразу:

$$f(k) = \sum_{n=0}^3 c_n \left(4 - 20 \frac{k}{K} + 6 \frac{k(k-1)}{K(K-1)} + 30 \frac{k!(k-2)!}{K!(K-2)!} + 20 \frac{k!(k-3)!}{K!(K-3)!} \right), \quad (4.23)$$

де c_n – коефіцієнти поліному Чебишева;

$k = \overline{0, K}$ – порядковий номер тривалості кардіоінтервалу на КІГ.

4.2.2. Метод імітаційного моделювання лінійних стаціонарних випадкових послідовностей

4.2.2.1. Основні підходи до моделювання стаціонарних лінійних випадкових послідовностей. Перед тим, як перейти безпосередньо до опису моделюючого алгоритму наведемо деякі означення і властивості різницевих стохастичних рівнянь, які називають авторегресійними.

Серед ймовірнісних моделей, що описують реальні явища, простими, конструктивно заданими, є процеси авторегресії, які можна подати у такому вигляді:

$$\xi_n = - \sum_{i=1}^P a_i \xi_{n-i} + \zeta_n, \quad n = \overline{0, N} \quad (4.24)$$

де $\{a_i, i = \overline{0, P}\}$ – послідовність коефіцієнтів авторегресії;

ζ_n – дискретний білий шум з математичним сподіванням $\mathbf{M}\zeta_n = 0$ та дисперсію $D\zeta_n^2 = \sigma_\zeta^2$;

P – порядок рівняння авторегресії.

Якщо корені комплексного характеристичного рівняння $Z^P + a_1 Z^{P-1} + \dots + a_P = 0$ лежать всередині одиничного кола, то рівняння має єдиний стаціонарний розв'язок:

$$\xi_n = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \zeta_{n-j}. \quad (4.25)$$

Вираз (4.25) є частковим випадком (4.3) при виконанні умови $\varphi_j \equiv 0, j < 0$ і називається процесом ковзного середнього або ковзною сумою.

Можна показати, що між послідовністю коефіцієнтів $\{a_i, i = \overline{0, P}\}$ рівняння (4.24) та послідовністю значень ядра $\{\varphi_j, j \in Z\}$ процесу (4.3) існують наступні залежності :

$$\begin{aligned} a_0 \varphi_0 &= 1, \\ \sum_{i=0}^s a_i \varphi_{s-i} &= 0, \quad s = \overline{1, P-1}, \\ \sum_{i=0}^P a_i \varphi_{s-i} &= 0, \quad s = P, P+1, \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Із (4.26) безпосередньо витікають рекурентні співвідношення, зручні для реалізації на ЕОМ:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_s &= - \sum_{i=1}^s \varphi_i a_{s-i}, \quad s = \overline{1, P-1}, \\ a_s &= - \sum_{i=1}^P \varphi_i a_{s-i}, \quad s = P, P+1, \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

Легко побачити, що формули (4.27) зворотні й можуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \\ \varphi_s &= - \sum_{i=1}^s a_i \varphi_{s-i}, \quad s = \overline{1, P-1}, \\ \varphi_s &= - \sum_{i=1}^P a_i \varphi_{s-i}, \quad s = P, P+1, \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

Основним інструментом в запропонованому моделюючому алгоритмі є рівняння Юла-Уокера, які виводяться шляхом множення на ξ_{n+s} двох частин

3. Оцінюється послідовність ядер $\{\varphi_j, j = \overline{1, k}\}$ лінійного процесу (4.25) по рекурентним співвідношенням (4.28) і послідовності коефіцієнтів $\{a_i, i = \overline{1, P}\}$ при $a_0 \varphi_0 = 1$. Проводиться нормування отриманої множини відліків ядра $\{\varphi_j, j = \overline{0, k}\}$ за формулою

$$\hat{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\sqrt{\sum_{j=0}^k \varphi_j^2}}, \quad j = \overline{0, k}. \quad (4.32)$$

4. Для подальшого порівняння з вихідною кореляційною функцією обчислюється оцінка кореляційної функції процесу за формулою

$$R_s = \sigma_\zeta^2 \sum_{j=0}^{k-s} \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_{j+s}, \quad s = \overline{0, P} \quad (4.33)$$

5. Визначається оцінка дисперсії по послідовності коефіцієнтів $\{\varphi_j, j = \overline{0, k}\}$ для контролю розрахунків за формулою:

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2 \sum_{j=0}^k \hat{\varphi}_j^2. \quad (4.34)$$

6. Визначається математичне сподівання білого шуму за формулою

$$m_\zeta = \frac{m_\xi}{\sum_{j=0}^k \hat{\varphi}_j} \quad (4.35)$$

7. Генеруються реалізації дискретного стаціонарного білого шуму (наприклад, гаусівського або пуасонівського) з математичним сподіванням (4.35) та дисперсією $\sigma_\zeta^2 = \sigma_\xi^2 / \sum_{j=0}^k \hat{\varphi}_j^2$.

8. Моделюються реалізації лінійної випадкової послідовності $\{\xi_1(\omega, k) \quad k = \overline{0, N}\}$ за формулою (4.3).

Зауважимо, що у випадку задання послідовності ядер $\{\varphi_j, j = \overline{1, k}\}$ оцінки послідовності коефіцієнтів $\{a_i, i = \overline{1, P}\}$ вираховуються за формулами (4.28) та тоді немає необхідності розв'язувати систему лінійних рівнянь (4.29).

4.3. Результати імітаційного моделювання кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях

На основі розглянутого вище методу проведемо серію імітаційних експериментів на ЕОМ по моделюванню КІГ при фізичних навантаженнях для випадку норми та різних типів відхилень від норми. Необхідною інформацією для імітаційного моделювання є послідовність коефіцієнтів $\{c_n, n = \overline{0, N}\}$ при розкладі математичного сподівання КІГ за поліномами Чебишева та кореляційна функція КІГ, що отримані в результаті попередньо проведеного статистичного аналізу реалізацій КІГ за емпіричними дослідженнями.

На рисунках 4.1 та 4.2 наведено приклади такого імітаційного моделювання КІГ для різних функціональних проб.

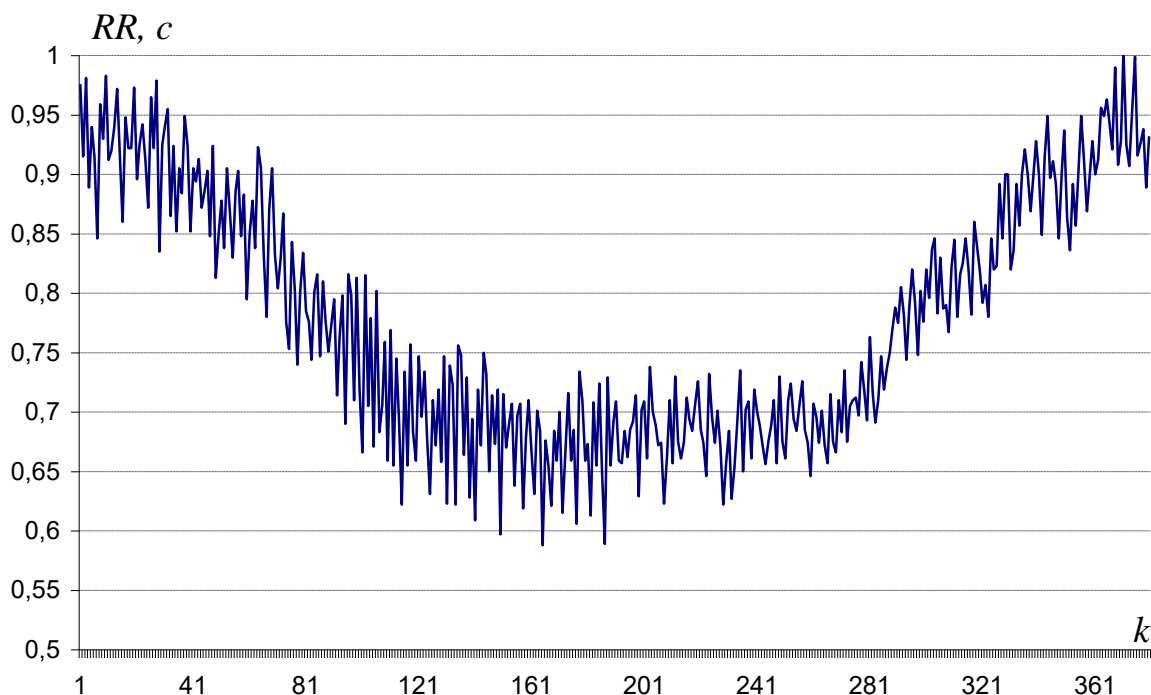


Рис. 4.1. Результати імітаційного моделювання КІГ в період фізичного навантаження та відновлення серцевого ритму (велоергометрія, пацієнт 4 – молодий спортсмен).

4.4. Похибка імітаційного експерименту

З метою перевірки адекватності, точності імітаційної моделі КІГ при фізичних навантаженнях, було проведено оцінювання абсолютних та відносних похибок комп'ютерного моделюючого експерименту. Для цього змодельовано реалізації КІГ в період фізичного навантаження та КІГ в період відновлення частоти серцевих скорочень. Отримані оцінки математичних сподівань (рис. 4.3) та оцінки кореляційних функцій (рис. 4.4 та рис.4.5) змодельованих КІГ

порівнювались із отриманими протягом експериментальних досліджень оцінками математичних сподівань та оцінками кореляційних функцій.

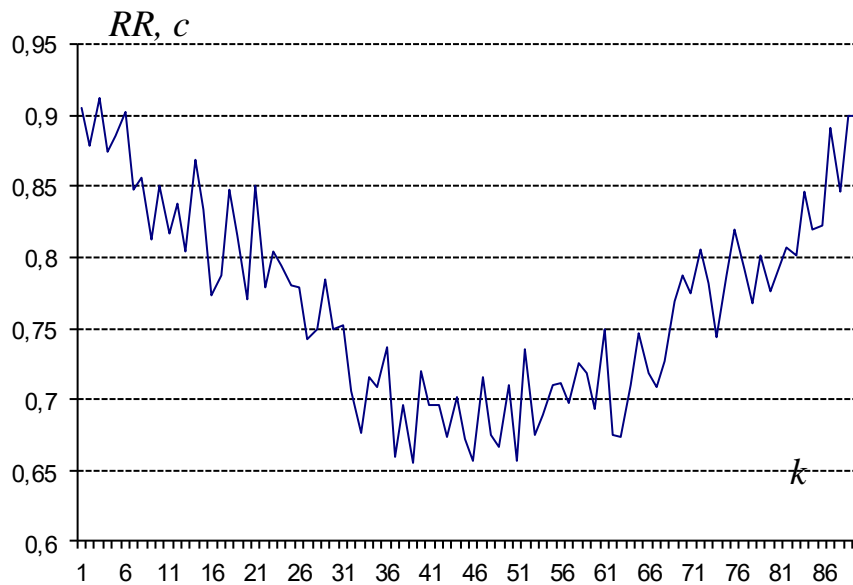
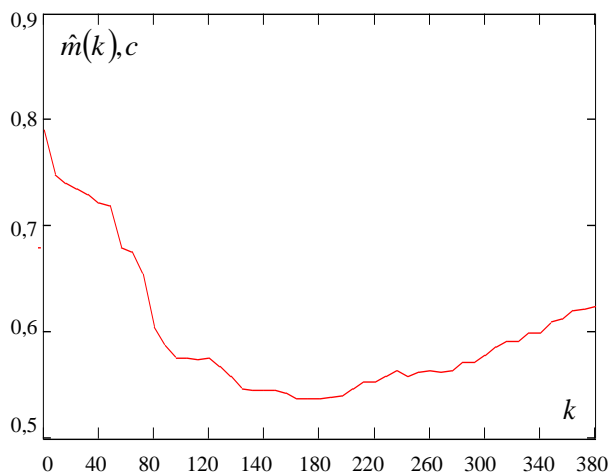
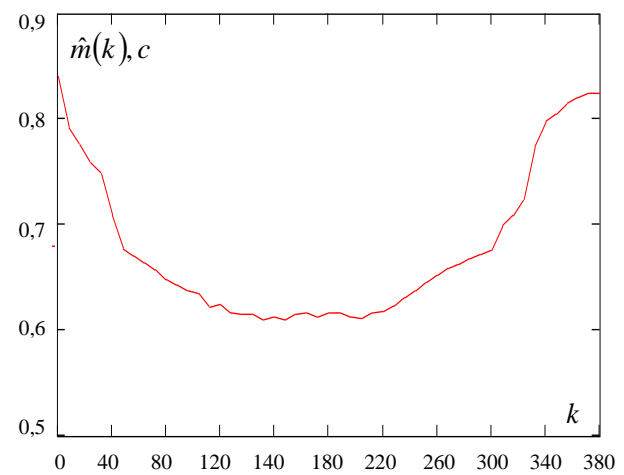


Рис. 4.2. Результати імітаційного моделювання КІГ в період фізичного навантаження та відновлення серцевого ритму (проба Вальсальви, пацієнт 4 – молодий спортсмен).



а)



б)

Рис. 4.3. Оцінки математичних сподівань змодельованих КІГ при фізичних навантаженнях:

- а) пацієнт 3 – чоловік з ризиком ішемічної хвороби серця,
- б) пацієнт 4 – молодий спортсмен.

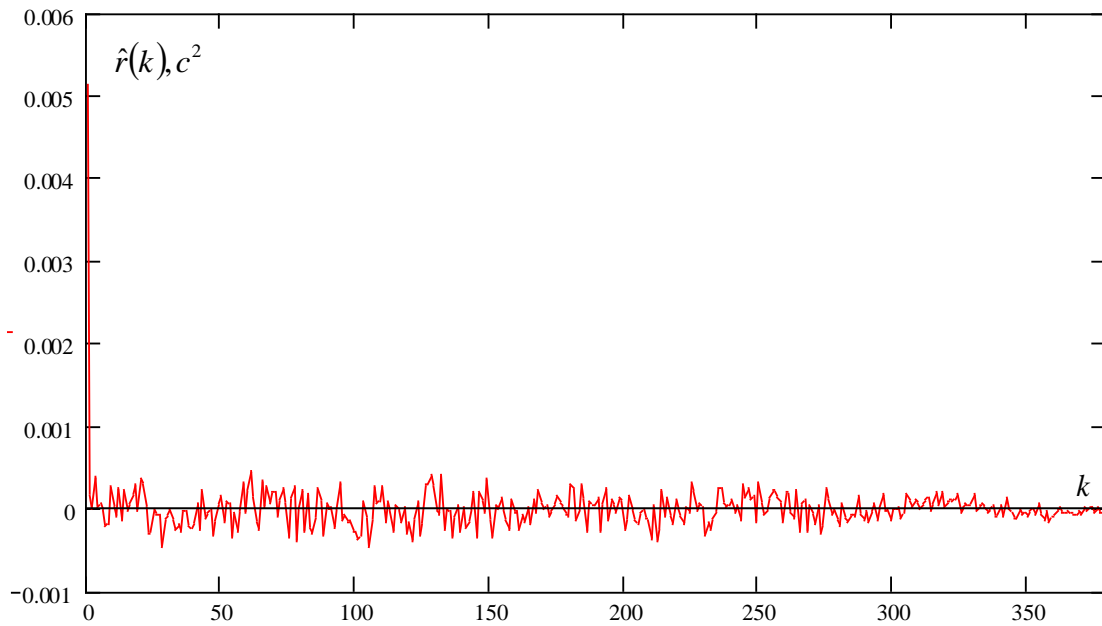


Рис. 4.4. Оцінки кореляційних функцій змодельованої КІГ (пацієнт 3 – чоловік з ризиком ішемічної хвороби серця).

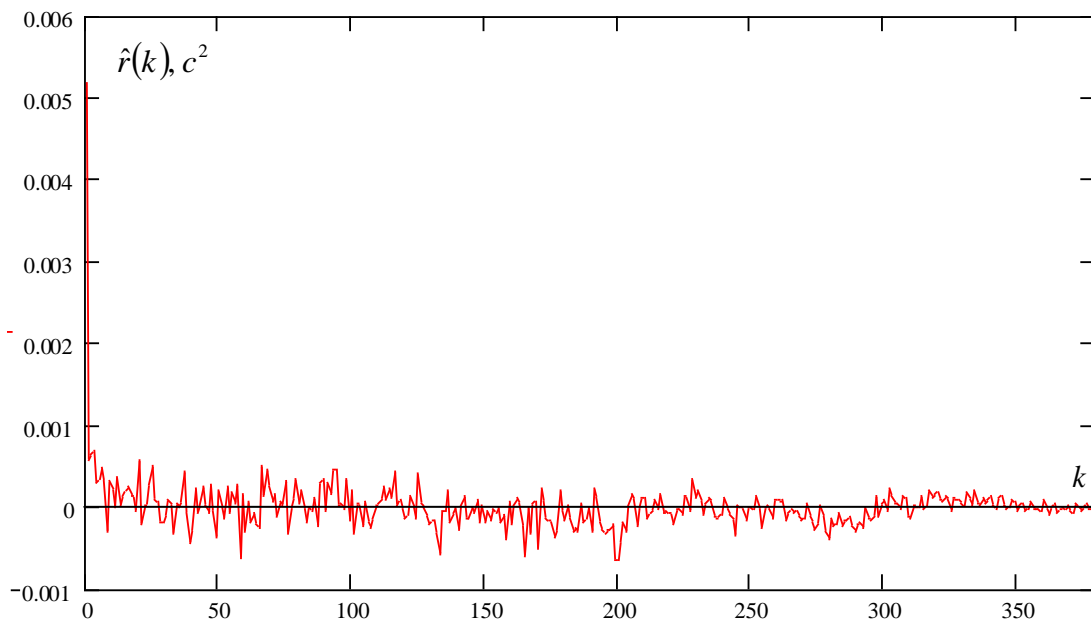


Рис. 4.5. Оцінка кореляційної функцій змодельованої КІГ (пацієнт 4 – молодий спортсмен).

Алгоритм оцінювання абсолютних похибок оцінок математичного сподівання $\hat{m}(k)$ та оцінок кореляційної функції $\hat{r}(k)$ зводиться до виконання наступних обчислень:

1. Знаходження абсолютних похибок $\Delta\hat{m}_n(k)$ та $\Delta\hat{r}_n(k)$ для n , $n = \overline{0, N}$ імітаційних експериментів моделювання КІГ.

2. Знаходження максимуму абсолютних похибок для кожного експерименту:

$$\Delta_{\max} \hat{m}_n(k) = \max_{k \in 1, K} \Delta \hat{m}(k), \quad (4.36)$$

$$\Delta_{\max} \hat{r}_n(k) = \max_{k \in 1, K} \Delta \hat{r}(k). \quad (4.37)$$

3. Знаходження середніх абсолютних максимальних похибок математичного сподівання та кореляційної функції:

$$\Delta_{\max_c} \hat{m}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Delta_{\max} \hat{m}_n(k), \quad (4.38)$$

$$\Delta_{\max_c} \hat{r}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Delta_{\max} \hat{r}_n(k); \quad (4.39)$$

4. Оскільки величину $\Delta_{\max_c} \hat{m}(k)$ приймаємо за оцінку математичного сподівання абсолютної похибки оцінки математичного сподівання $\mathbf{M}[\Delta \hat{m}(k)]$ та величину $\Delta_{\max_c} \hat{r}(k)$ приймаємо за оцінку математичного сподівання похибки оцінки кореляційної функції $\mathbf{M}[\Delta \hat{r}(k)]$, то можемо визначити оцінки дисперсій абсолютних похибок:

$$\hat{d}\{\Delta \hat{m}(k)\} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\Delta \hat{m}_n(k) - \Delta_{\max_c} \hat{m}(k)]^2, \quad (4.40)$$

$$\hat{d}\{\Delta \hat{r}(k)\} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\Delta \hat{r}_n(k) - \Delta_{\max_c} \hat{r}(k)]^2; \quad (4.41)$$

5. оцінки середньоквадратичних відхилень абсолютних похибок оцінок математичного сподівання та кореляційної функції відповідно рівні:

$$\hat{\sigma}\{\Delta \hat{m}(k)\} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\Delta \hat{m}_n(k) - \Delta_{\max_c} \hat{m}(k)]^2}, \quad (4.42)$$

$$\hat{\sigma}\{\Delta \hat{r}(k)\} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\Delta \hat{r}_n(k) - \Delta_{\max_c} \hat{r}(k)]^2}. \quad (4.43)$$

Скориставшись правилом 3σ визначимо, що з довірчою ймовірністю $P = 0,997$ абсолютні похибки оцінок математичного сподівання та кореляційної функції буде належати інтервалам:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{m}(k) &\in [\Delta_{\max_c} \hat{m}(k) - 3\sigma; \quad \Delta_{\max_c} \hat{m}(k) + 3\sigma], \\ \Delta \hat{r}(k) &\in [\Delta_{\max_c} \hat{r}(k) - 3\sigma; \quad \Delta_{\max_c} \hat{r}(k) + 3\sigma]. \end{aligned}$$

Алгоритм оцінювання відносних похибок математичного сподівання $\hat{m}(k)$ та кореляційної функції $\hat{r}(k)$ зводиться до виконання наступних обчислень:

1. Знаходження відносних похибок $\delta \hat{m}_n(k)$ та $\delta \hat{r}_n(k)$ для n , $n = \overline{0, N}$ імітаційних експериментів моделювання КІГ.

2. знаходження максимуму відносних похибок для кожного експерименту:

$$\delta_{\max} \hat{m}_n(k) = \max_{k \in 1, K} \delta \hat{m}_n(k), \quad (4.44)$$

$$\delta_{\max} \hat{r}_n(k) = \max_{k \in 1, K} \delta \hat{r}_n(k); \quad (4.45)$$

3. знаходження середніх відносних максимальних похибок математичного сподівання та кореляційної функції:

$$\delta_{\max_c} \hat{m}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{\max} \hat{m}_n(k), \quad (4.46)$$

$$\delta_{\max_c} \hat{r}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{\max} \hat{r}_n(k); \quad (4.47)$$

4. оскільки $\delta_{\max_c} \hat{m}(k)$ приймаємо за оцінку математичного сподівання відносної похибки оцінки математичного сподівання $\mathbf{M}[\delta \hat{m}(k)]$ та $\delta_{\max_c} \hat{r}(k)$ приймаємо за оцінку математичного сподівання відносної похибки оцінки кореляційної функції $\mathbf{M}[\delta \hat{r}(k)]$, то можемо визначити оцінки дисперсій відносних похибок:

$$\hat{d}\{\delta \hat{m}(k)\} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\delta \hat{m}_n(k) - \delta_{\max_c} \hat{m}(k)]^2, \quad (4.48)$$

$$\hat{d}\{\delta \hat{r}(k)\} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\delta \hat{r}_n(k) - \delta_{\max_c} \hat{r}(k)]^2; \quad (4.49)$$

5. оцінки середньоквадратичних відхилень відносних похибок оцінок математичного сподівання та кореляційної функції відповідно рівні:

$$\hat{\sigma}\{\delta \hat{m}(k)\} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\delta \hat{m}_n(k) - \delta_{\max_c} \hat{m}(k)]^2}, \quad (4.50)$$

$$\hat{\sigma}\{\delta \hat{r}(k)\} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [\delta \hat{r}_n(k) - \delta_{\max_c} \hat{r}(k)]^2}. \quad (4.51)$$

Скориставшись [103, 118] правилом 3σ визначимо, що з довірчою ймовірністю $P = 0,997$ відносні похибки оцінок математичного сподівання та оцінок кореляційної функції будуть належати інтервалам:

$$\delta \hat{m}(k) \in \left[\delta_{\max_c} \hat{m}(k) - 3\sigma; \delta_{\max_c} \hat{m}(k) + 3\sigma \right], P\{0,02 \pm 0,00035\} = 0,997;$$
$$\delta \hat{r}(k) \in \left[\delta_{\max_c} \hat{r}(k) - 3\sigma; \delta_{\max_c} \hat{r}(k) + 3\sigma \right], P\{0,025 \pm 0,00014\} = 0,997.$$

Отже, наведені похибки імітаційного моделювання дають змогу стверджувати про досить високу точність алгоритму моделювання КІГ при фізичних навантаженнях, що дає змогу використовувати запропонований метод моделювання тестових та навчаючих сигналів для тестування та навчання системи розпізнавання образів при автоматизованій комп'ютерній діагностиці адаптивно-регулятивних можливостей організму людини.

4.5. Система комп'ютерних програм для опрацювання та імітаційного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях на базі кардіоінтервалометричної діагностичної системи

Сучасні технічні засоби відбору, обробки та аналізу кардіоінтервалограм переважно створюються на основі персональних комп'ютерів. Серцевиною будь-якої такої кардіометричної комп'ютерної системи є відповідне програмне забезпечення.

На базі розробленої в даній дисертаційній роботі математичній моделі та методів обробки КІГ було створено систему програм (Додаток А) для опрацювання, аналізу та імітаційного моделювання КІГ, яка може використовуватися в сучасних системах комп'ютерної діагностики серця.

Ця система програм реалізує такі функції:

1. Статистичне опрацювання КІГ при фізичних навантаженнях.
2. Визначення коефіцієнтів різних ортогональних розкладів (в базисах Чебишева, Кравчука, Лагера та тригонометричних функцій) статистичних оцінок математичного сподівання та оцінок кореляційної функції КІГ, що є діагностичними ознаками.
3. Визначення типу кривої Пірсона та параметрів цих кривих для оцінювання щільності розподілу, що пропонуються як діагностичні ознаки..
4. Ідентифікація ядра лінійної випадкової послідовності та імовірнісних характеристик її породжуючого процесу на основі методу Юла-Уокера.
5. Проведення імітаційного моделювання КІГ на базі лінійних випадкових послідовностей для потреб тестування та навчання комп'ютерних діагностичних систем.
6. Оцінювання точності імітаційного експерименту та точності визначення діагностичних ознак.

4.6. Висновки до четвертого розділу

1. На основі лінійних випадкових послідовностей розглянуто метод імітаційного комп'ютерного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях.

2. Проведено імітаційне моделювання лінійних випадкових послідовностей в рамках кореляційної теорії на основі методу Юла-Уокера.

3. Створено новий метод імітаційного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях на основі нової математичної моделі, що запропонована у монографії.

4. Проведено серію комп'ютерних імітаційних експериментів по моделюванню КІГ на основі нового методу імітаційного моделювання КІГ.

5. Створено систему комп'ютерних програм для обробки зареєстрованих КІГ та проведення імітаційних експериментів, що використовується як програмне забезпечення для кардіометричної діагностичної системи на базі ЕОМ.

ВИСНОВКИ

У монографії висвітлено актуальну наукову задачу: побудовано математичну модель КІГ при фізичних навантаженнях, обґрунтовано методи її статистичної обробки та запропоновано нові класи діагностичних ознак адаптивно-регулятивних можливостей організму для комп'ютерних систем автоматизованої діагностики. Основні результати та висновки проведених теоретичних та експериментальних досліджень полягають в наступному:

1. Розроблено нову математичну модель КІГ з врахуванням фізичного навантаження у вигляді суми дискретної детермінованої функції та стаціонарної лінійної випадкової послідовності, що дало змогу врахувати як перехідний характер, так й стохастичність структури КІГ при фізичних навантаженнях.
2. Обґрунтовано методи статистичного опрацювання КІГ, що базуються на розробленій математичній моделі. З використанням методу найменших квадратів побудовано алгоритм оцінювання математичного сподівання КІГ, а з використанням теорії статистичного оцінювання ймовірнісних характеристик ергодичних відносно кореляційної функції та щільності розподілу випадкових послідовностей, запропоновано алгоритм оцінювання кореляційної функції та щільності розподілу стаціонарної компоненти КІГ.
3. Запропоновано нові класи діагностичних ознак: коефіцієнти розкладу оцінки математичного сподівання та оцінки кореляційної функції в ряди за ортогональними дискретними поліномами Чебишева та параметри кривої Пірсона, що апроксимує щільність розподілу КІГ. Запропоновані класи діагностичних ознак дають змогу мінімізувати розмірність діагностичного простору, що суттєво зменшує вимоги до обчислювальних ресурсів комп'ютерної діагностичної системи.
4. Розроблено метод імітаційного моделювання КІГ при фізичних навантаженнях, що базується на її математичній моделі та методі Юла-Уокера, для потреб тестування та навчання комп'ютерних діагностичних систем за КІГ.
5. Для апробації основних положень дослідження, розроблено систему комп'ютерних програм, на основі якої проведено серію натурних та імітаційних експериментів з моделювання та обробки КІГ при фізичних навантаженнях. Результати експериментів підтвердили достовірність та практичну цінність розробленої математичної моделі, методів аналізу та імітації КІГ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абакумов В.Г. та ін. *Біомедичні сигнали та їх обробка*. К.: ВЕК+, 1997. 352с.
2. Абрагамович О. О. *Варіабельність серцевого ритму : фізіологічні основи, клінічне значення, особливості у хворих на виразкову хворобу до та після резекції шлунка* / О. О. Абрагамович, А. П. Черкас, У. О. Абрагамович, М. О. Абрагамович, В. О. Сергієнко. Львів : Львівський національний медичний університет імені Данила Галицького, 2014. 119 с.
3. Агаджанян Н.А. Баевский Р.М., Берсенева А.П. *Учение о здоровье и проблемы адаптации*. Ставрополь: Изд-во СГУ, 2000. 204 с.
4. Айвазян С.А., Бежаева З.Ю., Староверов О.В. *Классификация многомерных наблюдений*. М.: Статистика, 1974. 240 с.
5. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. *Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных*. М.: Финансы и статистика, 1983. 472 с.
6. Анализ вариабельности сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (часть 1) . Вестник аритмологии №24. Российский научно-практический рецензируемый журнал. Санкт-петербургское общество кардиологов им. Г.ф. Ланга , 2002. [Электронный ресурс]. Доступно: <http://www.vestar.ru/article.jsp?id=1267#top>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
7. Андерсн Т. *Введение в многомерный статистический анализ*. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.
8. Андре Анго. *Математика для электро- и радиоинженеров*. М.: Наука, 1965. – 780 с.
9. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. "Может ли режим работы сердца здорового человека быть регулярным?", *Радиотехника и электроника*. 1997. Т.42, №3.
10. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. *Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика*. К.: Техніка, 2004. 288 с.
11. Бабак В.П., Хандецький В.С., Шрюфер Е. *Обробка сигналів*. К.: Либідь, 1996. 392 с.
12. Баевский Р.М., Берсенева А.П. *Оценка адаптационных возможностей организма и риск развития заболеваний*. М.: Медицина, 1997. 265 с.
13. Баевский Р.М., Иванов Г.Г. "Вариабельность сердечного ритма: теоретические аспекты и возможности клинического применения", *Ультразвуковая и функциональная диагностика*. 2001. №3. с. 106-127.
14. Баевский Р.М., Кириллов О.И., Клецкин С.З. *Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе*. М.: Наука, 1984. 225 с.
15. Баевский Р.М., Никулин Г.А. "Холтеровское мониторирование в космической медицине: анализ вариабельности сердечного ритма", *Вестник аритмологии*. 2001. №16. с. 6-15.

16. Барковський В., Барковська Н., Лопатін О. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. ТОВ «Видавництво "Центр навчальної літератури"» 2017, 424 с.

17. Бахвалов Н.С, Жидков Н.П, Кобельков П.М *Численные методы: Учеб. пособие*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 600 с.

18. Бойко І.Ф., Марченко Б.Г. "Анализ нелинейных преобразований сигналов в системах диагностики с использованием стохастических ортогональных разложений", *Ин-т электродинамики*. К., 1987. №542. 57 с.

19. Бойко І.Ф., Лозінська Є.В., Лупенко С.А. "Оцінювання діагностичних ознак кардіоінтервалограми за функцією щільності розподілу", *Електроніка та системи управління*. НАУ. 2005. №3 (5). с.32-38.

20. Бойко І.Ф., Лозінська Є.В., Лупенко С.А., Щербак Л.М. "Методи аналізу кардіоінтервалограми людини в комп'ютерних діагностичних системах: класифікація та порівняльний аналіз", *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. Хмельницький: Навчальна книга, 2004. №1. с.141-147.

21. Бойко І.Ф., Лозінська Є.В. "Математичне моделювання тривалостей серцевого ритму", на *Всеукраїнській науково-практичній конференції "Медична інформатика - 2005" Тернопільського державного медичного університету ім. І.Я.Горбачевського*. Тернопіль. 2005. с.48-50.

22. Буй Минь Зиеп, Таратухин Е. "О возможности методики variability сердечного ритма", *Российский кардиологический журнал*. №6 (92) 2011 с. 69-75.

23. Быков В.В. *Цифровое моделирование в статистической радиотехнике*. М.: Советское радио, 1971. 328 с.

24. Вариабельность сердечного ритма. Стандарт измерения, физиологической интерпретации и клинического использования. Рабочая группа Европейского Кардиологического Общества и Северо-Американского общества стимуляции и электрофизиологии. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://www.hrv.ru/index.html>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.

25. Вариабельность сердечного ритма: физиологические механизмы, методы исследования, клиническое и прогностическое значение. Компендиум. Специализованное медицинское интернет-издание для врачей, провизоров, фармацевтов, студентов медицинских и фармацевтических вузов. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://compendium.com.ua/clinical-guidelines/cardiology/section-5/glava-4-variabelnost-serdechnogo-ritma-fiziologicheskie-mehanizmy-metody-issledovaniya-klinicheskoe-i-prognosticheskoe-znachenie/>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.

26. Вейн А.М., Айрапетянц М.Г., Хаспекова Н.Б., Кутерман Э.М., Каменецкая Б.И. "Типы реакций ритма сердца на кратковременные нагрузки и их связь с психофизическими особенностями личности (формализованный подход)", *Физиология человека*. 1988. Т.14, №26. с. 97.

27. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей: Учеб. для вузов*. 6-е изд. стер. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.

28. Виленкин С.Я. *Статистическая обработка результатов исследования случайных функций*. М.: Энергия, 1979. 320 с.
29. Воеводин В.В., Тёртышкинов Е.Е. *Вычислительные процессы с тёплицевыми матрицами*. М.: Наука, 1987. 320 с.
30. Волков Е.А. *Численные методы*. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 256с.
31. Воробьев В.И. "Исследование математико-статистических и периодических характеристик сердечного ритма спортсменов", *Теор. и практ. физ. культ.*, 1980, № 2, с. 21–24.
32. Воскресенский А.Д., Вентцель М.Д. *Статистический анализ сердечного ритма и показателей гемодинамики в физиологических исследованиях*. М.: Наука, 1974. 221 с.
33. Выравнивание статистических распределений. Кривые Пирсона. Прикладная и инженерная математика. [Электронный ресурс]. Доступно: http://www.simumath.net/library/book.html?code=Treat_Exper_Pearson_distr. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
34. Габинский Я.Л. *Вариационная пульсометрия и автокорреляционный анализ в оценке экстракардиальной регуляции сердечного ритма*: Автореф. дисс. канд. мед. наук. / Свердлов. мед. ин-т. 1982. 22 с.
35. Гаврилушкин А.П., Маслюк А.П. "Теоретические и практические аспекты нелинейных хаотических колебаний ритма сердца. Медленные колебательные процессы в организме человека". *Теоретические и прикладные аспекты нелинейной динамики, хаоса и фракталов в физиологии и медицине. Материалы 3-го Всероссийского симпозиума 21-25 мая 2001 г.* Новокузнецк, 2001. с. 37-48.
36. Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов*. М.: Наука, 1965. 656 с.
37. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й. *Теория вероятностей и математическая статистика*. К.: Вища школа, 1979. 408 с.
38. Гланц С. *Медико-биологическая статистика*. М.: Практика, 1998. 459 с.
39. Глибовець М.М., Олецкий О.В. *Штучний інтелект: Підруч. Для студ. Навч. закладів, що навчаються за спец. «Комп'ютерні науки» та «Прикладна математика»*. К.: Виддім «КМ Академія», 2002. 366с.
40. Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов*. М.: Высшая школа, 1977. 480 с.
41. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. М.: Наука, 1988. 448 с.
42. Дембо А.Г. *Врачебный контроль в спорте*. М.: Медицина, 1988. 288с.
43. Демидович Б.Г., Марон И.А. *Основы вычислительной математики*. М.: Госуд.изд. физ.-мат. лит., 1960. 700 с.
44. Денефіль О.В. "Показники кардіоінтервалографії у студентів з різними вихідним типом вегетативної регуляції", *Вісник проблем біології медицини*. Вип. 1, том 2 (99), 2013. с. 324-328.
45. Дубров А.М. *Обработка статистических данных методом главных компонент*. М.: Статистика, 1978. 135 с.

46. Ермаков С.И., Михайлов Г.А. *Статистическое моделирование*. М.: Наука, 1982. 298 с.
47. Жемайтите Д. "Система автоматизированного анализа ритмограмм", *Анализ сердечного ритма*. Вильнюс: Мокслас, 1982. с. 5-22.
48. Закс Ш. *Теория статистических выводов*. М.: Мир, 1975. 776 с.
49. Залманзон Л.А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях*. М.: Наука, 1989. 426 с.
50. *Імовірнісні моделі випадкових сигналів та полів у прикладах та задачах: Навч. посібник*. Омельченко В.Г., Безрук В.М., Драган Я.П., Колесников О.О., Омельченко А.В. К.: ІСДО, 1996. 272 с.
51. Калакутский Л.И., Молчанов Е.В., Конюхов В.Н. "Система контроля состояния учащегося при его работе на персональном компьютере", *Валеология*. 2000. №2. с. 26.
52. Кармелюк Г. *Теорія ймовірності та математична статистика. Навчальний посібник*. ТОВ «Видавництво "Центр навчальної літератури"» 2017.
53. Карташов М.В. *Імовірність, процеси, статистика : Посібник*. К.: Видавничополіграфічний центр 'Київський університет', 2008. 494 с.
54. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. *Многомерный статистический анализ и временные ряды. : Пер. с англ.* М.: Наука, 1976. 736 с.
55. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. *Теория распределений* М.: Наука, 1966. 588 с.
56. Кулаичев А.П. *Анализ вариабельности сердечного ритма Компьютерная электрофизиология и функциональная диагностика: учебное пособие. 4-е изд., перераб. и доп.* М.: ФОРУМ: ИНФРА, 2007. 640 с.
57. Куля В.И. *Ортогональные фильтры*. К.: Техника, 1967. 240с.
58. Лебедев А.Н. *Моделирование в научно-технических исследованиях*. М.: Радио и связь, 1989. 224 с.
59. Левин Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники*. М.: Радио и связь, 1989. 654 с.
60. Литвиненко Я.В., Лупенко С.А., Чупрін Л., Щербак Л.М. "Алгоритм моделювання реалізацій дискретних стаціонарних лінійних випадкових процесів", *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій*. Дніпропетровськ: Навчальна книга, 2000. Т.4. с. 52-58.
61. Лозінська Є.В. "Методи прийняття рішень при діагностиці за кардіоінтервалограмою", на *Десятій науково-технічній конференції Тернопільського державного технічного*. Тернопіль, 2006. с.12.
62. Лозінська Є.В. "Методи статистичної обробки кардіоінтервалограми та діагностичні ознаки на базі її математичної моделі", на *Міжнародній науково-практичній конференції "Дні науки '2005"*. Дніпропетровськ-Белгород: Наука і освіта, 2005. Т 18. с. 37-39.
63. Лозінська Є.В. "Уточнення математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях", *Електроніка та системи управління*. НАУ. 2006. №4 (10). с.71-77.

64. Лозінська Є.В., Литвиненко Я.В., Лупенко С.А., Щербак Л.М. "Імітаційне моделювання кардіоінтервалограми на ЕОМ при фізичних навантаженнях", *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. Хмельницький: Навчальна книга, 2002. №2. с.120-124.
65. Лозінська Є.В., Литвиненко Я.В., Лупенко С.А., Щербак Л.М. "Математичне моделювання кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях", на *VI Міжнародній науково-практичній конференції "Наука і освіта '2003"*. Дніпропетровськ-Мелітополь, 2003. Т.30 с.39-41.
66. Лозінська Є.В., Лупенко С.А. "Математичне моделювання та методи обробки кардіоінтервалограми людини в сучасних комп'ютерних діагностичних системах", на *Восьмій науково-технічній конференції Тернопільського державного технічного університету*. Тернопіль, 2004. с.63.
67. Лозінська Є.В., Лупенко С.А. "Моделювання тривалості серцевих скорочень при фізичних навантаженнях", на *Сьомій науково-технічній конференції Тернопільського державного технічного університету*. – Тернопіль, 2003. с.12.
68. Лозінська Є.В., Лупенко С.А., Осухівська Г.М. "Обґрунтування математичної моделі кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях", на *Дев'ятій науково-технічній конференції Тернопільського державного технічного університету*. Тернопіль, 2005. с.63.
69. Лозінська Є.В., Лупенко С.А., Щербак Л.М. "Математична модель та методи обробки кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях в задачах діагностики адаптивних можливостей організму людини", *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. 2003. Т.8, №4. с.97-105.
70. Лозінська Є.В., Лупенко С.А., Щербак Л.М. "Математична модель тривалості серцевих скорочень при фізичних навантаженнях для діагностики адаптивних можливостей організму людини по зареєстрованій електрокардіограмі", на *Шостій науково-технічній конференції Тернопільського державного технічного університету*. Тернопіль, 2002. с.63.
71. Лупенко С.А., Приймак М.В., Щербак Л.М. "Поліноміальний стохастично періодичний функціонал другого порядку як модель циклічних випадкових сигналів в нелінійних системах", *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. Хмельницький: Навчальна книга, 2000. №1. с.134-137.
72. Макаров Л.М. *Холтеровское мониторирование*. М.: Медпрактика, 2000. 216 с.
73. Марпл-мл. С.Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. М.: Мир, 1990. 584 с.
74. Мармоза А.Т. *Теорія статистики*. Видавництво "Центр навчальної літератури". 2013. 600с.
75. Марченко Б.Г. "Дискретные линейные процессы в задачах гидроакустики", на *Тринадцатой Всесоюзной школе-семинаре по статистической гидроакустике*. М., 1984. 45-52 с.

76. Марченко Б.Г. *Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике*. К.: Наукова думка, 1978. 192 с.
77. Марченко Б.Г., Мыслович М.В. *Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин*. К.: Наукова думка, 1992. 192 с.
78. Марченко Б.Г., Щербак Л.Н. *Линейные случайные процессы и их приложения*. К.: Наукова думка, 1975. 144 с.
79. Марченко В.Б. *Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике*. К.: Наукова думка, 1992. 211 с.
80. Машин В.А. "Анализ variability сердечного ритма с помощью метода графа", *Физиология человека*. 2002. Т 28, № 4. с. 63-73.
81. "Метод последовательного парного анализа ритма сердца по интервалам RR", *Радиоэлектроника, физика и математика в биологии и медицине*. Власов Ю.А., Яшков В.Г., Якименко А.В. и др. Новосибирск, 1971. с. 9-14.
82. Методи дослідження та аналізу variability серцевого ритму. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://studfile.net/preview/5241651/page:2/>
Дата звернення: Трав. 8, 2020.
83. Митропольский А. К. *Техника статистических вычислений*. М.: Наука. 1971. 576 с.
84. Михайлов В.М. *Вариабельность ритма сердца: опыт практического применения метода*. Из-во: Ивановская государственная медицинская академия, 2003. 290 с.
85. Михайлов В.М. "Значение оценки variability сердечного ритма и эргометрических показателей при проведении велоэргометрической пробы, дозируемой по величине должного основного обмена у лиц молодого возраста", на *"Компьютерная электрокардиография на рубеже столетий"*. Россия, Москва, 1999. с.95.
86. Михайлов В.М. *Нагрузочное тестирование под контролем ЭКГ: велоэргометрия, тредмилл-тест, степ-тест, ходьба*. Иваново, 2005. 300 с.
87. Мойсеєнко В.О. *Можливості кардіоінтервалографії у діагностиці та контролі за лікуванням порушень вегетативної регуляції серцево-судинної системи у хворих на хронічний гломерулонефрит* / В.О. Мойсеєнко, Т.Д. Никула, О.В. Біякова, О.І. Парафенко. – Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. Серия «Медицина», 2005.
88. Мэтьюз, Джон, Г., Финк, Куртис, Д. *Численные методы. Использование MATLAB*. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 720 с.
89. Никифоров А.Ф., Суслов С.К. *Классические ортогональные полиномы*. М.: Знание, 1985. 32с.
90. Никулина Г.А. *Исследование статистических характеристик сердечного ритма как метод оценки функционального состояния организма при экстремальных воздействиях*: Автореф. дис. канд. мед. наук. М.: ИМБП, 1974. 30 с.
91. Омельченко В.А. *Ортогональные разложения случайных сигналов и полей: Учеб.пособие*. К.: УМК ВО, 1991. 140 с.
92. Пешель М. *Моделирование сигналов и систем*. М.: Мир, 1981. 300 с.

93. Поллард Дж. *Справочник по вычислительным методам статистики* / Пер. с англ. В.С. Занадворова; Под.ред. и с предисл. Е.М. Четыркина. М.: Финансы и статистика, 1982. 344 с.
94. Попов В.В., Фрицше Л. Н. Вариабельность сердечного ритма: возможности применения в физиологии и клинической медицине. Український медичний часопис. Актуальні питання клінічної практики. №2(52)III–IV.– 2006. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://www.umj.com.ua/article/503/variabelnost-serdechnogo-ritma-vozmozhnosti-primeneniya-v-fiziologii-i-klinicheskoy-medicine>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
95. Приймак М.В. *Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами*: Автореф. дис. д-ра. тех. наук: 05.13.06. К.: НАУ, 2001. 34 с.
96. Пробы с дозированной физической нагрузкой. Компендиум Специализованное медицинское интернет-издание для врачей, провизоров, фармацевтов, студентов медицинских и фармацевтических вузов. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://compendium.com.ua/clinical-guidelines/cardiology/section-5/glava-2-proby-s-dozirovanno-fizicheskoy-nagruzkoy/>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
97. Рагозин А.Н. Анализ спектральной структуры нестационарных физиологических сигналов на плоскости комплексных частот // Цифровые радиоэлектронные системы (электронный журнал). 1999. № 3. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://www.prima.tu-chel.ac.ru/drs.html>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
98. Рагозин А.Н. Спектральный анализ variability сердечного ритма на плоскости комплексных частот // Уральский кардиологический журнал. 2000. вып.2. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://www.prima.susu.ac.ru/drs.html>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
99. Рагозин А.Н., Кононов Д.Ю., Карманов Ю.Т. Классический спектральный анализ, авторегрессионные модели, анализ на плоскости комплексных частот в оценке структуры колебаний сердечного ритма // Цифровые радиоэлектронные системы (электронный журнал). 2000. № 4. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://www.prima.tu-chel.ac.ru/drs.html>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
100. Реброва О.Ю. *Описание процедуры и результатов статистического анализа медицинских данных в научных публикациях*. МЖМП 2000; 4:43-45.
101. *Ритм сердца у спортсменов* / Под ред. Р.М. Баевского и Р.Е. Мотыленской. М.: Физкультура и спорт, 1986. 143 с.
102. Реброва О. Ю. *Статистический анализ медицинских данных. Применение пакета прикладных программ STATISTICA*. М.: Медиа Сфера. 2003. 312 с.
103. Розанов Ю.А. *Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для вузов*. 2-е изд., доп. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 320с.

104. Рябыкина Г.В., Соболев А.В. "Анализ вариабельности ритма сердца", *Кардіологія*. 1996. №10. с.87-97.
105. Рябыкина Г.В., Соболев А.В. *Вариабельность ритма сердца*. М.: изд-во "Оверлей", 2001. 200 с.
106. Сидоренко Г.И., Афанасьев Г.К., Никитин Я.Г. "Статистический анализ сердечного ритма с применением моментов высших порядков" *Кардіологія*, 1975. Т. 15, № 12. с. 96.
107. Ситник В.Ф., Орленко Н.С. *Імітаційне моделювання: Навч. посібник*. К.: КНЕУ, 1998. 232 с.
108. Тихонов В.И. *Статистическая радиотехника*. М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
109. Тиш Є.В., Сов'як Є.В. "Методи та засоби попереднього опрацювання і передавання ЕКГ в системах телемоніторингу", на *VIII міжнар. наук.-техн. конф. Молодих учених та студентів, (Тернопіль, 27–28 листопада 2019.)*. Тернопіль : ТНТУ, 2019. с.102.
110. Тиш Є.В., Сов'як Є.В. "Методи та засоби попереднього опрацювання ЕКГ для системи телемоніторингу", на *VII науково-технічній конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, (Тернопіль, 11 – 12 грудня 2019 р.)*. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. с. 137.
111. Уилкс С. *Математическая статистика. Пер.с англ.* М.: Наука, 1967. 632 с.
112. *Управление физическим состоянием организма. Тренерующая терапия*. Хутиев Т.В., Антомонов Ю.Г., Котова А.Б., Пустовойт О.Г. М.: Медицина, 1991. 256 с.
113. Усыннин А.М., Рогозин А.Н., Вагнер Н.И., Кононов Д.Ю. Информативность переходного процесса сердечного ритма в оценке вегетативной реактивности на эмоциональный стресс у школьников // Цифровые радиоэлектронные системы (электронный журнал). 1999. №3. [Электронный ресурс]. Доступно: <http://www.prima.tu-chel.ac.ru/drs.html>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
114. Федорів Р.Ф. *Статистична радіометрія*. К.: Наукова думка, 1979. 263 с.
115. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. *Чисельні методи в інформатиці*. К.: Видавнича група ВНУ, 2006. 480с.
116. Хаютин В. М., Лукошкова Е.В. "Колебания частоты сердцебиений: спектральный анализ", *Вестник аритмологии*. 2002. № 26. с. 10-21.
117. Хелмстром К. *Статистическая теория обнаружения сигналов. Пер.с англ.* М.: Иностранная литература, 1963. 425 с.
118. Чистяков В.П. *Курс теории вероятностей. – 2-е изд., перераб. и доп.* М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 256 с.
119. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. *Прикладные методы статистического моделирования*. Ленинград: Машиностроение, 1986. 320 с.

120. Ширяев А.Н. *Вероятность*. М.: Наука, 1980. 576 с.
121. Шлык Н.И., Зуфарова Э.И. "Нормативы показателей variability сердечного ритма у исследуемых 16-21 года с разными преобладающими типами вегетативной регуляции", *Вестник Удмуртского университета*. 2013. Вып. 4 с.96-105.
122. Шметтерер Л. *Введение в математическую статистику*. М.: Наука, 1976. 520 с.
123. Barton S. *Chaos, self-organization and psychology*. American Psychologist. 1994. Vol. 49, № 1. pp. 5-14.
124. Bigger JT, Fleiss LF, Steinman RC, Rolnitzky LM, Schneider WJ, Stein PK. *RR variability in healthy, middle-age persons compared with patients with chronic coronary heart disease or recent acute myocardial infarction*. Circulation, 1995.
125. Fojt O., Holcik J. "Applying nonlinear dynamics to ECG signal processing. Two approaches to describing ECG and HRV signals", *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.* 1998. Vol. 17, №2. pp. 96-101.
126. Goldberger AL, Amaral LAN, Glass L, Hausdorff JM, Ivanov PCh, Mark RG, Mietus JE, Moody GB, Peng C-K, Stanley HE. *PhysioBank, PhysioToolkit and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals* (2003). Circulation. 101 (23): pp.215-220.
127. *Heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology* (Membership of the Task Force listed in the Appendix). Europ Heart J, 1996; 17: 354-81.
128. Jorna P.G.A.M. "Spectral analysis of heart rate and psychological state: A review of its validity as a workload index", *Biological psychology*. 1992. Vol. 34. pp. 237-257.
129. Mietus JE, Peng C-K, Henry I, Goldsmith RL, Goldberger AL. *The pNNx files: re-examining a widely used heart rate variability measure*. Heart, 2002.
130. Normal Sinus Rhythm RR Interval Database. Published: March 3, 2003. Version: 1.0.0 [Электронный ресурс]. Доступно: <https://physionet.org/content/nsr2db/1.0.0/>. Дата звернення: Квіт. 9, 2020.
131. Nychka D., Ellner S., Gallant R., McCaffry D. Finding chaos in noisy systems. // Royal Statistical Society. – 1992. – Vol. 54, №2. – P. 399-426.
132. Palazzolo J.A., Estafanous F.G., Murray P.A. Entropy measures of heart rate variation in conscious dogs // Am. J. Physiol. – 1998. – Vol. 274(4 Pt. 2): H1099- H1105.
133. Reidbord S.P., Redington D.J. "Psychophysiological processes during insight-oriented psychotherapy. Further investigations into nonlinear psychodynamics", *The Journal of Nervous and Mental disease* . 1992. Vol. 180. pp. 649-657.

134. Py-HRV – Python toolbox for Heart Rate Variability. [Электронный ресурс]. Доступно: <https://pyhrv.readthedocs.io/en/latest/index.html> Дата звернення: Трав. 8, 2020.
135. Smith R.L. "Estimating dimension in noisy chaotic time series", *Royal Statistical Society*. 1992. Vol. 54, №2. pp. 329-351.
136. Stein PK, Ehsani AA, Domitrovich PP, Kleiger RE, Rottman JN. *The effect of exercise training on heart rate variability in healthy older adults*. Am Heart J, 1999.
137. *The study of heart-rate variability*. Edited by R.I. Kitney and O. Rompelman. Clarendon press. Oxford. 1980.
138. Toichi M., Sugiura T., Murai T., Sengoku A. "A new method of assessing cardiac autonomic function and its comparison with spectral analysis and coefficient of variation of R-R interval", *J. Auton. Nerv. Syst.* 1997 Jan., 12; 62(1-2): pp. 79-84.
139. What Is Heart Rate Variability (HRV) & Why Does It Matter? [Электронный ресурс]. Доступно: <https://www.firstbeat.com/en/blog/what-is-heart-rate-variability-hrv/>. Дата звернення: Трав. 8, 2020.

