*УДК 621.01: 621.8787*
**В.Ловейкін, доктор. техн. наук; Ю.Човнюк, канд. техн. наук;**
**М.Діктерук, канд. техн. наук**
*Київський національний університет будівництва і архітектури*

# КОМПЛЕКСНІ КРИТЕРІЇ ДИНАМІЧНОГО ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕХАНІЗМІВ ТА МАШИН: ЛЕКСИКОГРАФІЧНО ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ РУХУ

*У статті проаналізовано вимоги до вибору головних критеріїв динамічного вдосконалення системи, розглянуто задачу визначення оптимального режиму руху машини за критеріальною дією, що виражається функціоналом від узагальненої координати і її похідних, до четвертої включно, на прикладі механізму підйому вантажу краном. Запропоновано методику визначення лексографічно оптимального розв'язку багатокритеріальних задач руху машин.*

### *Умовні позначення*

$n$ – кількість критеріїв;

$\delta_i$ – безрозмірні вагові коефіцієнти, які враховують частку $i$ -го критерію;

$K_i$ – $i$ -й ($i=1,2\ \dots,\ n$) безрозмірний окремий критерій;

$t_1$ – тривалість руху механізму чи машини (період руху);

$q$ – узагальнена координата руху;

$F\left(t,q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q},q^{(IV)}\right)$– підінтегральний функціонал руху.

$t_1=\tau_{\text{розгону}}$ – час розгону системи;

$\theta$– кут відхилення канату від вертикалі;

$\omega=\dfrac{2\pi}{\tau_{\text{розгону}}}$ – характерна частота (кругова) процесу розгону системи.

Відомо [1], що постановкою конкретної задачі оптимізації механічної системи визначається, який критерій динамічного вдосконалення головний (ключовий). Це той критерій, котрий відповідає основній вимозі до об'єкту, що розглядається, – його цільової функції. Ця відповідність виражається однаковими елементами корисної ефективності цільової функції й підінтегрального виразу критерію.

Для цільових функцій у відповідність ставлять, як правило, певні ключові критерії (безрозмірні питомі дії) [2]: за Гаусом, за Ейлером, за Гамільтоном-Остоградським, за Гамільтоном.

При розв‘язанні задач оптимізації конкретної механічної системи слід спочатку встановити цільову функцію системи, знайти її елементи корисної ефективності, що є параметрами функції мети, і відповідно до них вибрати ключові безрозмірні питомі дії. Якщо ж механічна система має декілька цільових функцій, то її динамічне вдосконалення відображається зменшенням декількох критеріїв (за Буріданом та за Лагранжем). Існують випадки, коли на механічну систему накладають певні обмеження за тих чи інших технологічних характеристик, які відображають ті стани механічної системи, котрі є визначальними у тих чи інших умовах експлуатації системи. В цьому випадку оптимізація механічної системи здійснюється за ключовим критерієм та критерієм, що відповідає певному стану системи. Відповідність динамічного стану механічної системи критерію її оцінки характеризується фізичним змістом критерію.

Крім головних критеріїв динамічного вдосконалення механічних систем, у конкретних задачах доцільно вибирати також допоміжні критерії. Ними можуть бути інші безрозмірні питомі дії (крім головних) [3 – 5].

Оскільки інтегральний критерій поглинає пікові значення характеристики, що представляє інтерес, максимальне значення останньої може бути прийнятим у якості одного з допоміжних критеріїв. Це критерії позиційного (миттєвого, неінтегрального) характеру: максимальні значення підінтегральних функцій ( $F$ ), навантажень на ланцюги системи, швидкостей та прискорень окремих точок та ланцюгів механічної системи та ін.

У тих випадках, коли поряд з основним критерієм використовуються інші критерії для динамічного вдосконалення механічних систем, доцільно застосовувати комплексний безрозмірний критерій, котрий виражається у вигляді лінійної згортки критеріїв [5]:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \delta_i K_i , \qquad (1)$$

Тут у якості критеріїв $K_i$ можуть бути використані як безрозмірні питомі дії, так і інші критерії, наприклад, позиційні (відношення максимальних значень переміщень, швидкостей, прискорень і т.д. до їх середніх значень). При цьому тільки одна вимога існує до критеріїв – вони повинні бути безрозмірними. Коефіцієнти “ваги” $\delta_i$ можуть приймати значення від нуля до одиниці та встановлюються в залежності від вимог, що застосовуються до досліджуваного механізму або машини методом експертних оцінок чи співставленням абсолютних максимальних значень кінематичних характеристик з їх допустимими значеннями.

Коефіцієнт $\delta$ при ключовому критерії має переваги над іншими коефіцієнтами $\delta_i$ (тобто т.з. “найбільшу вагу”). Сума всіх коефіцієнтів $\delta_i$ для числа, що розглядається, критеріїв дорівнює одиниці, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1 . \qquad (2)$$

Слід відзначити, що ключовий критерій повинен обов‘язково входити до складу комплексного поряд з іншими, котрі відображають деякі вторинні цілі системи (підцілі), певні технологічні, конструктивні, експлуатаційні та інші обмеження.

Виходячи з викладеного вище, стає зрозуміло, що найбільш загальними критеріями, котрі (достатньо) можуть відображати динамічне вдосконалення машин та механізмів, слугують критерії, отримані на основі критеріальних дій. Вони є інтегральними функціоналами, котрі залежать від режиму руху машини чи механізму. Режим за кожним з таких критеріїв буде оптимальним тоді, коли він надає цьому критерію мінімального значення. Тому задача вибору найбільш сприятливого режиму руху за певним критерієм зводиться до задачі мінімізації інтегральних функціоналів.

Усі критеріальні дії можна розбити на групи, які будуть мати однакові загальні види інтегральних функціоналів.

Критеріальна дія за Ейлером має вид:

$$\dot{I}_E = \int_0^{t_1} F(t, q) dt . \qquad (3)$$

Умовою мінімуму цього критерію є рівняння Ейлера типу:

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = 0, \ (k = 1, 2, ..., S). \qquad (4)$$

У результаті розв‘язку рівняння (4) можна отримати залежності узагальнених координат системи $q_k$ від часу руху $t$, тобто $q_k = q_k(t)$. Ці залежності й будуть найбільш сприятливими режимами руху машин та механізмів у потенціальному силовому полі.

Критеріальні дії за Декартом, Лагранжем, Гамільтоном-Остроградським можна подати у виді функціоналу:

$$\dot{I} = \int_0^{t_1} F(t, q_k, \dot{q}_k) dt . \qquad (5)$$

Для мінімізації функціоналу (5) необхідно розв‘язати рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}=0,\ \left(k=1,2,...,S\right). \tag{6}$$

Отримані у результаті цього залежності $q_k=q_k\left(t\right)$ будуть виражати оптимальний режим руху для кожного з цих критеріїв відповідно до виразу функції $F$.

Критеріальні дії за Аппелем, Гаусом, Коріолісом-Понселе й Буріданом мають вигляд:

$$\dot{I}=\int_0^{t_1}F\left(t,q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k\right)dt. \tag{7}$$

Умова мінімуму цього функціоналу – рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k}=0,\ \left(k=1,2,...,S\right). \tag{8}$$

Критеріальна дія за ривком [2] визначається функціоналом:

$$\dot{I}=\int_0^{t_1}F\left(t,q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k,\dddot{q}_k\right)dt. \tag{9}$$

Мінімум функціоналу (9) надає рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k}-\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial F}{\partial \dddot{q}_k}=0,\ \left(k=1,2,...,S\right). \tag{10}$$

При використанні комплексного критерію для визначення оптимального режиму руху машини чи механізму критерій слід подати у безрозмірній формі. Такий критерій, як зазначено вище, – лінійна згортка окремих критеріїв у вигляді безрозмірних питомих дій. Для безрозмірних питомих дій необхідно знати вирази мінімально можливих витрат механічних засобів. Ці витрати обчислюють підстановкою законів зміни узагальнених координат $q_k\left(t\right)$, отриманих у результаті розв‘язку рівнянь (4), (6), (8), (10), у підінтегральні функції функціоналів (3), (5), (7), (9).

У даній роботі розглянемо критеріальну дію, що виражається функціоналом:

$$\dot{I}=\int_0^{t_1}F\left(t,q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k,\dddot{q}_k,q_k^{(IV)}\right)dt. \tag{11}$$

Мінімум функціоналу (11) надає рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_k}-\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial F}{\partial \dddot{q}_k}+\frac{d^4}{dt^4}\frac{\partial F}{\partial q_k^{(IV)}}=0,\ \left(k=1,2,...,S\right). \tag{12}$$

Надамо функціоналу (11) конкретного вигляду. Він відповідає моделі механізму підйому вантажу краном. Нехай $L$ – довжина канату, на якому підвішений вантаж, $\theta\left(t\right)$– кут відхилення канату з вантажем від вертикалі (точкою підвісу, зазвичай, є центр мас рухливого вантажного візка).

У якості $t_1$ візьмемо час пуску (розгону) вантажного візка (рис. 1).

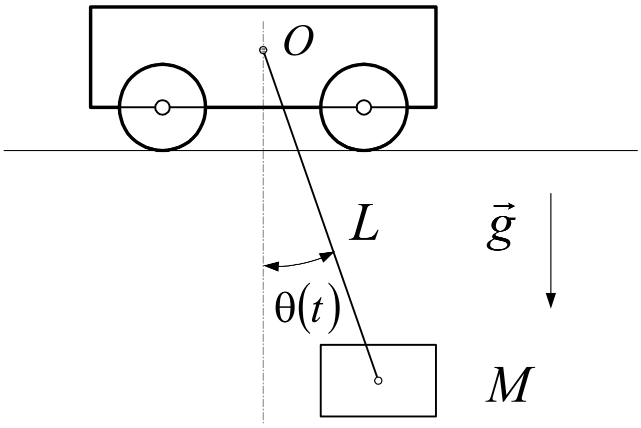


Рис. 1. Модель задачі ( $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, $M$ – маса вантажу)

Узагальнена координата $X(t)$ горизонтального руху вантажу за малих відхилень канату від вертикалі у моменти пуску системи ( $\theta(t) << 1$ ) має вид:

$$X(t) = L \cdot \theta(t). \tag{13}$$

Безрозмірний функціонал (11) набуває вигляду (і умова його мінімуму):

$$\int_0 \left[ \theta^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} + \frac{\ddot{\theta}^2}{\omega^4} + \frac{\dddot{\theta}^2}{\omega^6} + \frac{\left(\theta^{(IV)}\right)^2}{\omega^8} \right] dt \to \min . \tag{14}$$

Слід зазначити, що при $L \approx 10\,м$ власна частота коливань математичного маятника (ідеальної моделі коливань вантажу) має вигляд:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 1 \, {}^{рад}\!/_{c} , \tag{15}$$

і менша за $\omega$ при $\tau_{\text{розгону}} \approx 1c$. Остання складає $\omega \approx 6 \, {}^{рад}\!/_{c}$ .

Отже, процес розгону системи характеризує частота $\omega$, а не $\Omega$, що й призводить у процесі пуску до інтенсивних коливних рухів з досить великою частотою ($\omega$), яка перевищує власну (резонансну) частоту системи ($\Omega$). Такі інтенсивні коливні рухи системи можуть призводити до її перевантажень, тому важливим є запуск системи таким чином, щоб ці коливання були якомога меншими. Саме ця обставина й визначила вид функціоналу (14), який слід мінімізувати. Використовуючи (12), для реалізації умови (14) маємо:

$$\theta - \frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} + \frac{\theta^{(IV)}}{\omega^4} - \frac{\theta^{(VI)}}{\omega^6} + \frac{\theta^{(VIII)}}{\omega^8} = 0 \tag{16}$$

Вважаючи $\theta \sim e^{\lambda t}$, де $\lambda$ – власне число задачі (16), можна отримати для $\lambda$ характеристичне рівняння:

$$\lambda^8 - \omega^2\lambda^6 + \omega^4\lambda^4 - \omega^6\lambda^2 + \omega^8 = 0. \tag{17}$$

Якщо ввести заміну $\lambda^2 = m$, то замість (17) матимемо:

$$\left( \frac{\omega^4}{m^2} + \frac{m^2}{\omega^4} \right) - \left( \frac{\omega^2}{m} + \frac{m}{\omega^2} \right) + 1 = 0 . \tag{18}$$

Рівняння (18) є зворотнім і може бути розв‘язане з використанням підстановки:

$$Z = \frac{\omega^2}{m} + \frac{m}{\omega^2}, \; Z > 0 . \tag{19}$$

Замість (18) отримаємо:

$$Z^2 - Z - 1 = 0 . \tag{20}$$

Додатній корінь (20) має вид:

$$Z = \frac{1 = \sqrt{5}}{2}. \tag{21}$$

Тоді для $m$ маємо рівняння:

$$\frac{\omega^2}{m} + \frac{m}{\omega^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{22}$$

Корені (22) мають наступні значення:

$$m_{1,2} = \lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{2}\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4}\right\}. \tag{23}$$

Враховуючи ту обставину, що підкореневий вираз у (23) від'ємний, можна одержати:

$$m_{1,2} = \lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{2}\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \pm i\sqrt{4 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right\}. \tag{24}$$

Якщо подати $m_{1,2}$ (24) у показниковій формі (комплексних чисел), то матимемо:

$$m_{1,2} = \omega^2 e^{\pm i\phi}, \ \phi = arctg\left\{\frac{\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}}{\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}\right\}. \tag{25}$$

Тоді:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\omega e^{\pm\frac{i\phi}{2}}. \tag{26}$$

Розв'язки (16), котрі є зростаючими у часі, мають вигляд:

$$\theta(t) \sim e^{\lambda_{1,2}t}, \ \lambda_{1,2} = \omega\left\{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \pm i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}. \tag{27}$$

Розв'язки (16), котрі є спадними у часі, мають вигляд:

$$\theta(t) \sim e^{\lambda_{3,4}t}, \ \lambda_{3,4} = -\omega\left\{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \pm i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\}. \tag{28}$$

За одиницю часу розв'язки (27) зростають, а розв'язки (28) спадають у $e^{\omega\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ разів за своєю амплітудою (тобто відбувається розгойдування вантажу на канаті, що є небажаним).

Процес розгойдування вантажу зі зростаючою амплітудою (як, до речі, й зі спадною амплітудою) у часі відбувається з частотою $\omega^*$:

$$\omega^* = \omega\sin\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{29}$$

На рис.2 зображені залежності $\theta(t)$ для розгойдування вантажу згідно з залежностями (27)-(29). Слід зазначити, що вказані коливання відбуваються з частотою $\omega^*$.

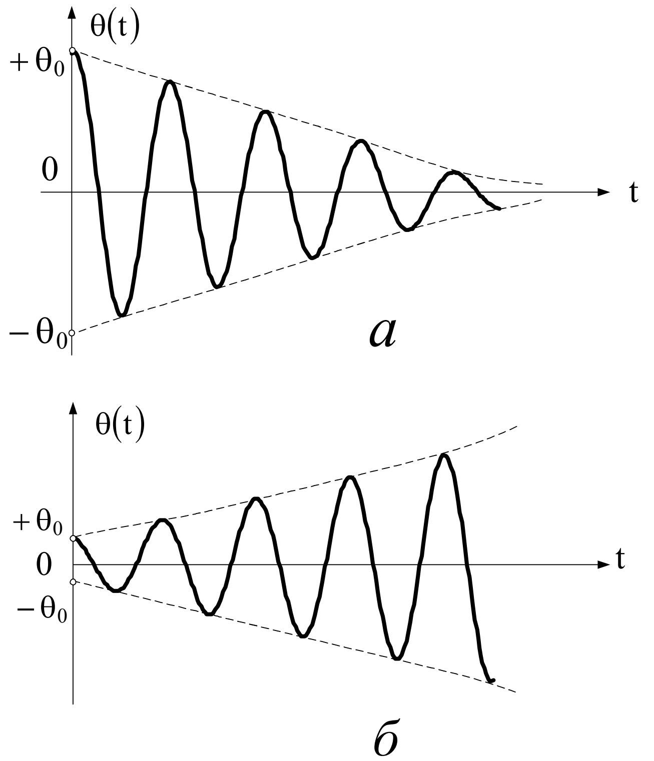


Рис.2. Залежність $\theta(t)$ для розгойдування вантажу на канаті:

*а* – спадна, *б* – зростаюча ( $\theta_0$ – початкове значення кута відхилення).

Щодо комплексних критеріїв динамічного вдосконалення механізмів та машин (у разі, коли не використовуються експертні оцінки), слід зазначити наступне.

При аналізі багатокритеріальних задач [6-8] з набором чітко ранжованих за ступенем важливості критеріїв можна використати підхід, який дозволяє визначити лексикографічно оптимальний розв‘язок задачі руху [9-11].

У [9] дається таке визначення лексикографічно оптимального розв‘язку багатокритеріальної задачі.

Позначимо окремо взяті критерії $K_r(x)\to \min$, $r=1,2,...S$. Нехай всі окремі критерії, що утворюють векторний критерій $K=(K_1, K_2, .., K_S)$, чітко впорядковані за ступенем важливості так, що при порівнянні пари розв‘язків у першу чергу використовується перший критерій $K_1$ і найкращим вважається той розв‘язок, для якого значення цього критерію менше; якщо значення першого та другого критерію для обох розв‘язків стають рівними, то використовується другий критерій, і перевага надається тому рішенню, для котрого його значення менше; якщо ж і другий критерій не дозволяє виділити найкращий розв‘язок, залучається третій окремо взятий критерій і т.д. до $K_S$. Вказане лексикографічне відношення переваги формально задають наступним чином:

Розв‘язку $X$ віддають перевагу над розв‘язком $X'$, якщо виконується одна з $S$ умов:

$$\begin{cases} 1)\ K_1(X)<K_1(X'); \\ 2)\ K_1(X)=K_1(X');\ K_2(X)<K_2(X'); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S)\ K_l(X)=K_l(X'),\ l=1,2,...,S-1; \\ \quad K_S(X)<K_S(X'). \end{cases} \tag{30}$$

Розв‘язок $X$ лексикографічно не гірший, ніж розв‘язок $X'$, якщо виконана одна з умов (30) або ж $K(X)=K(X')$.

Лексикографічно оптимальним звуть рішення $X^*$, котре лексикографічно не гірше будь-якого іншого рішення $X$ [10]. Позначимо $X^*$ – множину всіх лексикографічно оптимальних рішень $\{X\}$. У [9] наведена наступна теорема:

Теорема. Якщо $X \subset R^1$ – замкнений обмежений опуклий багатогранник з кінцевою множиною вершин $\hat{X}$, а всі окремо взяті критерії лінійні, то існують додатні числа $\alpha_r$ такі, що множина точок мінімуму функціонала

$$F = \sum_{r=1}^{S} \alpha_r K_r \qquad (31)$$

є множиною $X^*$.

Число $\alpha_S > 0$ можна призначити довільно, а інші послідовно вибирати з умов:

$$\begin{cases} \alpha_r > \dfrac{1}{\mu_r} \sum\limits_{l=r+1}^{S} \alpha_l M_l, \\ \text{де: } 0 < \mu_r \le \inf \left| K_r(x) - K_r(X') \right|; \\ \qquad X, X' \in \hat{X}; \\ M_l \ge \max K_l(X) - \min K_l(X), \; x \in X. \end{cases} \qquad (32)$$

Таким чином, функціонал (31) дозволяє реалізувати одноетапний розв‘язок лінійної лексикографічної задачі [11] з метою відшуку оптимального рішення багатокритеріальних задач руху при динамічному вдосконаленні механізмів та машин.

**Висновки**

У випадку оптимізації динамічного стану системи з обмеженнями, які можуть бути визначальними при певних режимах роботи, поряд з основними критеріями використовуються інші і, для вдосконалення механічних систем, доцільно використовувати комплексний безрозмірний критерій, який виражається у вигляді лінійної згортки часткових критеріїв. Найбільш загальними критеріями, які можуть відображати динамічне вдосконалення машини, є такі, що отримані на основі критеріальних дій, серед яких важливе значення мають критеріальні дії за ривком та за величиною коливань системи при розгоні, мінімум функціоналу для яких надає рівняння Пуассона. Для пошуку оптимального рішення багатокритеріальних задач при динамічному вдосконалені механізмів та машин доцільно використовувати підхід, що ґрунтується на визначені лексикографічно оптимального розв’язку багатокритеріальної задачі.

*In clause the requirements to a choice of the main criteria of dynamic improvement of system are analyzed, is considered a task of definition of an optimum mode of movement of the machine for criteria by action, that is defined funkcional from generalized coordinate and its derivative, up to fourth inclusive, on an example of the mechanism of rise of a cargo by the crane. Is given a technique of the optimum decisions of tasks of movement of the machine with many criteria*

**Література**

1. Горский Б.Е., Ловейкин В.С. Применение метода удельных действий в поисковом конструировании// Горные, строительные и дорожные машины. – К.: Техніка, 1981. – Вып. 32. – С. 80-89.
2. Горский Б.Е. Динамическое совершенствование механических систем. – К.: Техніка, 1987. – 200с.
3. Ловейкин В.С. Оптимизация режима движения манипуляторных систем роботов по комплексному критерию//Вестник машиностроения. – 1988. – №2. –М.: Машиностроение.
4. Ловейкин В.С. Синтез режимов движения манипуляционных систем роботов // Тез. докл. IV Всесоюзной конференции «Автоматизация поискового конструирования и подготовка инженерных кадров». – Т. II. Волгоград, 1987.
5. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
6. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: замещения и предпочтения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
7. Дубров Ю.А., Травкин С.И. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
8. Ермольев С.В., Ларичев О.И. Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985. – 32 с.

9. Подиновский В.В., Гаврилов В.И. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. - М.: Советское радио, 1977. – 192 с.
10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Паретооптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
11. Ларичев О.И., Никифоров А.Д. Аналитический обзор процедур решения многокритериальных задач математического программирования // Экономика и математические методы. – 1987. – №3. – С. 50-62.

*Одержано 18.10.2002 р.*