УДК 536.12
А.Олійник, канд.техн.наук
Івано-Франківський державний технічний університет нафти і газу

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМАЦІЇ ОСІ ТРУБОПРОВОДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ЕРМІТА

З використанням інтерполяційних поліномів Ерміта розглянуто варіаційну задачу, до якої зводиться задача визначення конфігурації осі трубопроводу під дією комплексу навантажень. Вважається, що для деякої множини точок осі відомими є їх координати, кути нахилу до горизонтальної осі та кривини лінії осі в цих точках. Побудовано розрахунковий алгоритм задачі в загальному випадку, досліджено умови збіжності. Наведений метод є одним з варіантів методу Релея-Рітца, вибір техніки інтерполяції дозволяє точно задовольнити умови, що накладаються на траєкторію осі.

При дослідженні напружено-деформованого стану об'єктів нафтогазового комплексу (трубопроводи магістральні та технологічні, елементи конструкцій компресорних станцій, штангові колони тощо) виникають задачі, пов'язані з мінімізацією функціоналів виду:

$$\Phi(x,u,u',u'') = \int_a^b \left(Au''(x)^2 + Bu'(x)^2 + Cu(x)\right)dx, \quad (1)$$

де $u(x)$ - осьові переміщення; $u'(x), u''(x)$ - відповідно перша та друга похідні функції переміщення по координаті x; A, B, C - деякі постійні величини або функції від координати вздовж осі трубопроводу x. Актуальним є питання визначення класу функцій, серед яких буде знаходитись розв'язок задачі (1). В задачах технічної діагностики, оптимізації технологічних процесів, при вирішенні яких необхідно мати інформацію про напружено-деформований стан об'єктів, $u(x)$ задається, як правило, або набором значень на деякій розрахунковій сітці, введеній на відрізку $[a,b]$, або інформацією про значення не тільки переміщень, але й про кути нахилу осі досліджуваного тіла до горизонту та кривину осі. В такому випадку для побудови аналітичного подання функції $u(x)$ використовуються інтерполяційні та апроксимаційні процедури різного виду: інтерполяційні кубічні сплайни, згладжуючі кубічні сплайни, інтерполяція з використанням многочленів Ерміта [1]. При використанні останніх вдається побудувати збіжний алгоритм пошуку екстремуму функціоналу (1) за наявністю обмеженої інформації про поведінку осі досліджуваної ділянки трубопроводу (наприклад, про поведінку ділянки тільки в граничних точках ділянки).

Нехай система координат зв'язана з початком досліджуваної ділянки, точка $x=0$ є координатою початку, а $x=l$ - координатою кінцевої точки ділянки, відомі умови:

$$u(0)=0, \;\; u'(0)=C_1, \;\; u''(0)=0, \; u(l)=h, \;\; u'(l)=0, \; u''(l)=0. \quad (2)$$

Вказані умови відповідають наступній практичній задачі: нехай в точці $x=0$ відома координата точки осі, кривина осі рівна нулю (ділянка в точці $x=0$ є прямолінійною), а кут нахилу осі до горизонталі α є невідомим, параметр $C_1 = tg\,\alpha$ підлягає визначенню. В точці $x=l$ відомою є координата точки осі, кут нахилу осі та кривина осі в цій точці є нульовими. Мінімізація функціоналу (1) здійснюється серед сімейства кривих, що задовольняють умовам (2), їх аналітична структура визначається з використанням многочленів Ерміта п'ятого степеня виду:

$$H_5(x) = C_1 \cdot C_0(x) + hC_2(x). \tag{3}$$

Загальний вигляд многочлена $C_0(x)$ при цьому записується у вигляді:

$$C_0(x) = (x-l)^3 x \cdot (\alpha x + \beta). \tag{4}$$

Значення коефіцієнтів α та β визначаються з умов, які випливають з (2):

$$C_0'(0) = 1,\ C_0''(0) = 0 \tag{5}$$

з використанням наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta = \dfrac{1}{(x-x_2)^3}, \\ \alpha(8x_1 - 2x_2) + 6\beta = 0; \end{cases} \tag{6}$$

де $x_1 = 0,\ x_2 = l$, розв'язком якої є:

$$\alpha = -\frac{3}{l^4} \qquad \beta = -\frac{1}{l^3}. \tag{7}$$

Отже,

$$C_0(x) = (x-l)^3 x\left(-\frac{3x}{l^4} - \frac{1}{l^3}\right). \tag{8}$$

Згідно з побудовою, виконуються умови (5).

Многочлен $C_2(x)$ визначається з урахуванням умов (2), його загальний вигляд подається у виді:

$$C_2(x) = x^3\left(\alpha x^2 + \beta x + c\right), \tag{9}$$

коефіцієнти $\alpha,\ \beta,\ c$ визначаються з урахуванням умов:

$$C_2(l) = 1,\quad C_2'(l) = 0,\quad C''(l) = 0 \tag{10}$$

шляхом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\begin{cases} \alpha l^2 + \beta l + c = \dfrac{1}{l^3} \\ 5\alpha l^2 + 4\beta l + 3c = 0 \\ 20\alpha l^2 + 12\beta l + 6c = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Звідки одержується:

$$\alpha = \frac{6}{l^5},\ \ \beta = -\frac{15}{l^4},\ \ c = \frac{10}{l^3}, \tag{12}$$

а отже,

$$C_2(x) = \frac{6x^5 - 15lx^4 + 10x^3l^3}{l^5} \tag{13}$$

Таким чином, для (3) з урахуванням (8) та (13) одержується:

$$H_5(x) = C_1\left[(x-l)^3 x\left(-\frac{3x}{l^4} - \frac{1}{l^3}\right)\right] + h\left[\frac{6x^5 - 15lx^4 + 10x^3l^2}{l^5}\right]. \tag{14}$$

В багатьох випадках подання (14) є цілком достатнім для визначення модельного положення осі, невідомі коефіцієнти при цьому визначаються шляхом задання двох додаткових граничних умов. Якщо на конфігурацію осі накладено більш складні умови виду (1), то шляхом підстановки (14) в функціонал (1), який для випадку дослідження ділянки магістрального трубопроводу набуває вигляду:

$$\Phi(x,u,u',u'')=\int_a^L\left[\frac{1}{2}EIu''(x)^2-\frac{1}{2}Pu'(x)^2-qu(x)\right]dx, \qquad (15)$$

де E - модуль Юнга матеріалу трубопроводу, I - момент інерції січення, P - повздовжня сила, що діє на трубопровід, q - величина погонного навантаження, одержуємо функцію кількох змінних, число яких може змінюватись в залежності від задачі, що виникає при дослідженні реальних об'єктів.

Зокрема, якщо величини E, I, P, q є заданими і постійними, то одержана функція буде функцією трьох змінних: C_1, h та l, причому, оскільки з (14) витікає, що

$$H_5'(x)=C_1\left(\frac{-15x^4+32lx^3-18l^2x^2+l^4}{l^4}\right)+h\left(\frac{30x^4-60lx^3+30x^2l^2}{l^5}\right), \qquad (16)$$

$$H_5''(x)=C_1\left(\frac{-60x^3+96lx^2-36l^2x}{l^4}\right)+h\left(\frac{120x^3-180lx^2+60xl^2}{l^5}\right), \qquad (17)$$

то одержана функція кількох змінних $F(C_1,h,l)$, як видно з (15), після виконання інтегрування набуває вигляду:

$$F(C_1,h,l)=F_1(l)C_1^2+F_2(l)C_1h+F_3(l)h^2+F_4(l)C_1+F_5(l)h+F_6(l), \qquad (18)$$

тобто вона є квадратичною формою по невідомих C_1 та h. Залежність $F_i(l)$ є степенева функція від l. Таким чином, якщо величина l є відомою, то дослідження функції (18) як функції кількох змінних проводиться за відомим алгоритмом знаходження екстремуму квадратичної форми: спочатку перевіряється необхідна умова екстремуму:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial C_1}=2C_1F_1(l)+F_2(l)h+F_4(l)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial h}=F_2(l)C_1+2F_3(l)h+F_5(l)=0;\end{cases} \qquad (19)$$

звідки знаходяться координати $(C_1^*,\ h^*)$ стаціонарної точки функції $F(C_1,h)$:

$$\begin{cases}C_1^*=\dfrac{\begin{vmatrix}-F_4(l) & F_2(l)\\ -F_5(l) & 2F_3(l)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2F_1(l) & F_2(l)\\ F_2(l) & 2F_3(l)\end{vmatrix}}=\dfrac{-2F_4(l)F_3(l)+F_2(l)F_5(l)}{4F_1(l)F_3(l)-F_2^2(l)}\\[4mm] h^*=\dfrac{\begin{vmatrix}2F_2(l) & -F_4(l)\\ F_2(l) & -F_5(l)\end{vmatrix}}{4F_1(l)F_3(l)-F_2^2(l)}=\dfrac{-2F_1(l)F_5(l)+F_4(l)F_2(l)}{4F_1(l)F_3(l)-F_2^2(l)}\end{cases} \qquad (20)$$

та перевіряється знаковизначеність матриці других частинних похідних функції $F(C_1,h)$ з метою визначення типу екстремуму. В більшості випадків задач, що виникають при реалізації моделей реальних технічних систем, вказана матриця є додатною визначеною, тому функція $F(C_1,h)$ буде приймати мінімальне значення в точці (C_1^*,h^*). Якщо ж величина l є невідомою, то для знаходження екстремуму функції $F(C_1,h,l)$ необхідно застосувати ітераційну процедуру, основану на реалізації методу найшвидшого спуску [2]. При цьому важливого значення набуває вибір початкового наближення $(C_1^o,\ h^o,\ l^o)$ для розв'язку поставленої задачі. Проблема знаходження початкового наближення, для вирішення якої необхідно мати певну інформацію про інтервал знаходження розв'язку, в даному випадку не є складною, оскільки всі вказані величини - C_1, h, l - мають цілком конкретний фізичний зміст, а отже, відомим є інтервал знаходження розв'язку – величина кута між віссю труби та координатною віссю, величина підйому або опускання труби в точці $x = l$, а також довжина досліджуваної ділянки є величинами, що можуть бути оцінені або візуально, або з використанням апаратних методів вимірювання. Тому реалізується наступна процедура знаходження екстремуму функції $F(C_1, h, l)$ ітераційного типу:

$$C_1^{i+1} = C_1^i - \lambda_i \frac{\partial F}{\partial C_1}\left(C_1^i, h^i, l^i\right), \tag{21}$$

$$h^{i+1} = h^i - \lambda_i \frac{\partial F}{\partial h}\left(C_1^i, h^i, l^i\right), \tag{22}$$

$$l^{i+1} = l^i - \lambda_i \frac{\partial F}{\partial l}\left(C_1^i, h^i, l^i\right), \tag{23}$$

де C_1^i, h^i, l^i є значенням відповідних величин на i-тому кроці ітераційного процесу, λ_i - параметр ітераційного процесу, який знаходиться наступним чином: величини (21)-(23) підставляються в функцію $F(C_1, h, l)$, при цьому одержується деяка функція від λ:

$$F\left(C_1^{i+1}, h^{i+1}, l^{i+1}\right) = R(\lambda_i)\,. \tag{24}$$

За відомими методами знаходження екстремуму функції однієї змінної [2] знаходиться величина:

$$\lambda_i^* = \inf_{\lambda} R(\lambda_i), \tag{25}$$

яке підставляється в (21) – (23) і здійснюється перехід до наступної ітерації. Критерієм зупинки ітераційного процесу є одна з умов:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial C_1}\left(C_1^i, h^i, l_i\right)\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial h}\left(C_1^i, h^i, l_i\right)\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial l}\left(C_1^i, h^i, l_i\right)\right| < \varepsilon, \tag{26}$$

$$\left|C_1^i - C_1^{i+1}\right| < \varepsilon, \quad \left|h^i - h^{i+1}\right| < \varepsilon, \quad \left|l^i - l^{i+1}\right| < \varepsilon, \tag{27}$$

ε - заданий рівень точності знаходження розв'язку задачі. Збіжність ітераційного процесу доводиться в багатьох теоретичних роботах з чисельних методів та теорії оптимізації. Запропонований метод розв'язку задачі мінімізації функціоналу є одним з варіантів методу Релея-Рітца [3], при цьому використання подання (3) дозволяє задовольнити граничні умови задачі та умови всередині досліджуваної області. Якщо явний ітераційний метод задається у вигляді:

$$\frac{\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k}{\tau_{k+1}} + A\bar{x}_k = f\,, \tag{28}$$

де A – додатньо визначена, симетрична матриця з діагональним переважанням; $\bar{x}_k$ - вектор, що підлягає визначенню в процесі реалізації ітерацій; τ_k - параметр ітераційного процесу, то збіжність ітераційного процесу (28) витікає з того, що норми різниць між точним розв'язком та значеннями на першому та n-ому кроках ітераційного процесу перебувають у співвідношенні:

$$\left\|\bar{x}_n - \bar{x}\right\| \le \rho_0^n \left\|\bar{x}_0 - \bar{x}\right\|\;, \tag{29}$$

де $\rho_0 = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \dfrac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}$; $\lambda(A)$ - власні значення матриці A. Якщо $|\rho_0| < 1$, то умова збіжності виконується. Оскільки для додатньо визначеної матриці всі власні значення додатні, то $\xi \le 1$, а функція $\rho_0 = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$ при $\xi > 0$ задовольняє умові:

$$|\rho_0| < 1, \tag{30}$$

оскільки нерівність

$$-1 < \frac{1-\xi}{1+\xi} < 1 \tag{31}$$

при додатніх значеннях ξ виконується на півпрямій $\xi \in [0; +\infty)$.

Висновки

1. Використання многочленів Ерміта для визначення конфігурації осі трубопроводу дозволяє врахувати не тільки координати її точок, але й кути нахилу та кривини.
2. Варіаційна задача (1) або (15) зводиться до задачі знаходження екстремуму функції кількох змінних, задання конфігурації осі у вигляді (3) дозволяє виділити клас функцій, серед яких знаходиться розв'язок, що задовольняють відомим умовам задачі на деякій множині точок.
3. Ітераційні процедури знаходження екстремуму функціоналу (15) серед функцій виду (14) є збіжними.

The variotional problem of the pipeline's axe configuration definition under the action of complex loading is considered using the Hermite interpolational polynomial. The coordinates, angles between the considered axe and horizontal axe and the axe's curvature are known for the some defined points. The computational algorithm is designed in general form, the convergence conditions are investigated and tested. The choosing of interpolational technique allows to satisfy the condition for the axe's trajectory.

Література

1. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. - М.:Наука, 1989. - 432 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. - М.: Машиностроение, 1991. - 336с.

Одержано 20.12.2002 р.