УДК. 669. 539

Т.Рибак, докт. техн. наук; М.Сташків
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

СПЕЦИФІКА РОЗРАХУНКУ ДЕЯКИХ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТРИМКИХ КОНСТРУКЦІЙ МАШИН

У статті розглянуто особливості навантаження та деформації тонкостінних коробчатих елементів рамних конструкцій. Зазначено особливості розрахунку тонкостінних елементів стержневих систем модифікованим методом мінімуму потенціальної енергії. Проведено огляд праць з теорії стисненого кручення. Вказано на необхідність врахування депланації як силового фактору, який суттєво змінює перерозподіл напружень у перетинах тонкостінних стержнів відкритого і замкнутого профілів та доведено правомірність застосування розрахунку тонкостінних стержнів модифікованим методом мінімуму потенціальної енергії з врахуванням лише енергії депланації.

Умовні позначення

$U^{(i)}_M$, $U^{(i)}_K$, $U^{(i)}_{B\omega}$	-	потенціальна енергія згину, кручення та стисненого кручення, яка накопичується *i*–тим елементом рами;
EI_i, $GI_{\kappa i}$, $EI_{\omega i}$	-	відповідно згинальна, крутна та секторіальна жорсткості на *i*–тій ділянці рами;
M, K	-	згинальний та крутний моменти відповідно, Н·м;
B_ω, B	-	згинально – крутний бімомент та момент біпари, Н·м^2;
$\boldsymbol{\theta}$	-	погонний кут закручування, град/м;
$\boldsymbol{\omega(s)}$	-	секторіальна площа по дузі s, м^2;
ω_K	-	подвійна площа, охоплена середньою лінією контуру, м^2.

Рамні конструкції машин у більшості випадків складаються з тонкостінних елементів відкритого профілю, типу швелерів, кутників, двотаврів, а також замкнутого профілю, типу тягнутих або зварних труб круглого чи прямокутного перетину.

Особливості монтажу силових та функціональних установок на рамних конструкціях з тонкостінних елементів полягають у тому, що реакції від опор не завжди прикладені в центрі згину профілю. Якщо зосереджене чи розподілене навантаження, тобто реакції опор, прикладені ексцентрично відносно осей симетрії поперечного перерізу профілю, то профіль знаходиться в складному напруженому стані. У такому випадку в елементах конструкції, крім згинальних моментів, додатково діють крутні моменти від ексцентрично прикладених навантажень. При крученні тонкостінних стержнів їх поперечні перерізи не залишаються плоскими, а коробляться, тобто окремі точки перерізу виходять зі своєї площини (депланують). Тому такий вид деформації називають депланацією.

Так як рами машин в цілому є зварними конструкціями, то їх поздовжні та поперечні елементи з'єднані жорстко, що перешкоджає вільному переміщенню (закручуванню) поперечних перерізів елементів тонкостінного профілю. Такий стан конструкції, коли згин поєднується з обмеженим крученням, називається *стисненим крученням*, тобто в поперечних перерізах профілю у такому випадку виникають нормальні напруження, які зумовлені дією кручення. Як наслідок, виникнуть і додаткові дотичні напруження, які характерні для деформації згину, але зумовлені знову ж таки крученням.

Нормальні напруження, які виникають у поперечних перерізах тонкостінного стержня при стисненому крученні, утворюють статично – врівноважену систему сил. Такі самоврівноважені системи сил виникають і при стисненому крученні суцільного бруса некруглого перетину (у стержнях круглого перетину такі системи сил не виникають). Але в цьому випадку вони мало впливають на роботу бруса і не враховуються при розрахунку. Справа в тому, що за принципом Сен – Венана у стержні суцільного поперечного перерізу характер розподілу навантажень по торцю має вплив на напружений стан лише безпосередньо поблизу торця; вже на незначній відстані від торця (порядку поперечного розміру бруса) розподіл напружень визначається лише рівнодіючою сил, які прикладені до торця.

Для тонкостінних стержнів відкритого чи замкнутого профілю деформації від врівноваженої системи нормальних сил затухають відносно повільно і тому повинні враховуватись при розрахунку.

Таким чином, особливості розрахунку стержнів тонкостінного профілю зумовлюються неможливістю застосування принципу Сен–Венана і необхідністю розглядати не тільки сумарні силові фактори в перерізі (крутний та згинний моменти, поздовжня та поперечна сили), а й фактори, які визначають розподіл самоврівноважених напружень (бімомент).

Перші розробки з теорії стисненого кручення слід віднести до 1905-1906 років, коли С.П.Тимошенко [1] розробив теорію розрахунку балки коритного профілю за допомогою методу мінімуму потенціальної енергії, основні принципи якого (принцип найменшої роботи) вперше було встановлено ще у 1858 році Ф.Менабреа [2]. Повне доведення цього принципу було дано Кастиліано [3, 4], який зробив його основним методом розв'язку статично невизначених систем.

Перші викладки методу мінімуму потенціальної енергії було зроблено Мором [5] в кінці дев'ятнадцятого століття. На початку двадцятого століття С.П. Тимошенко застосував метод мінімуму потенціальної енергії до розрахунку статично невизначених систем. Він же дав повну викладку основних положень даного методу [1], завдяки чому енергетичний метод став широко доступним для інженерних розрахунків і відомим як "енергетичний метод за Тимошенком".

Сучасний погляд на теорію стисненого кручення висловив у 1928 році Вагнер [6], який за допомогою гіпотези про недеформованість контуру поперечного перетину вперше встановив, що у тонкостінних профілях нормальні напруження при стисненому крученні розподіляються за особливим законом, який, згідно з термінологією В.З. Власова , називається "законом секторіальних площ" [7]. Однак Вагнер помилився у припущенні, що згинальна та крутна форми стійкості тонкостінних стержнів не залежать одна від одної. Пізніше В.З. Власов довів, що обидві форми втрати стійкості практично не зустрічаються окремо у чистому вигляді [8].

У 1932 році Фрідріх та Ганс Блейхи дали більш загальний розв'язок стисненого кручення і втрати стійкості від кручення, тобто прийшли до системи диференціальних рівнянь, яку вивели енергетичним способом [9].

Однак у роботах Блейхів В.З. Власов знайшов ряд помилок [7]. Перш за все, вони не врахували, що при крученні закон плоских перетинів не виконується, і замінили задані у поперечному перетині нормальні напруження рівнодіючою, прийнявши її за зосереджену силу, яка прикладена у центрі перетину. Друга їх помилка полягала у тому, що свої розв'язки для відкритих профілів вони перенесли на замкнуті профілі.

У 1936 році В.З. Власов запропонував повну теорію розрахунку тонкостінних профілів при сумісній дії згинання та кручення. Він відмовився від профілю як "стержня" і розглянув профіль як тонкостінну складчасту систему, котра працює не тільки на осьові (нормальні та зсувні) сили, але й на моменти, які викликають згинання профілю у поперечному напрямку. В.З. Власов встановив загальний закон розподілу нормальних напружень у перетині, тобто нормаль напруження у перетині, у найбільш загальному випадку, розподіляються за законом секторіальних площ. Свою теорію він виклав у книзі "Тонкостінні просторові системи".

Однак використання названих фундаментальних розробок у інженерній практиці залишається проблематичним через відсутність ефективних методик, котрі дозволили б розкрити статичну невизначеність складних конструкцій з врахуванням бімоментів (і моментів біпари) як внутрішніх невідомих і алгоритмізувати ці розрахунки, а тим паче у динамічній постановці задач.

Найбільш ефективною методикою розрахунку рам сільськогосподарських машин з врахуванням депланації їх елементів є модифікований метод мінімуму потенціальної енергії [9], який дозволяє враховувати основні особливості конструкцій, тобто вплив на напружено – деформований стан рам різного виду енергій деформації згину,

кручення, стиснутого кручення тощо. Суть цієї методики полягає в адитивності різних видів потенціальної енергії деформації рамної конструкції, яка складається з відкритих профілів і виділенні її головної частини – потенціальної енергії деформації кручення її елементів. Це зумовлено тим, що жорсткість на згин *EI* прокатних профілів типу швелерів приблизно у 200 разів більша у порівнянні з жорсткістю на кручення $GI_к$. На підставі цих досліджень при розрахунку енергетичним методом стержневих систем, які складаються з елементів відкритого профілю, нехтують згинальною потенціальною енергією деформації як величиною, на декілька порядків нижчою у порівнянні з потенціальною енергією деформації кручення.

Основні співвідношення методу мінімуму потенціальної енергії [10]:

а) потенціальна енергія системи без врахування стисненого кручення:

$$U = \sum_{(i)} U_M^{(i)} + \sum_{(i)} U_K^{(i)} \; ; \tag{1}$$

б) потенціальна енергія системи з врахуванням стисненого кручення:

$$U = \sum_{(i)} U_M^{(i)} + \sum_{(i)} U_{B_\omega}^{(i)} \; , \tag{2}$$

Як доведено у роботах [1, 5, 10], потенціальними енергіями зсуву та розтягу – стиску нехтують через їх незначну величину. Тому дослідження в запропонованій роботі будуть проводитись з урахуванням лише наступних енергій деформації:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{i})} &= \frac{1}{2EI_i} \cdot \int_{L_i} M^2 dl \; ; \\ \mathrm{U}_{\mathrm{K}}^{(\mathrm{i})} &= \frac{1}{2GI_{Ki}} \cdot \int_{L_i} K^2 dl \; ; \\ \mathrm{U}_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{i})} &= \frac{1}{2EI_{\omega i}} \cdot \int_{L_i} (B_\omega + B)^2 dl \, . \end{aligned} \tag{3}$$

На основі формул (3) можна дослідити вплив згину, кручення та депланації на тонкостінні стержні замкнутого коробчатого профілю. Для прикладу розглянемо прямокутну трубу 60×100×4мм (рис.1), матеріал *Ст5Гпс* (E=2·10^{5}МПа, G=8·10^{4}МПа).

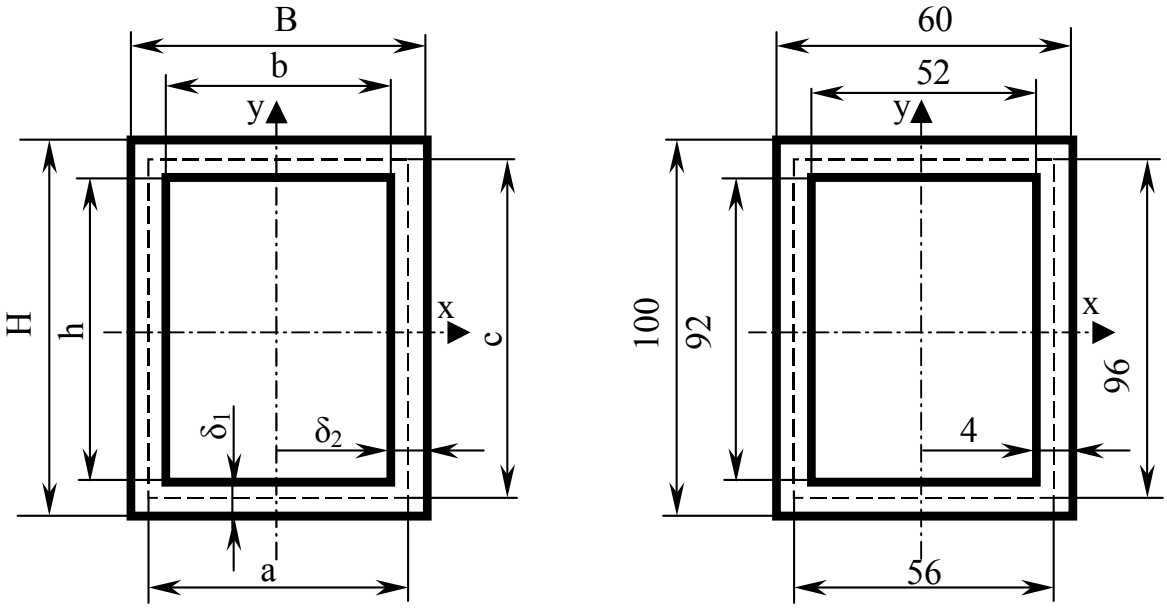

Рис.1. Розрахункова схема до визначення моментів інерції коробчатого перетину

Напружено – деформований стан конструкції характеризується жорсткістю її складових елементів, а також механічними властивостями закладеного матеріалу.

Згинальні та крутні моменти інерції тонкостінного замкнутого прямокутного перерізу визначаються з відомих залежностей [5]:

$$I_x = (BH^3 - bh^3)/12 = 1{,}6\cdot 10^{-6}\text{м}^4;$$
$$I_y = (B^3H - b^3h)/12 = 0{,}7\cdot 10^{-6}\text{м}^4;$$
$$I_K = I_x + I_y = 2{,}3\cdot 10^{-6}\text{м}^4.$$

Секторіальний момент інерції тонкостінного замкнутого прямокутного перерізу з постійною товщиною стінок ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$) рівний [11]:

$$I_\omega = \frac{a^2c^2(a-c)^2}{24(a+c)}\cdot\delta = 5\cdot 10^{-11}\text{м}^6.$$

Характеристики жорсткості, відповідно, визначаються:

- згину: $EI_y = 1{,}4\cdot 10^5$ Н·м^2;
- кручення: $GI_к = 1{,}84\cdot 10^5$ Н·м^2;
- депланації: $EI_\omega = 10$ Н·м^4.

Як бачимо, згинальна і крутна жорсткості тонкостінних стержнів замкнутого профілю за величиною практично однакові, а жорсткість стержнів при депланації на декілька порядків нижча від згинальної та крутної жорсткостей. Тому потенціальна енергія деформації від депланаціїї, навіть при невеликих значеннях бімоментів, буде значно більша, ніж енергія деформації згину чи кручення.

Визначимо, при яких геометричних розмірах замкнутий прямокутний профіль не спотворюється при крученні.

При крученні тонкостінних стержнів осьове зміщення будь – якої точки на дузі s профілю визначається за формулою [12]:

$$\varpi = \theta\cdot\left[\omega(s) - \frac{\omega_K}{\oint\frac{ds}{\delta}}\cdot\int_0^s\frac{ds}{\delta}\right]. \qquad (4)$$

Вважаючи, що депланація перетинів стержня відсутня, отримаємо:

$$\omega(s) - \frac{\omega_K}{\oint\frac{ds}{\delta}}\cdot\int_0^s\frac{ds}{\delta} = 0. \qquad (5)$$

Для кутової точки тонкостінного профілю, зображеного на рис.1, матимемо:

$$\omega(s) = \int_0^s r\cdot ds = \int_0^a\frac{c}{2}\cdot ds = a\cdot\frac{c}{2};$$
$$\int_0^s\frac{ds}{\delta} = \int_0^a\frac{ds}{\delta_1} = \frac{a}{\delta_1};$$

$$\oint \frac{ds}{\delta} = 2 \cdot (\frac{a}{\delta_1} + \frac{c}{\delta_2});$$

$$\omega_K = 2 \cdot a \cdot c.$$

Підставляючи ці значення у формулу (5) і спрощуючи вираз, отримаємо:

$$\delta_2 = \frac{c}{a} \cdot \delta_1 \quad \text{або} \quad \delta_1 = \frac{a}{c} \cdot \delta_2.$$

Як видно з отриманих залежностей, тонкостінний замкнутий прямокутний профіль не буде депланувати у тому випадку, коли співвідношення між товщиною та довжиною відповідних стінок будуть рівні.

Як зазначено у [12], профілі зі стінкою постійної товщини, контур яких є багатокутником, описаним навколо кола, також не спотворюються при крученні.

Справді, якщо помістити полюс в центрі кола, то відстань *r* від полюса до дотичної до контура буде постійна для всього контура і, відповідно, для таких профілів:

$$\omega(s) = r \cdot s;$$

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{s_K}{\delta};$$

$$\int_0^s \frac{ds}{\delta} = \frac{s}{\delta};$$

$$\omega_K = r \cdot s_K.$$

Підставивши отримані залежності у вираз (4), отримаємо $\varpi = 0$.

Висновки. Депланація поперечних перетинів суттєво впливає на перерозподіл напружень у тонкостінних стержнях замкнутого і відкритого профілів. Величина потенціальної енергії деформації від депланації значно більша, ніж потенціальна енергія деформації від згину та кручення. Так як потенціальна енергія від депланації для тонкостінних стержнів замкнутого прямокутного профілю є домінуючою, то при інженерних розрахунках із застосуванням методу мінімуму потенціальної енергії достатньо враховувати лише потенціальну енергію від депланації, а згинальною і крутною потенціальними енергіями деформації можна знехтувати, аналогічно як у [1, 5] нехтують потенціальними енергіями деформації розтягу – стиску та зсуву. При такому підході спрощується система алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих зусиль у стержневій системі та значно зменшується об'єм обчислювальних операцій.

The summary. In a paper the singularities of loading and strain of thin-walled elements of carriages of agricultural engineering are considered. The singularities of account of thin-walled elements of rod systems by the modified method of a minimum of a potential energy are indicated. The review of operations from the theory of an oblate torsion is carried out. The necessity of the account warping as force factor is proved which essentially changes redistribution of efforts in cuts of thin-walled rods open and closed of the profiles and legitimacy of application of account of thin-walled rods by the modified method of a minimum of a potential energy with the account only energies warping.

Література

1. Тимошенко С. П. Курс сопротивления материалов. – Л.: Гос. издат., 1940. - 587 с.
2. F. Menabrea. Nouveau principe sur la distribusion des tensions dans les systèmes élastiques. Paris, 1858.
3. Castiqliano. Nuova teoria intorno dell'equilibrio dei sistemi elastici. Atti acc. sci., Torino, 1875.
4. Castiqliano. Theorie de l'equilibre des systèmes élastiques. Turin, 1879.
5. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. H.Wagner. 25th Anniversary publication. Technische hochschule. Danzig, 1929.
7. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
8. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 408 с.

9. F.Bleich. Buckling Strength of Metal Structures. New York, 1932.
10. Рибак Т.І. Пошукове конструювання на базі оптимізації ресурсу мобільних сільськогосподарських машин. – ВАТ ТВПК "Збруч", 2002. – 330 с.
11. Урбан И.В. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Желдориздат., 1955. – 192 с.
12. Расчеты на прочность в машиностроении. Справочник в 3-х т. Т.1 / Под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1956. – 884 с.

Одержано 27.12.2002 р.