

РОЗРАХУНОК СТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

У роботі розглянуто задачі визначення стаціонарних температурних полів у двох спряжених пластинах з умовами неідеального теплового контакту та в однорідному шарі з наявною поверхнею тепловиділення типу лінійного розподіленого джерела тепла. Для знаходження наближеного розв'язку використовується метод скінченних елементів, узагальнений на випадок наявності поверхонь спряження з умовами неідеального теплового контакту.

Умовні позначення

- λ_i – коефіцієнти теплопровідності ($i = 1, 2$), Вт/(м·°С);
- α_i – коефіцієнти тепловіддачі, Вт/(м²·°С);
- h_i – товщини пластин, м;
- f – коефіцієнт тертя;
- v_0 – швидкість переміщення однієї пластини відносно другої, м/с;
- P – притискне зусилля, Н/м²;
- R_i – термічні опори площини контакту, (м²·°С) / Вт.

Вступ. Робота багатьох вузлів механізмів супроводжується виділенням тепла за рахунок відносного переміщення складових частин. Хоча вузли тертя становлять незначну частину всієї конструкції, їх вплив на її надійність дуже великий. Розвиток математичного моделювання процесів теплопереносу в конструкціях з наявністю вузлів тертя обумовлений необхідністю точного прогнозування явищ, що відбуваються на поверхнях контакту. На шляху вирішення проблеми надійності роботи конструкції виникає важливе питання розрахунку теплових полів у співдотичних елементах з урахуванням їхнього розігрівання.

Короткий аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язуванню задач про визначення контактної температури при терті присвячена велика кількість робіт. Питання визначення контактної температури та зношення робочої поверхні елементів фрикційних гальм розглядається в роботі [1]. Проблеми розрахунку складних контактних задач розглянуті в [2]. Відмічено, що важливим питанням є подальше вивчення процесу теплоутворення за рахунок тертя. У роботі [3] вказується на той факт, що за допомогою існуючих пристроїв при стендових і експлуатаційних дослідках вузлів тертя нереально отримати кількісну оцінку затрат механічної енергії на тертя через відсутність можливості розміщення в них вимірювальних засобів. Тому важливого значення при розгляді теплових процесів у таких вузлах набувають теоретичні дослідження.

Постановка задачі. Вузол тертя можна моделювати двома жорсткими пластинами скінченної ширини [4]. Розглянемо пакет Ω , який складається з двох пластин Ω_1 і Ω_2 шириною l та товщиною h_1, h_2 відповідно. В напрямку осі $0z$ пластини вважаються нескінченними. Теплові характеристики пластин різні і не залежать від температури. До верхньої частини пакету прикладене постійне в часі притискне зусилля P . Нижня частина пакету жорстко закріплена. Верхня пластина рухається по нижній зі сталою швидкістю v_0 . На площині контакту γ ($\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$) за рахунок дії сил тертя відбувається стаціонарне теплоутворення. Необхідно знайти розподіл температурних полів у пластинах за умови, що між ними існує неідеальний тепловий контакт, а бічні поверхні пластин та їх основа перебувають в конвективному теплообміні із зовнішнім середовищем.

Поставлена задача в декартових координатах зводиться до побудови розв'язку стаціонарного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial y} \right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (i=1,2), \quad (1)$$

при граничних умовах

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1} &= \alpha_1(t_1 - T_c), & \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{\Gamma_2} &= -\alpha_2(t_2 - T_c), \\ \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x} \Big|_{\Gamma_3} &= \alpha_0(t_i - T_c), & \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x} \Big|_{\Gamma_4} &= -\alpha_l(t_i - T_c), \end{aligned} \quad (2)$$

де t_1, t_2 – температура відповідно першої та другої пластини; Γ_1 – границя пакету Ω по поверхні $y = -h_1$; Γ_2 – по поверхні $y = h_2$; Γ_3 – по поверхні $x = 0$; Γ_4 – по поверхні $x = l$.

Умови неідеального теплового контакту на поверхні γ ($y=0$) приймаються такими

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} &= \frac{1}{\tilde{r}} [t], \\ \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} &= f v_0 P, \end{aligned} \quad (3)$$

де $[\varphi]$ – скачок функції φ на поверхні контакту; $\tilde{r} = \frac{1}{R_1 + R_2}$.

Для розв'язування поставленої задачі використаємо метод скінченних елементів (МСЕ). Крайовій задачі (1) – (3) поставимо у відповідність еквівалентну варіаційну задачу [5]. Знайти функцію $u \in H$, яка надає мінімального значення функціоналу енергії $\Phi(u)$. Функціонал енергії для поставленої задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \iint_{\Omega} \lambda_i \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \tilde{r} \int_{\gamma} [u]^2 d\gamma + \alpha_k \int_{\Gamma_k} u^2 d\Gamma_k - \\ &- 2 \int_{\gamma} \tilde{r} R_2 f v_0 P [u] d\gamma + 2 \int_{\gamma} f v_0 P u^+ d\gamma - 2 \beta_k \int_{\Gamma_k} u d\Gamma_k, \quad u \in H, \end{aligned} \quad (4)$$

де $k = 1, 2, 3, 4$, $\beta_k = \alpha_k t_c$, $u^+ = u(x, y)$ при $(x, y) \in \gamma \cap \partial\Omega_2$, H – множина функцій u , які на Ω належать простору Соболева W_2^1 .

Методика використання МСЕ для таких задач викладена в [5].

Для розв'язку поставленої задачі МСЕ розроблено набір програм, які реалізують приведені алгоритми для рівняння, записаного в декартових координатах [6]. В якості допустимих функцій розглянуті класи кусково-лінійних та кусково-квадратичних розривних функцій.

Розрахунок температурного поля проводився за таких вхідних даних:

$$h_1 = 0,15 \text{ м}, \quad h_2 = 0,1 \text{ м}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 50 \text{ (Вт / м} \cdot \text{°C)}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_l = 1000 \text{ (Вт / (м}^2 \cdot \text{°C))}, \\ f = 0,15, \quad v_0 = 2 \text{ м/с}, \quad P = 1 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2, \quad l = 0,3 \text{ м}, \quad \tilde{r} = 1000 \text{ (Вт / (м}^2 \cdot \text{°C))}.$$

Розподіл температурного поля по ширині пластин на їх основах та на площині тертя представлені на рис. 1. Розподіл температури по осі $0y$ на торцях і на середині ширини пластин наведено на рис.2. Суцільною лінією позначені графіки, які відносяться до першої пластини, штриховою – до другої.

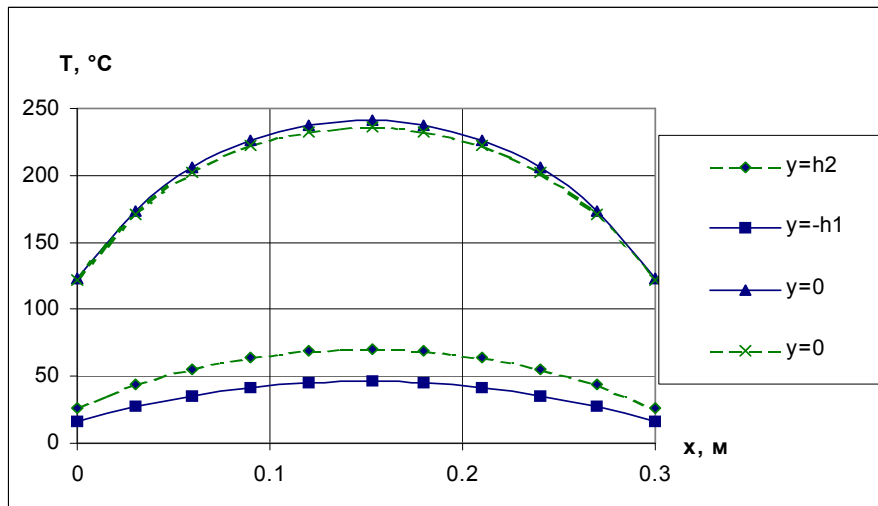


Рис.1. Розподіл температури на основах пакету і на площині тертя

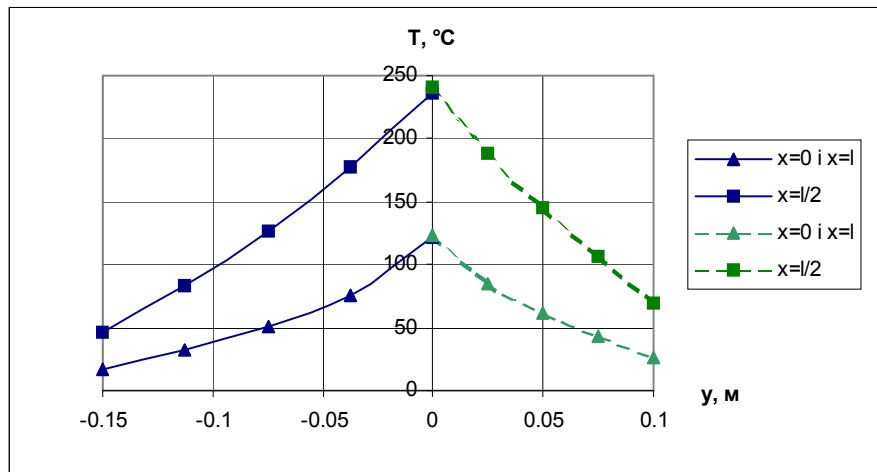


Рис.2. Розподіл температури за висотою пакету на торцях і на середині ширини

Для оцінки точності отриманого наближеного розв'язку (T_n) проводилося його порівняння із точним аналітичним розв'язком (T_m) [4]. Максимальна відносна похибка наближеного розв'язку $\delta = \left| \frac{T_m - T_n}{T_m} \right| \cdot 100\%$ у вузлових точках не перевищувала $1,2 \cdot 10^{-3} \%$

в порівнянні з точним. При цьому кількість вузлів розбиття приймалась рівною 50. Із збільшенням кількості вузлів відносна похибка числового розв'язку зменшується. Експериментально доведено, що для даної задачі використання лінійної і квадратичної апроксимації для однакового числа вузлів розбиття дає розв'язки однакового порядку точності.

Отриманий результат показує високу ефективність даного методу для розв'язування подібних задач.

Розглянемо задачу про визначення температурного поля в приповерхневому шарі земної кори при наявності в ньому нафтогазового родовища. Будемо вважати, що родовище є джерелом тепла, яке розподілене по деякій поверхні, що знаходиться на заданій глибині H від поверхні земної кори і займає область круга радіусом R . Припускаємо також, що інтенсивність тепловиділення на цій поверхні є симетричною функцією відносно центра круга. Віднесемо півпростір до циліндричної системи координат з почат-

ком координат на поверхні землі так, що вісь z направлена вниз і проходить через точку $r=0$ перпендикулярно до цієї поверхні. Задача є симетричною відносно осі z .

Для простоти розглянемо обмежену область $\Omega = \{(r, z) : r \leq R, z \leq B\}$. Поверхню $r = R$ надалі вважатимемо теплоізолюваною. Родовище моделюємо джерелом тепла, розподіленим по площині $z=H$, потужність якого є кусково-постійною функцією радіуса

$$q(r) = \sum_{i=1}^n q_i [S_-(r - R_{i-1}) - S_-(r - R_i)], \quad (5)$$

де $q_1 > q_2 > \dots > q_n > 0$, q_i – постійна, яка визначає потужність джерела тепла на i -ій ділянці; $R_0 = 0$, $R_{i-1} < R_i < R_{i+1}$, $R_n = R$, $i = 1, \dots, n$; $S_-(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$ – асиметрична одинична функція.

Розіб'ємо область Ω на дві підобласті $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Рівняння теплопровідності для знаходження розподілу теплового поля має вигляд

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} \right) = 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

де t_i – температура в підобласті Ω_i відповідно.

Позначимо границю області по поверхні $z = 0$ через Γ_1 , по поверхні $z=B$ через Γ_2 . На поверхні Γ_2 приймаємо, що температура задана і дорівнює T_2 . На поверхні Γ_1 розглянемо два випадки, коли там справедливі граничні умови першого та третього роду. Тоді крайові умови для різних варіантів задачі мають вигляд:

$$t|_{\Gamma_1} = T_1, \quad t|_{\Gamma_2} = T_2; \quad (7)$$

$$\left(\alpha(t - T_c) - \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad t|_{\Gamma_2} = T_2. \quad (8)$$

Умови неідеального теплового контакту на поверхні γ ($z=H$) приймаються такими:

$$\begin{aligned} [t] &= 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} - \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} &= -q(r). \end{aligned} \quad (9)$$

Для задачі 1, коли на поверхні Γ_1 приймається гранична умова першого роду, функціонал енергії має вигляд [5]:

$$\Phi(u) = \iint_{\Omega} r \lambda_i \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dr dz - 2 \int_{\gamma} r q(r) u d\gamma, \quad (10)$$

Для другої задачі, коли на Γ_1 – крайова умова третього роду, функціонал виглядає так:

$$\Phi(u) = \iint_{\Omega} r \lambda_i \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dr dz - 2 \int_{\gamma} r q(r) u d\gamma + \alpha \int_{\Gamma_1} r [u]^2 d\Gamma_1 - 2 \int_{\Gamma_1} \beta r u d\Gamma_1, \quad (11)$$

де $\beta = \alpha T_c$.

Для розв'язування поставленої задачі використаємо алгоритми МСЕ, для рівняння, записаного в циліндричних координатах. Для отримання наближеного розв'язку на їх основі написано набір програм [6].

Температурне поле в шарі досліджувалось для родовищ різної величини і потужності, що знаходились на різних глибинах. Для практики важливо отримати значення температури на зовнішній поверхні $z=0$ і в приповерхневому шарі $z=20$ м [7].

При розрахунках характеристики шару задавалися такими: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,67$ (Вт / м · °С), $B = 10^5$ м.

На рис. 3 представлено криві залежності температури від координати r для обох задач при таких значеннях параметрів: $H = 1000$ м, $T_1 = 10,5$ °С, $T_2 = 1300$ °С, $T_c = 9$ °С, $\alpha = 0,01503$ (Вт/(м² · °С)). Потужність джерела задається таким чином:

$$q = \begin{cases} 0.0377 \text{ Вт/м}^2, & 0 \leq r \leq 500 \\ 0.0209 \text{ Вт/м}^2, & 500 < r \leq 1000 \\ 0.0084 \text{ Вт/м}^2, & 1000 < r \leq 2000 \end{cases}$$

На рис. 4 представлено залежності температури від безрозмірної координати ρ ($\rho = r/R$) при різних глибинах залягання джерела тепла (радіус джерела рівний глибині його залягання) в приповерхневому шарі $z = 20$ м для задачі 2. Потужність джерела при різних глибинах залягання задавалася так:

$$\begin{aligned} \text{при } H = 2000 \text{ м} \quad q &= \begin{cases} 0.0377 \text{ Вт/м}^2, & 0 \leq r \leq 500 \\ 0.0209 \text{ Вт/м}^2, & 500 < r \leq 1000 \\ 0.0084 \text{ Вт/м}^2, & 1000 < r \leq 2000 \end{cases} \\ \text{при } H = 3000 \text{ м} \quad q &= \begin{cases} 0.0377 \text{ Вт/м}^2, & 0 \leq r \leq 650 \\ 0.0209 \text{ Вт/м}^2, & 650 < r \leq 1500 \\ 0.0084 \text{ Вт/м}^2, & 1500 < r \leq 3000 \end{cases} \\ \text{при } H = 5000 \text{ м} \quad q &= \begin{cases} 0.0377 \text{ Вт/м}^2, & 0 < r \leq 1250 \\ 0.0209 \text{ Вт/м}^2, & 1250 < r \leq 2500 \\ 0.0084 \text{ Вт/м}^2, & 2500 < r \leq 5000 \end{cases} \end{aligned}$$

На рис. 5 представлено криві залежності температури від глибини залягання H джерела для задачі 2 на глибині $z = 20$ м. Потужність джерела задається таким чином:

$$q = \begin{cases} 0.0377 \text{ Вт/м}^2, & 0 < r \leq 1250 \\ 0.0209 \text{ Вт/м}^2, & 1250 < r \leq 2500 \\ 0.0084 \text{ Вт/м}^2, & 2500 < r \leq 5000 \end{cases}$$

З графіка на рис. 3 видно, що над джерелом тепла в приповерхневому шарі $z = 20$ м спостерігається підвищення температури, яке буде найбільшим над центром джерела і зменшується при віддаленні від нього. Максимальна різниця підвищення температур при $r=0$ по відношенню до температури при $r=R$ складає $0,12$ °С для задачі 1 та $0,69$ °С для задачі 2.

Із збільшенням глибини розміщення джерела значення температур в приповерхневому шарі $z = 20$ м зменшуються (рис. 4). При глибині розміщення джерела $H=2R$ температурні аномалії в приповерхневому шарі незначні для розглянутої в роботі потужності джерела.

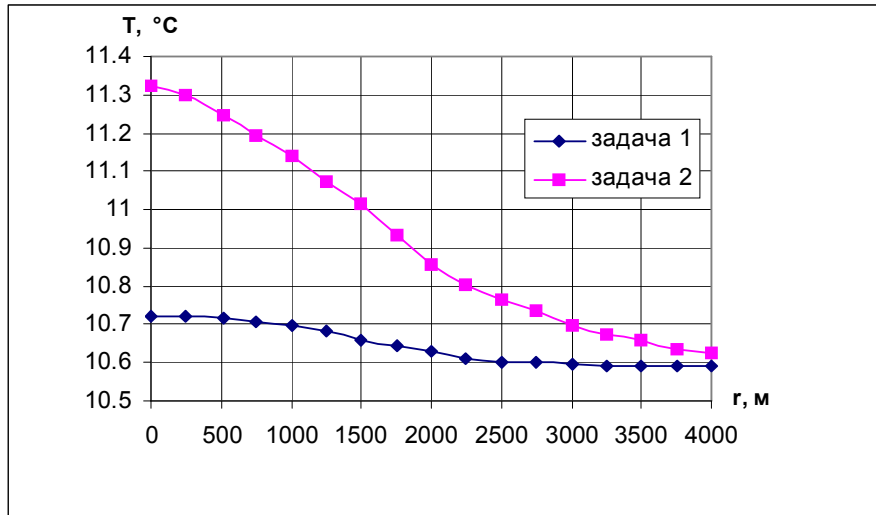


Рис. 3. Залежність $T(r)$ в приповерхневому шарі ($z=20$) для задачі 1 та задачі 2

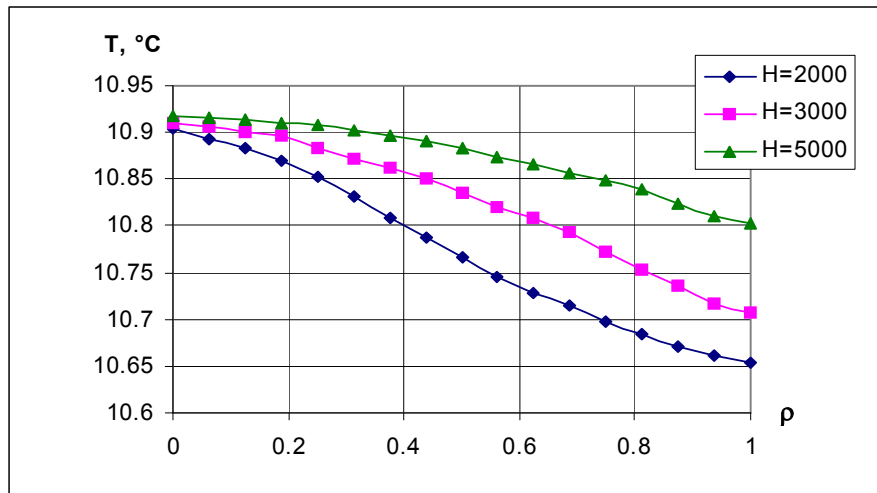


Рис. 4. Залежність $T(\rho)$ в приповерхневому шарі $z=20$ м при наявності джерел різної потужності на глибині, рівній радіусу джерела ($H=R$)

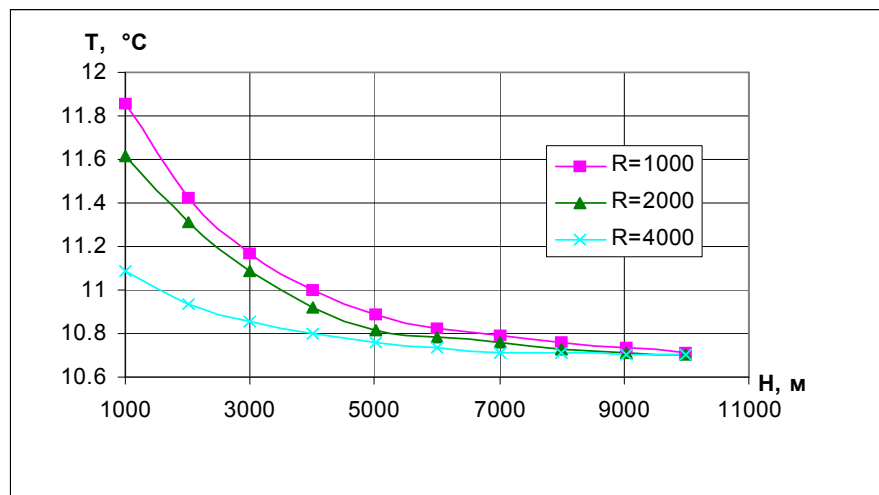


Рис. 5. Залежність $T(H)$ в приповерхневому шарі $z=20$ м при різних значеннях радіусів джерела R

В приповерхневому шарі над джерелом спостерігаються однакові максимуми температурних аномалій для різних глибин розміщення джерела при однакових потужностях при умові, що $H/R = const$, де H – глибина залягання джерела тепла, R – його радіус. Графік на рис. 5 відповідає відношенню $H/R = 1$.

Висновки. Аналіз отриманих результатів показує, що для розв'язування задач, зв'язаних із визначенням контактної температури та температурних аномалій, можна ефективно використовувати МСЕ. Отримані результати дозволяють за температурними аномаліями в приповерхневому шарі землі робити висновки про наявність в земній корі включень із тепловиділенням, розподілених по поверхні, що знаходиться на певній глибині. Крім того, за значеннями температурних аномалій можна робити оцінки про потужність і розміри джерел тепловиділення, а також про глибину їх залягання.

Two problems in cartesian and cylindrical coordinates are considered. Temperature fields in the heterogeneous constructions with conjugate conditions are obtained. High availability of using of the finite elements method for the problems is proved.

Література

1. Евтушенко А.А., Иваник Е.Г. Оценка контактной температуры и износа композиционной фрикционной накладкой при торможении // ИФЖ. – 1999. – 72, №5. – С. 988-994.
2. Горячева И.Г., Добычин И.Н. Контактные задачи по трибологии. - М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
3. Старостин Н.П., Тихонов А.Г., Богатин О.Б. Восстановление момента силы трения в подвижных цилиндрических сопряжениях по замерам температуры // ИФЖ. – 1993. – 65, №6. – С. 730-734.
4. Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник / Д.В.Гриліцький. – Київ: ІЗМН, 1996. – 204 с.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наукова думка, 1998. – 615 с.
6. Баран І. Підвищення ефективності розрахунку дифузійних процесів в середовищах із включеннями // Матеріали шостої наукової конференції ТДТУ імені Івана Пулюя. – Тернопіль, 2002, - С. 7.
7. Любимова Е.А. Термика Земли и Луны. – М.: Наука, 1968. – 280 с.

Одержано 11.02.2003 р.