Demetrius Grave
Mitglied der ukrain. Akademie in Kyjiv.

Über eine Tschebyscheffsche Frage.

1. Betrachten wir eine gegebene Fläche mit dem Bogenelement von der Form

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2 \cos \alpha \, dx \, dy, \tag{1}$$

wo α eine Funktion von x, y ist. Wir wollen unsere Fläche so auf eine Ebene abbilden, daß den Punkten der Fläche mit den krummlinigen Koordinaten X, Y die Punkte der Ebene entsprechen, für welche x, y rechtwinklige kartesische Koordinaten sind. Auf diese Weise erhalten wir einerseits eine Abbildung der Fläche auf die Ebene, für welche die Längen der Bogen der Kurven $x = const.$, $y = const.$ invariant bleiben; andererseits bilden sich diese Kurven auf der Ebene in der Gestalt von Geraden, welche den Axen des rechtwinkligen Systems parallel sind, ab.

Wenn wir uns also die letzten Systeme der Geraden als Fäden eines Gewebes vorstellen, so verwirklichen wir ein Ankleiden unserer Fläche mit diesem Gewebe. Die Größe α bestimmt den Winkel, welchen die sich kreuzenden Fäden auf der Fläche bilden.

2. Der Winkel α genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = - K \sin \alpha \tag{2}$$

wo K die Gauß'sche Krümmung bedeutet.

Die Aufgabe des Ankleidens der Fläche mit dem Gewebenetze ist auf die Darstellung des Bogenelementes unter der Form (1) zurückgeführt.

Es soll unsere Fläche mittelst der kartographischen Koordinaten u, v dargestellt werden:

$$ds^2 = \lambda \, (du^2 + dv^2), \; . \; . \tag{3}$$

wo λ eine bestimmte Funktion von u, v ist.

Es genügt augenscheinlich unsere Aufgabe nur für irgend eine der Flächen, welche durch die Gleichung (3) bestimmt sind, aufzulösen.

Wir werden hier nur die Flächen mit der konstanten Krümmung betrachten. In diesem Falle verbindet die Gleichung (2) ein gewißes Ankleiden der Fläche.

3. Wollen wir zunächst den einfachsten Fall einer Ebene ($K = 0$) betrachten. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = 0$$

hat allgemeine Lösung

$$\alpha = -X + Y$$

wo X eine willkürliche Funktion von x allein und Y eine ebensolche Funktion von y bedeutet.

Der Ausdruck

$$du + i\,dv = e^{iX}dx + e^{iY}dy \tag{4}$$

gibt u, v als Funktionen von x, y.

Daraus ergibt sich

$$du - i\,dv = e^{-iX}dx + e^{-iY}dy \tag{5}$$

Aus (4) und (5) bekommen wir:

$$du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2 + 2\cos(-X + Y)\,dx\,dy.$$

Wir sehen also, daß u, v als die rechtwinkligen Koordinaten der Ebene zu betrachten sind.

Indem man in der Gleichung (4) den reellen und den imaginären Teil absondert, so bekommt man

$$du = \cos X\,dx + \cos Y\,dy, \quad dx = \sin X\,dx + \sin Y\,dy$$

oder

$$u = \int_0^x \cos X\,dx + \int_0^y \cos Y\,dy, \quad v = \int_0^x \sin X\,dx + \int_0^y \sin Y\,dy.$$

Wir bekommen also eine translatorische Bewegung eine Kurve längs der anderen Kurve.

4. Betrachten wir jetzt eine Kugel mit dem Radius 1.

Die Gleichung (2) bekommt die Form:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = -\sin \alpha \tag{6}$$

Nehmen wir eine Partiallösung $\alpha = \varphi(\xi)$; φ eine willkürliche Funktion von $\xi = ax + by$, wo a, b positive Zahlen sind.

Wir bekommen eine gewöhnliche Gleichung

$$ab\,\alpha'' = -\sin\alpha$$

was eben die Gleichung des einfachen Pendels ist. Auf die bekonnte Weise haben wir

$$\frac{\sqrt{ab}}{2}\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha+\lambda}}=d\xi \tag{7}$$

Begnügen wir uns nur mit dem Falle $\lambda = 1$, dann gibt die Integration:

$$lg\ cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{ab}}=\Xi$$

woraus

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{e^{\Xi}+e^{-\Xi}},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{e^{\Xi}-e^{-\Xi}}{e^{\Xi}+e^{-\Xi}}$$

folgt.

Wenden wir uns jetzt auf die Untersuchung der Beziehungen zwischen x, y einerseits und den kartographischen Koordinaten u, v auf der Kugel andererseits.

$$dx^2+dy^2+2\cos\alpha\,dx\,dy=(dx+e^{i\alpha}dy)(dx+e^{-i\alpha}dy)$$

Es ist leicht den integrirenden Multiplikator für den Ausdruck

$$dx+e^{i\alpha}dy \tag{8}$$

oder auf Grund der Beziehung $\xi = ax + by$ d. i.

$$dx=\frac{d\xi-b\,dy}{a}$$

für den Ausdruck

$$\frac{d\xi}{a}+\frac{ae^{i\alpha}-b}{a}dy$$

zu finden.

Es ist ersichtlich, daß der gesuchte Multiplikator

$$\frac{a}{ae^{i\alpha}-b}$$

ist.

Es ist also:

$$dv+i\,du=\frac{d\xi}{ae^{i\alpha}-b}+dy \tag{9}$$

oder

$$dv+i\,du=\frac{(ae^{-i\alpha}+b)\,d\xi}{a^2+b^2-2\,ab\cos\alpha}+dy$$

und endlich

$$du=-\frac{a\sin\alpha\,d\xi}{a^2+b^2-2\,ab\cos\alpha} \tag{10}$$

$$dv=\frac{(a\cos\alpha-b)\,d\xi}{a^2+b^2-2\,ab\cos\alpha}+dy \tag{11}$$

Aus (10) bekommen wir:

$$u - u_0 = -\frac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{(a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \alpha)\sqrt{\cos \alpha + 1}} \tag{12}$$

Die Gleichung (9) gibt

$$dx + e^{i\alpha} dy = \frac{ae^{i\alpha} - b}{a} (dv + i\,du)$$

$$dx + e^{-i\alpha} dy = \frac{ae^{-i\alpha} - b}{a} (dv + i\,du)$$

Daraus folgt:

$$dx^2 + dy^2 + 2 \cos \alpha \, dx \, dy = \frac{a^2 + b^2 - 2 \cos \alpha \, ab}{a^2} (du^2 + dv^2).$$

Die Gleichung (12) gibt

$$u - u_0 = \frac{a}{2\,(a+b)} \lg \frac{\delta + Z}{\delta - Z}$$

wo

$$\delta = \frac{a+b}{\sqrt{2ab}}, \qquad Z^2 = 1 + \cos \alpha.$$

Indem man weiter bezeichnet:

$$\frac{a+b}{a} (u - u_0) = w,$$

so bekommt man

$$\frac{\delta + Z}{\delta - Z} = e^{2w}$$

oder

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}} \tag{13}$$

Wir bekommen endlich

$$dx^2 + dy^2 + 2 \cos \alpha \, dx \, dy = \left(\frac{a+b}{a}\right)^2 \left[\frac{2}{e^{w} + e^{-w}}\right]^2 (du^2 + dv^2).$$

Führen wir die neuen Veränderlichen W und Θ ein, wobei

$$\Theta = \frac{a+b}{a} (v - v_0).$$

Dann haben wir

$$dx^2 + dy^2 + 2 \cos \alpha \, dx \, dy = \left[\frac{2}{e^{w} + e^{-w}}\right]^2 (dw^2 + d\Theta^2)$$

Wir sehen also, daß es möglich ist, Θ als die Länge auf der Kugel zu betrachten und

$$\frac{2}{e^{w} + e^{-w}} = \cos \varphi \quad \text{zu setzen,}$$

wo φ die Breite bedeutet.

Aus der Gleichung (13) folgt:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \sin\varphi \tag{14}$$

Es bleibt jetzt nur (11) zu integrieren.

$$v - v_0 = y + \frac{\sqrt{ab}}{2(a+b)} \lg \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{b+a} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\alpha\right)$$

oder

$$v - v_0 = y \mp \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\,\Xi \pm \frac{a}{a+b} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\frac{e^{\Xi}-e^{-\Xi}}{e^{\Xi}+e^{-\Xi}}\right)$$

oder, indem wir die Länge einführen;

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{a+b}{a} y \mp \sqrt{\frac{b}{a}}\left[\Xi - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\frac{e^{\Xi}-e^{-\Xi}}{e^{\Xi}+e^{-\Xi}}\right)\right]$$

Wir sehen, daß die Parallelen auf der Kugel $\varphi = const$ die Geraden geben, welche der Gerade $ax + by = 0$ parallel sind.

Wir haben auch die Beziehung:

$$\operatorname{cotg}^2(\Theta - \Theta_0 + x - y) = \frac{4ab}{(b-a)^2} - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \sin^2\varphi.$$

5. Wir haben gezeigt, wie man aus der gegebenen Lösung der Gleichung (6) die Lösung der Tschebyscheffschen Aufgabe bekommen kann. Die vollständige Lösung der Gleichung (6) stellt aber eine höchst schwierige Aufgabe dar.

Es ist wichtig zu bemerken, daß auch jede Lösung der Tschebyscheffschen Aufgabe eine Lösung der Gleichung (6) gibt. Für den Fall einer Kugel bekommen wir eine angenäherte Lösung, welche der Modellierung fähig ist.

Betrachten wir ein Ankleiden der Kugel, bei welchem zwei Fäden, die den verschiedenen Systemen angehören, sich längst der zwei gegebenen Kurven der Kugel verbreiten.

Bezeichnen wir mit ε die kleine Länge der Seiten jeder Zelle des Netzes.

Wenn

$$Z(k, l) = tg\,\frac{1}{2} U_{k,l}$$

bezeichnet, wo die ganze Zahlen k, l die Stelle der Zelle im ganzen Netze geben und $U_{k,l}$ den Winkel der Zelle bedeutet, so können wir ein rekurrentes Grenzverfahren anordnen.

Nehmen wir nämlich die positiven Werte x, y willkürlich und bezeichnen

$$l = \left[\frac{x}{\varepsilon}\right], \qquad m = \left[\frac{y}{\varepsilon}\right]$$

wo [. . .] das Entier-zeichen ist. Bei dem unendlich kleinen ε sind die Zahlen l, k unendlich groß. Aus den Betrachtungen der sphaerischen Trigonometrie folgt:

$$Z\,(k,\ l) = \frac{P}{Q}$$

wo

$$P = \eta^2 Z(k, l-1)\, Z(k-1, l)\, Z(k-1, l-1) +$$
$$+ \eta\,[Z(k, l-1) + Z(k-1, l)] - Z(k-1, l-1)$$
$$Q = 1 + \eta\, Z(k-1, l-1)\,[Z(k, l-1) + Z(k-1, l)] -$$
$$- \eta^2 Z(k, l-1)\, Z(k-1, l)$$

und

$$\eta = \cos\varepsilon,$$

bedeuten, woraus

$$Z(k, l) + Z(k-1, l-1) = [Z(k, l-1) + Z(k-1, l)]\,\frac{\eta\,[1 + Z^2(k-, l-1)]}{Q}$$

folgt.

Dann haben wir die endlichen Differenzen

$$\Delta''_{k,l} = Z(k, l) + Z(k-1, l-1) - Z(k, l-1) - Z(k-1, l) =$$
$$= [Z(k, l-1) + Z(k-1, l)]\,\frac{R}{Q},$$

wo

$$R = \eta - 1 + \eta^2 Z(k-1, l)\, Z(k, l-1) +$$
$$+ \eta\left\{Z^2(k-1, l\ \ 1) - Z(k-1, l-1)\,[Z(k, l-1) + Z(k-1, l)]\right\}$$

bedeutet; weiter haben wir

$$\Delta_l'(k-1) = Z(k-1, l) - Z(k-1, l-1)$$
$$\Delta_k'(l-1) = Z(k, l-1) - Z(k-1, l-1).$$

Wir bekommen die Identität:

$$\Delta''_{k,l} - \frac{\eta\,[Z(k, l-1) + Z(k-1, l)]}{Q}\,\Delta_k'(l-1)\,\Delta_l'(k-1) =$$
$$= (\eta - 1)\,[Z(k, l-1) + Z(k-1, l)]\,\frac{1 + \eta\, Z(k, l-1)\, Z(k-1, l)}{Q}.$$

Dividiert man beide Seiten mit ε^2 und läßt man $\varepsilon \to 0$, so bekommen wir:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} - \frac{2Z}{1+Z^2}\,\frac{\partial Z}{\partial x}\,\frac{\partial Z}{\partial y} = -Z,$$

woraus durch die Substitution $\alpha = arctg\ Z$ die Gleichung (6) entsteht.

Die Konvergenz des Prozesses erhellt aus den geometrischen Betrachtungen.

3. II. 1927, (Kyjiv).