GEORG PFEIFFER (Kyjiv)

Die Konstruktion eines allgemeinen Operators der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die in bezug auf einen von Differentialquotienten aufgelöst ist.

Die unabhängigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \qquad \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

mögen durch:

$$\varphi_1, \varphi_2, \qquad \varphi_{n-1} \tag{2}$$

bezeichnet wergen.

Die Koeffizienten:

$$\eta_1, \eta_2, \qquad \eta_n \tag{3}$$

des Operators:

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \qquad \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{4}$$

der Gleichung 1) müssen, nach S. Lie[1]), so beschaffen sein, dass die Identität:

$$XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f), \tag{5}$$

λ — willkürliche Funktion der unabhängigen Variablen,

$$X(\eta_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \left\{ X(\eta_i) - Y(\xi_i) \right\} \frac{\partial (f)}{\partial (x_i)} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \tag{6}$$

oder was dasselbe ist, die Identitäten:

$$X(\eta_1) = \lambda, \tag{7}$$

$$X(\eta_i) = \lambda \xi_i + Y(\xi_i), \tag{8}$$

$$i = 2, 3, \qquad n,$$

erfüllt werden.

Die Identitäten (7), (8) geben für das Auffinden der Koeffizienten (3) das Jacobische System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mehrerer Funktionen:

---

[1]) s. Lie und Fr. Engel: Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, B. I, 1888, s. 138 — 143).

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}+\quad+\xi_n\frac{\partial\eta_1}{\partial x_n}=\lambda,$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial\eta_2}{\partial x_n}=\lambda\xi_2+\left(\eta_1\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\ldots+\eta_n\frac{\partial\xi_2}{\partial x_n}\right),$$

$$\frac{\partial\eta_n}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial\eta_n}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial\eta_n}{\partial x_n}=\lambda\xi_n+\left(\eta_1\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}+\ldots+\eta_n\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\right), \tag{9}$$

Die Integration des Systems (9) fordert das Auffinden der Integrale des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{\xi_2}=\ldots=\frac{dx_n}{\xi_n}=\frac{d\eta_1}{\lambda}=\frac{d\eta_2}{\lambda\xi_2+\left(\eta_1\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\ldots+\eta_n\frac{\partial\xi_2}{\partial x_n}\right)}= \tag{10}$$

$$=\frac{d\eta_n}{\lambda\xi_n+\left(\eta_1\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}+\ldots+\eta_n\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\right)},$$

welchem, wie leicht zu sehen ist, die Integrale (2) genügen.

Wenn man die übrigen Integrale des Systems (10), die Integrale (2) ausgenommen, durch:

$$\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots\ \chi_n, \tag{11}$$

bezeichnet, so wird die allgemeine Lösung des Systems (9) die Form haben:

$$F_1(\varphi_1,\ \varphi_2,\quad \varphi_{n-1},\ \chi_1,\ \chi_2,\quad \chi_n)=0$$

$$\cdot \tag{12}$$

$$F_n(\varphi_1,\ \varphi_2,\quad \varphi_{n-1},\ \chi_1,\ \chi_2,\ \ldots\ \chi_n)=0$$

$F_1, F_2, \ldots F_n$ — willkürliche Funktionen der Argumente, oder was dasselbe ist:

$$\chi_1=\Psi_1(\varphi_1,\ \varphi_2,\quad \varphi_{n-1}),$$

$$\cdot\qquad\cdot \tag{13}$$

$$\chi_n=\Psi_n(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{n-1}),$$

$\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ — willkürliche Funktionen der Argumente.

Die Koeffizienten (3) werden aus den Gleichungen (12) — (13) gefunden; der erste von ihnen η_1 stellt die Lösung der allgemeinen linearen Gleichung (7):

$$X(\eta_1)=\lambda \quad \text{dar.} \tag{14}$$

Bezeichnen wir die partielle Lösung der Gleichung (14) durch r_1:

$$X(r_1)=\lambda. \tag{15}$$

Sie ist die willkürliche Funktion der unabhängigen Veränderlichen, welche mit der Funktion λ durch die Beziehung (15) verbunden ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (14) ist:

$$\eta_1 = r_1 + \Theta_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \tag{16}$$

Θ_1 — willkürliche Funktion der Argumente.

Die Beziehung (5) nennen wir vollständig, wenn $\lambda \gtrless 0$, und homogen, wenn $\lambda = 0$.

Die vollständige Beziehung (5) hat die partielle Lösung:

$$Y(f) = r_1 X(f). \tag{17}$$

Indem wir in der Beziehung (5) die Transformation:

$$Y(f) = Z(f) + r_1 X(f), \tag{18}$$

$$Z(f) = \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{19}$$

$$\zeta_1 = \eta_1 - r_1 = \Theta_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}), \tag{20}$$

$$\zeta_i = \eta_i - r_1 \xi_i, \tag{21}$$

$$i = 2, 3, \ldots n,$$

durchgeführt haben, gehen wir zur homogenen Beziehung:

$$XZ(f) - ZX(f) = 0 \quad \text{über}. \tag{22}$$

Der letzten gehört die partielle Lösung:

$$Z(f) = X(f). \tag{23}$$

Der homogenen Beziehung (22) entspricht ein einfacheres Jacobisches System, als (9):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n} = 0, \\ &\frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_n} = \zeta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}, \\ &\ldots \\ &\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_n} = \zeta_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}; \end{aligned} \tag{24}$$

wir bekommen, indem wir in das System (9) $\lambda = 0$ setzen, ein einfacheres System, als (10), von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\zeta_1}{0} = \frac{d\zeta_2}{\zeta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}} = \tag{25}$$

$$= \frac{d\zeta_n}{\zeta_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}},$$

welches die Integrale:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1} \text{ und } \chi_1 = \zeta_1 \tag{26}$$

besitzt.

Die erste Beziehung (13):

$$\zeta_1 = \Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \quad \varphi_{n-1}) \tag{27}$$

ist der Beziehung (20) äquivalent.

Die Integration des Systems (25) kann in zwei Teile geteilt werden: die Integration des Systems:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \quad . = \frac{dx_n}{\xi_n}, \tag{28}$$

mit den Integralen (2), und die Integration des Systems:

$$d\zeta_1 = 0; \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d[\zeta_2]}{dx_1} &= \zeta_1\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right] + [\zeta_2]\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right] + \quad + [\zeta_n]\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_n}\right], \\ \frac{d[\zeta_n]}{dx_1} &= \zeta_1\left[\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}\right] + [\zeta_2]\left[\frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}\right] + \quad + [\zeta_n]\left[\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\right], \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wo die Klammern zeigen, dass die Veränderlichen $x_2, x_3, \quad x_n$ durch ihre Ausdrücke aus den Gleichungen:

$$\varphi_1 = c_1, \varphi_2 = c_2, \quad \varphi_{n-1} = c_{n-1} \tag{31}$$

ersetzt sind.

In dem Systeme (29), (30): ist

$$\zeta_1 = K_1 = const. \tag{32}$$

Die Integrationskonstanten des Systems (29), (30) mögen durch:

$$K_1, K_2, \quad K_n \tag{33}$$

bezeichnet werden.

Dieselben sind Funktionen der Konstanten:

$$c_1, c_2, \quad c_{n-1}. \tag{34}$$

Um das allgemeine Integral des Systems (24) und, folglich, auch des Systems (9) aus dem allgemeinen Integrale des Systems (29), (30) zu bekommen, muss man im letzten Systeme die Konstanten (33) durch die Ausdrücke (13) ersetzen.

Wenn man beachtet, dass für die beliebige Funktion W der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \quad x_n$ die Identität:

$$\frac{d[W]}{dx_1} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1}\right] + [\xi_2]\left[\frac{\partial W}{\partial x_2}\right] + \quad + \xi_n\left[\frac{\partial W}{\partial x_n}\right], \tag{35}$$

stattfindet, so kommt man leicht zum Schlusse, dass der partiellen Lösung (23) der homogenen Beziehung (22) die partielle Lösung:

$$\zeta_1 = 1, [\zeta_2] = [\xi_2], \quad [\zeta_n] = [\xi_n] \tag{36}$$

des Systems (29), (30) genügt; ausgenommen bei $\zeta_1 = K_1 = const.$ des Systems (30).

Dem Systeme (30) bei $\zeta_1 = K_1 = const.$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d[\zeta_2]}{dx_1} &= [\zeta_2]\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right] + \quad + [\zeta_n]\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_n}\right] + K_1\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right], \\ \frac{d[\zeta_n]}{dx_1} &= [\zeta_2]\left[\frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}\right] + \quad + [\zeta_n]\left[\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n}\right] + K_1\left[\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}\right] \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

gehört die partielle Lösung:

$$[\zeta_2] = K_1[\xi_2], \; . \; . \; [\zeta_n] = K_1[\xi_n]. \tag{38}$$

Indem wir die Operatore der linearen homogenen Differentialgleichung, die in allgemeiner Form geschrieben war, suchten[1]), gab uns die Lösung (23) der Beziehung (22) die Möglichkeit die Integration des Systems, welches dem Systeme (29), (30) entspricht, auf die Integration des homogenen Systems $(n-1)^{ter}$ Ordnung und Quadratur zurückzuführen. Im vorliegenden Falle, in dem Systeme (29), (30) ist die Quadratur (29) schon abgesondert; es bleibt noch das allgemeine System $(n-1)^{ter}$ Ordnung (37) mit der partiellen Lösung (38) zu integrieren.

Wenn man das System von $n-1$ unabhängigen partiellen Lösungen des verkürzten Systems (37) durch:

$$\begin{matrix} [\zeta_2^1], & [\zeta_3^1], & & [\zeta_n^1], \\ [\zeta_2^2], & [\zeta_3^2], & & [\zeta_n^2], \\ & & & \\ [\zeta_2^{n-1}], & [\zeta_3^{n-1}], & & [\zeta_n^{n-1}], \end{matrix} \tag{39}$$

bezeichnet, so werden das allgemeine Integral des Systems (37) und die allgemeinen Integrale der Systeme (24), (9) folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned} [\zeta_2] &= K_1[\xi_2] + K_2[\zeta_2^1] + \quad + K_n[\zeta_2^{n-1}], \\ [\zeta_3] &= K_1[\xi_3] + K_2[\zeta_3^1] + \quad + K_n[\zeta_3^{n-1}], \\ &. \\ [\zeta_n] &= K_1[\xi_n] + K_2[\zeta_n^1] + \quad + K_n[\zeta_n^{n-1}]; \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \Psi_1, \\ \zeta_2 &= \Psi_1\xi_2 + \Psi_2\zeta_2^1 + \quad + \Psi_n\zeta_2^{n-1}, \\ \zeta_n &= \Psi_1\xi_n + \Psi_2\zeta_n^1 + \quad + \Psi_n\zeta_n^{n-1}; \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= r_1 + \Psi_1; \\ \eta_2 &= r_1\xi_2 + \Psi_1\xi_2 + \Psi_2\zeta_2^1 + \quad + \Psi_n\zeta_2^{n-1}, \\ &, \\ \eta_n &= r_1\xi_n + \Psi_1\xi_n + \Psi_2\zeta_n^1 + \quad + \Psi_n\zeta_n^{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

---

[1]) G. Pfeiffer. La construction des opérateurs d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1929. pp. 177—182.

Daraus bekommt man die Form des allgemeinen Operators der Gleichung (1):

$$Y(f) = (r_1 + \Psi_1) X(f) + \Psi_2 Y_2(f) + \quad + \Psi_n Y_n(f) =$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \Psi_j Y_j(f) + \varrho X(f), \tag{43}$$

wobei:

$$\begin{aligned} Y_2(f) &= \zeta_2^{1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \quad + \zeta_n^{1} \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ &\\ Y_n(f) &= \zeta_2^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \quad + \zeta_n^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{aligned} \tag{44}$$

die partiellen Operatore der Gleichung (1) darstellen, welche unter sich und vom trivialen Operator $X(f)$ unabhängig sind; ϱ ist die willkürliche Funktion der unabhängigen Veränderlichen.

Das Resultat ist dasselbe, wie auch im unseren Artikel, welcher in der Anmerkung (2) annotiert wurde; nur die Form der partiellen Operatore ist einfacher geworden.

Es muss interessant sein, eine praktische Methode der Konstruktion des allgemeinen Operators (43) der Gleichung (1) zu geben; zu dieser Frage gehen wir über.

Schreiben wir die Gleichung (1) in der Form:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \quad + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{\omega} K(f) = 0, \tag{45}$$

$$K(f) = \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \quad x_n)}, \tag{46}$$

$$\omega = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \quad x_n)}, \tag{47}$$

$$\xi_{1+h} = \frac{(-1)^h}{\omega} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_1, \quad x_h, x_{h+2}, \quad x_n)}, \tag{48}$$
$$h = 1, 2, \quad (n-1),$$

und untersuchen die gegenseitige Beziehung ven zwei Gleichungen:

$$K(f) = 0, \; L_\tau(f) = 0 \tag{49}$$

τ — beliebige Zahl der Reihe 1, 2, $\quad$ (n—1),

$$L_\tau(f) = \frac{D(f_1, x_1, \varphi_1, \ldots \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \quad x_{n-1}, x_n)} =$$
$$= - \frac{D(f, \varphi_1, \ldots \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \quad x_{n-1}, x_n)}. \tag{50}$$

Die Gleichungen (49) besitzen (n—2) gemeine Integrale:

$$\varphi_1, \varphi_2, \quad \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \quad \varphi_{n-1} \tag{51}$$

und ausserdem, haben je ein Integral:

$$\varphi_\tau,\ \chi_1. \tag{52}$$

Sie stellen ein vollständiges System, folglich:

$$KL_\tau(f) - L_\tau K(f) \equiv \lambda_\tau K(f) + \mu_\tau L_\tau(f), \tag{53}$$

$$LK(x_1) \equiv -\lambda_\tau K(x_1),\ KL_\tau(\varphi_\tau) \equiv r_\tau L_\tau(\varphi_\tau), \tag{54}$$

$$L_\tau(\varphi_\tau) = (-1)^\tau \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \quad x_n)} = (-1)^\tau \omega,$$

$$K(x_1) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \quad x_n)} = \omega; \tag{55}$$

$$\lambda_\tau = -L_\tau(\log \omega),\ \mu_\tau = K(\log \omega). \tag{56}$$

Auf Grund der Formeln (53), (56) kommen wir zum Schlusse[3]), dass das System der Gleichungen:

$$X(f) = \frac{1}{\omega} K(f) = 0,\quad Y_\tau(f) = \frac{1}{\omega} L_\tau(f) = 0 \tag{57}$$

bei beliebigem τ ein Involutionssystem ist:

$$XY_\tau(f) - Y_\tau X(f) \equiv 0. \tag{58}$$

Die infinitesimalen Transformationen:

$$Y_\tau(f), \tag{59}$$

$$\tau = 1, 2, \ldots (n-1),$$

sind die Operatore der Gleichung (1), die unter sich und vom trivialen Operator:

$$X(f) = \frac{1}{\omega} K(f) \tag{60}$$

unabhängig sind.

In dieser Weise hat der allgemeine Operator der Gleichung (1) die Form:

$$Y(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \varrho X(f) =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left\{\sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j L_j(f) + \varrho K(f)\right\}; \tag{61}$$

$\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{n-1}$ sind willkürliche Funktionen der Integrale (2), ϱ — willkürliche Funktion der unabhängigen Veränderlichen.

---

[3]) G. Pfeiffer. Théorèmes expliquant une série des questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre; C. R. de l'Acad. d. Sciences de l'URSS, 1929, pp. 172 — 182.

La construction des opérateurs d'une équation linéaire, homogène aux dérivées partielles du premier ordre. (Wird bald veröffentlicht).

Beispiel.

Nehmen wir die Gleichung:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \qquad + \frac{x_n}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{62}$$

mit den unabhängigen Integralen:

$$\varphi_1 = \frac{x_2}{x_1},\ \varphi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \qquad .\ \varphi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}. \tag{63}$$

Für sie wird:

$$\omega = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \quad x_n)} = \\ = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{D(x_2, x_3, \ldots x_n)}{D(x_2, x_3, \quad x_n)} = \frac{1}{x^{n-1}}, \tag{64}$$

$$V_\tau(f) = -\frac{D(f, \varphi_1, \ldots \varphi_{\tau-1}, \varphi_{\tau+1}, \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \quad x_\tau, \quad x_{n-1}, x_n)} = \\ = -\frac{1}{x_1^{n-2}} \frac{D(f, x_2, \ldots x_\tau, x_{\tau+2}, \ldots x_n)}{D(x_2, x_3 \quad x_\tau, \quad x_{n-1}, x_n)} = \\ = -\frac{1}{x_1^{n-2}} \frac{D(f, x_2, x_3, \ldots x_\tau)}{D(x_2, x_3, \quad x_\tau, x_{\tau+1})} = \frac{(-1)^\tau}{x_1^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial x_{\tau+1}}. \tag{65}$$

Daher folgt, dass die Form des allgemeinen Operators der Gleichung (62):

$$Y(f) = x_1\left(\tilde{\omega}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \tilde{\omega}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \qquad + \tilde{\omega}_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \varrho X(f) \tag{66}$$

ist, wobei $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3 \ldots \tilde{\omega}_n$ die willkürlichen homogenen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen nullten Grades, ϱ — willkürliche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind.