VLADIMIR P. DOBROVOLSKY. (Kiev).

Intégration de l'équation de Laplace.

Soit proposé d'intégrer l'équation de Laplace

$$\nabla = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{1}$$

U étant dans l'électromécanique et hydrodynamique une fonction potentielle. Donc si l'on désigne au dedans du champ newtonien une surface de niveau $U =$ const., on en déduit que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\cdot p + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot p^2 + \frac{\partial U}{\partial z} r = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cdot q + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot q^2 + $$
$$+ \frac{\partial U}{\partial z}\cdot t = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\cdot q + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\cdot p + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot p\, q + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot s = 0 \tag{2}$$

en supposant

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s.$$

Dans le cas où les directions des axes de coordonnées sont, de même les directions des tensions principales au dedans du champ on a, d'après transformation de coordonnées que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

Donc dans le cas présent les équations (2) prennent la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot p^2 + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot r = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot t = 0, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\cdot p\, q + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot s = 0 \tag{3}$$

En éliminant les $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

entre les équations (1) et (3) on aura cette équation différentielle aux dérivées partielles suivante:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & p^2, & r \\ 0, & 1, & q^2, & t \\ 0, & 0, & pq, & s \end{vmatrix} = pq\,(r+t) - s\,(p^2+q^2-1) = 0 \tag{4}$$

On sait bien que par chaque point d'une surface $U=$const il passe deux lignes de courbure représentées par l'équation différentielle

$$\left[pqt-(1+p^2)s\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+p^2)t-(1+q^2)r\right]\frac{dy}{dx}+$$
$$+\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0.$$

Comme les deux séries de ligne de courbure se coupent à l'angle droit sur la surface donnée, on a selon la nature des racines del'équation du second degré que

$$\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\frac{dy_2}{dx_2}=\frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2)s-pqt}=-1.$$

D'une autre maniére

$$\begin{vmatrix} s, & -r, & q \\ t, & -s, & -p \\ q, & -p, & 0 \end{vmatrix}=pq\,(r-t)-s(p^2-q^2)=0 \qquad (5)$$

Il est aisé à contrôler que les équations différentielles (4) et (5) expriment la même ligne de courbure sur la surface de niveau $U=$const. quand cette ligne prend la forme

$$\frac{s}{2pq}=\frac{r}{2p^2-1}=\frac{t}{2q^2-1}=\frac{r+t+s}{2(p^2+q^2+pq-1)}=\omega \qquad (6)$$

En ayant égard à l'équation (1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

on aura, d'aprés l'addition des (3), que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(p^2+q^2+pq-1)=-\frac{\partial U}{\partial z}(r+t+s).$$

D'une autre manière

$$\frac{s}{2pq}=\frac{r}{2p^2-1}=\frac{t}{2q^2-1}=\frac{r+t+s}{2(p^2+q^2+pq-1)}=-\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}{2\,\frac{\partial U}{\partial z}}=\omega \qquad (7)$$

Suivant le théorème que la somme des courbures de deux sections normales, perpendiculaires entre elles, est constante, à l'aide de l'équation

$$\left[tr-s^2\right]R^2-\left[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\right]\sqrt{p+q^2+1}.R+$$
$$+\left[p^2+q^2+1\right]^2=0$$

qui donne le rayon de courbure R d'une section normale faite dans une surface de niveau $U=const$, on aura

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{(1+p^2)t+(1+q^2 2)rp-qs}{\left[p^2+q^2+1\right]^{3/2}}=const=C$$

Donc en raison des (7) on a

$$\frac{p^2+q^2-2}{\left[p^2+q^2+1\right]^{3/2}}=\frac{C}{\omega}=-2C\frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}} \tag{8}$$

Mais

$$p=-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial z}},\quad q=-\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial U}{\partial z}} \tag{9}$$

les x et y étant des variables independantes. Donc

$$-\frac{C}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \tag{10}$$

Dans le cas des variables independantes y et z ou z et x on aura analogiquement pour chaque système des axes de coordonnées rectangulaires, comme $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=$ const:

$$-\frac{C}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2},$$

$$-\frac{C}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}==\frac{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \tag{11}$$

L'addition des (10) et (11) étant opérée, on aura d'aprés simplifications, que

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}+$$
$$+\frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}=0 \tag{12}$$

Ce—qui sous la forme de l'invariant suivant

$$\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\ \ 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]=0 \tag{13}$$

qui d'après les réductions, prend la forme

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^4+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^4=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \tag{14}$$

représent un premier des intégrales del'équation (1) $\nabla=0$ de Laplace, qui l'auteur a découvert ici pour la première fois. Selon la nature des trois nombres quadratiques réels on a toujours

$$a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2, \text{ c'est-à dire}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^4+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^4>\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$$

C'est pourquoi seulement les grandeurs imaginaires ou completes des x, y et z satisfont à l'invariant (14) excepté le cas quand

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial z}$$

et le cas des integrales singulaires

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2=0,\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2=0,$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2=0 \tag{15}$$

Donc la surface de niveau $U=const.$ doit être une surface à deux nappes, conformément à partie réelle et à partie imaginaire de la fonction U, sous la forme $U=U_1+i\,U_2$. Soit

$$\frac{\partial U}{\partial x}=a,\ \frac{\partial U}{\partial y}=b,\ \frac{\partial U}{\partial z}=c$$

Selon la nature des trois nombres quadratiques on a identiquement

$$(a^2+b^2+c^2)^2-(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=$$
$$=2\,(a^4+b^4+c^4)$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2+(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=$$
$$=4(a^2\,b^2+b^2c^2+c^2\,a^2)$$

En outre cela on a en raison de (14) que

$$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+c^2\,a^2.$$

Donc

$$ab+bc+ca=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{16}$$

et l'invariant

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z} \tag{17}$$

Ainsi la (16) apparut sous la forme d'une équation différentielle

$$pq+p+q=0 \tag{16 bis}$$

qui, d'après la différentiation tour à tour par rapport à x et y, prend la forme

$$s^2-rt=0. \tag{a}$$

Donc on peut en déduire que chaque surface de niveau au dedans du champ laplacien doit être une surface développable à deux nappes.

En vertu des conditions précédentes

$$\frac{s}{2pq}=\frac{r}{2p^2-1}=\frac{t}{2q^2-1} \tag{6 bis}$$

l'équation (18) prend la forme immédiatement suivante

$$2p^2+2q^2-1=0 \text{ ou } p^2+q^2-1=-(p^2+q^2) \tag{b}$$

et les équations (4) et (5), dans le cas présent, sont

$$pq\,(r+t)+s\,(p^2+q^2)=0 \text{ et } pq\,(r-t)-s\,(p^2-q^2)=0 \tag{18}$$

Pour avoir les équations (18) aux dérivées partielles des surfaces de niveau en quantités finies on différentiera la fonction arbitraire

$$z=\Phi\,[A\,x^2\,i,\ B\,y^2\,i] \tag{19}$$

A et B étant des constantes, par rapport à x et y. Comme dans ce cas

$$\frac{\partial z}{\partial x}=pi,\ \frac{\partial z}{\partial y}=qi,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-t \ et\ \frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=-s$$

on aura telles les équations différentielles suivantes:

$$Aqx-Bpy=0,-Asx-Bry+Aqi=0,-Atx-Bsy-Bpi=0$$

qui peuvent subsister simultanément à condition que

$$-i\begin{vmatrix} q\,, & -q, & -p, 0 \\ -s\,, & -r\,, & Aqi \\ -t\,, & -s\,, & Bpi \end{vmatrix}=pq(Br+At)+s\,(Bp^2+Aq^2)=0 \tag{20}$$

En posant $A=1+i$ et $B=1-i$, où $i=\pm\sqrt{-1}$, on aura l'équation (20) en forme

$$-i\begin{vmatrix} q\,, & -p\,, & 0 \\ -s\,, & -r, & (i+1)qi \\ -t\,, & -s, & (i-1)pi \end{vmatrix}=pq\,(r+t)+s\,(p^2+q^2)-i[pq\,(r-t)-s)^2]= \\ =U_1+i\,U_2=0 \tag{21}$$

De cette manière l'équation (19) doit être, pour les équations (18), en quantités finies,

$$z=\Phi[(1+i)x^2i,\ (1-i)y^2i] \text{ ou } \varphi\ [(1+i)x^2i, (1-i)y^2i, z]=0 \tag{22}$$

comme une expression des équations (18). Ainsi donc détermine la surface de niveau au dedans du champ laplacien cette équation suivante:

$$U=U_1+i\,U_2=\varphi\left[(1+i)\,x^2 i,(1-i)y^2 i,z\right]=const \qquad (23)$$

Remarque. On peut en déduire que à l'oeuvre la fonction U, d'après la transformation des coordonnées suivant les formules d'Euler aux trois angles arbitraires, au tournant les axes des coordonnées, prend la forme

$$U=f\,(x+yi)+F\,(x+zi)+\Phi\,(y+zi)$$

les fonctions f, F ot Φ étant arbitraires. En effet, dans le cas présent, on aura

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=f''(x+yi)+F''(x+zi),\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-f''(x+yi)+\Phi''(y+zi),\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=$$
$$=-F''(x+zi)-\Phi''(y+zi)$$

Donc, d'aprés l'addition, on aura $\nabla=0$.

Dans le cas général par rapport aux trois axes des coordonnées on obtiendra

$$\varphi_1\left[(1+i)\,x^2 i,(1-i)y^2 i,z\right]=0,\ \varphi_2\left[(1+i)\,y^2 i,\ (1-i)\,z^2 i,x\right]=0,$$
$$\varphi_3\left[(1+i)\,z^2 i,(1-i)\,x^2 i,y\right]=0 \quad (23\text{ bis})$$

Donc les trois fonctions arbitraires déterminent la surface de niveau au dedans du champ laplacien, à savoir

$$U=U_1+iU_2=\varphi_1\left[(1+i)\,x^2 i,(1-i)y^2 i,z\right]+\varphi_2\left[(1+i)y^2 i,(1-i)z^2 i,x\right]+$$
$$+\varphi_3\left[(1+i)z^2 i,(1-i)\,x^2 i,y\right]=const \quad (24)$$

Pour déterminer seulement la réelle nappe d'une surface de niveau (23) on doit appliquer cette méthode suivante. Prenant en considération que l'équation

$$\begin{vmatrix} s, & -r, & q \\ t, & -s, & -p \\ q, & -p, & 0 \end{vmatrix}=pq\,(r-t)-s\,(p^2-q^2)=0 \quad (5\text{ bis})$$

est la suite de l'élimination des x et y entre les trois équations suivantes:

$$sx-ry+q=0,\ tx-sy-p=0 \text{ et } qx-pq=0$$

on peut en déduire que la surface U_2 doit être une surface de révolution.

En effet, en différentiant l'équation différentielle des surfaces de révolution $qx-py=0$ tour à tour par rapport à x et à y on aura $sx-ry+q=0$ et $tx-sy-p=0$. Donc l'équation (5 bis) en quantités finies doit être

$$z=\Psi\,(x^2+y^2) \text{ ou } \psi\,(x^2+y^2,z)=0 \qquad (25)$$

La partie imaginaire de la fonction $U=U_1+iU_2$ prend la forme

$$U_2=\psi(x^2+y^2,z)=const \qquad (26)$$

dans le cas d'une surface de niveau. En effet les équations

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t} \qquad (c)$$

qui servent à déterminer les ombilics de la surface (26), démentent les conditions (6 bis) pour la surface $U=U_1+iU_2$ en total et satisfont à la surface U_2. Ainsi une partie réelle U_1 de la fonction U doit être

$$U_1=\varphi\left[(1+i)x^2i,(1-i)y^2i,z\right]-i\psi\left[x^2+y^2,z\right] \qquad (27)$$

Donc on aura réelle nappe sous la forme

$$U_1=\varphi\left[(1+i)\,x^2i,(1-i)\,y^2i,z\right]-i\psi\left[x^2+y^2,z\right]=const \qquad (28)$$

pour la surface de niveau. Dans le cas général on a la réelle partie d'une surface de niveau sous la forme

$$U_1=\varphi_1\left[(1+i)x^2i,(1-i)y^2i,z\right]+\varphi_2\left[(1+i)\,y^2i,(1-i)\,z^2i,x\right]+$$
$$+\varphi_3\left[(1+i)z^2i,(1-i)x^2i,y\right]-i\left[\psi_1(x^2+y^2,z)+\psi\ \psi_2\,(y^2+z^2,x)\,(y^2+\right.$$
$$\left.z^2,x)+\psi_3(z^2+x^2,y)\right]=const \qquad (29)$$

Ainsi donc les six fonctions arbitraires déterminent chaque réelle nappe d'une surface de niveau au dedans du champ laplacien.

Comme la formules (29) et (24) découlent de les invariants (16) ou (17), on peut encore à démontrer cet invariant suivant:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^4+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^4 \qquad (30)$$

d'une autre manière

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \qquad (31)$$

Il est aisé à vérifier, d'après la différentiation des (16) et (17), que

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \qquad (32$$

Kiev, mars 1933.