

Замітка про контурні інтеграли.

Як відомо, загальний довід званої рівності

$$(1) \quad \int_C P(x, y) dy = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x} ds$$

зводиться на випадок, коли C є обвід прямокутника з вершками $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2)$ *. Ми доведемо тут правдивість рівності (1) для всякого замкненого контура C в данім обсягу S , як що для всякого такого контура права й ліва сторона цієї рівності існують (не вимагаючи впр. суцільности функцій P та $\frac{\partial P}{\partial x}$).

Зазначивши через C_n обвід згаданого прямокутника та через s_n його поле, можемо дібрати числа b та B на інтервалі (y_1, y_2) так, що буде:

$$(2) \quad [P(x_2, b) - P(x_1, b)](y_2 - y_1) \leq \int_{C_n} P dy = \\ = \int_{y_1}^{y_2} [P(x_2, y) - P(x_1, y)] dy \leq [P(x_2, B) - P(x_1, B)](y_2 - y_1),$$

тоб то:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \cdot s_n \leq \int_{C_n} P dy \leq \frac{\partial P}{\partial x}(A, B) \cdot s_n \quad (x_1 < a, A < x_2)$$

А що поле s можна з довільним наближенням заступити сумою піль типу s_n ($n = 1, 2, \dots, N$), то

$$\lim \sum_{n=1}^N \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \cdot s_n = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x} ds = \lim \sum_{n=1}^N \frac{\partial P}{\partial x}(A, B) \cdot s_n$$

*) Пор. артикул „Про Green'ове та Stokes'ове перетворення“ в т. XXV цього „Збірника“ (рік 1926); в цій замітці взагалнено деякі з його вислідів. При цій нагоді завважмо, що помічну теорему на стор. 86 у тім артикулі слід опустити (що не порушать дальших вислідів).

і так само

$$\int_C P dy = \lim \sum_{n=1}^N \int_{C_n} P dy ;$$

це, з огляду на (3), і доводить наше твердження.

Подібнимиж міркуваннями дійдемо рівностей:

$$(4) \quad \int_C (P dy - Q dx) = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) ds ,$$

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds ,$$

якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна обсяг Σ поділити на такі квадратні обсяги типу s_n , що в кожному із них бодай одна точка (a, b) справджує нерівності:

$$(5) \quad \left| P(xy) - P(ab) - (x-a) \frac{\partial P}{\partial x}(ab) - (y-b) \frac{\partial P}{\partial y}(ab) \right| \leq \varepsilon \sqrt{s_n}$$

$$\left| Q(xy) - Q(ab) - (x-a) \frac{\partial Q}{\partial x}(ab) - (y-b) \frac{\partial Q}{\partial y}(ab) \right| \leq \varepsilon \sqrt{s_n} ,$$

коли точка (x, y) перебігає контур C_n .

Справді, останні нерівності дозволяють написати:

$$\left| \int_{C_n} \left[P(xy) - P(ab) - (x-a) \frac{\partial P}{\partial x}(ab) - (y-b) \frac{\partial P}{\partial y}(ab) \right] dy \right| =$$

$$= \left| \int_{C_n} P dy - \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \cdot s_n \right| \leq \varepsilon \sqrt{s_n} (y_2 - y_1) = \varepsilon \cdot s_n$$

$$\left| \int_{C_n} Q dx + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \cdot s_n \right| \leq \varepsilon \cdot s_n$$

З цих двох формул дістаємо:

$$\left| \sum_{n=1}^N \int_{C_n} (P dy - Q dx) - \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \right] \cdot s_n \right| \leq 2\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^N s_n ,$$

що, по переході до границі і зведеться на першу формулу (4). Як приклад, візьмімо функцію

$$f(z) = P(xy) + iQ(xy)$$

комплексного змінного $z = x + iy$, що має скрізь у обсягу Σ похідну (не конче суцільну); рівність

$$(6) \quad \lim \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$

показув, що умови (5) можна справдити, а тому, з огляду на (4) та (6), маємо:

$$\int_c (P dy - Q dx) = 0, \quad \int_c (P dx + Q dy) = 0, \quad \text{тоб то} \quad \int_c f(z) dz = 0.$$

Наведені міркування взагальнюються на функції кількох змінних та на кратні інтеграли.