

Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів.

Візьмімо нескінченний ступанковий дріб

$$(1) \quad \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

де a_i та b_i є якісь комплексні числа, і впровадьмо зазначення:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 b_2,$$

$$(2) \quad A_i = b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2}$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = b_1, \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2,$$

$$(3) \quad B_i = b_i B_{i-1} + a_i B_{i-2}$$

Тоді, як відомо, буде:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots} + \frac{a_n}{b_n}}.$$

Цей дріб називаємо n -им ступанковим наближенням дроба (1), а A_n та B_n — відповідно чисельником та знаменником n -го ступанкового наближення.

Нагадаймо одну Pringsheim'ову¹⁾ теорему:

Коли числа a_i та b_i справджують нерівності:

$$(4) \quad |a_i| \leq |b_i| - 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

то ступанковий дріб

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} +$$

збігається і його абсолютна вартість є не більша

від 1, тоб то існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ і

¹⁾ Див. Sitzgsber. Münch. Akademie, 1898, також O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, ст. 254.

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} \right| \leq 1.$$

З (2) та (3) легко дістаємо:

$$A_i B_{i-1} - B_i A_{i-1} = (-1)^{i-1} a_1 a_2 \dots a_i;$$

отже

$$(6) \quad \frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = (-1)^{i-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_i}{B_{i-1} B_i},$$

звідки

$$(7) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

З другого боку, як показують залежності (3),

$$\begin{aligned} |B_i| &\geq |b_i| \quad |B_{i-1}| - |a_i| \quad |B_{i-2}| \\ |B_i| &\geq (|b_i| - 1) \quad |B_{i-1}| - |a_i| \quad |B_{i-2}|, \end{aligned}$$

що з огляду на (4) дає:

$$|B_i| - |B_{i-1}| \geq (|b_i| - 1) (|B_{i-1}| - |B_{i-2}|),$$

отже

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq (|b_1| - 1) (|b_2| - 1) \dots (|b_n| - 1) \geq |a_1 a_2 \dots a_n|$$

або

$$(8) \quad \left| \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B_{i-1} B_i} \right| \leq \frac{1}{|B_{i-1}|} - \frac{1}{|B_i|}$$

Ряд із додатних чисел (8), очевидно, збігається, бо сума з його перших n членів не перевищує 1; отже збігається й ряд

$$\frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \dots$$

тобто, як видно з (7), існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$.

Можна ще зауважити, що

$$\left| \frac{A_{n+p}}{B_{n+p}} - \frac{A_n}{B_n} \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left| \frac{a_1 a_2 \dots a_i}{B_{i-1} B_i} \right| \leq \frac{1}{|B_n|} - \frac{1}{|B_{n+p}|}$$

та

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_m}{B_m} \right| \leq \frac{1}{|B_m|}.$$

Далі подаємо та використовуємо деякі прості та важливі висновки з цієї теореми.

§. 1.

Маємо наступні твердження:

1) Коли множини чисел $|p_i|$ та $|q_i|$ є обмежені, то ступанковий дріб

$$(9) \quad \frac{p_1}{z + q_1} - \frac{p_1}{z + q_2} - \frac{p_3}{z + q_3} -$$

одностаїно збігається поза колом $|z| = R$ досить великого радіуса. Справді, щоб здійснити для цього дроба нерівності (4), досить узяти

$$|z| \geq |p_n| + |q_n| + 1$$

2) Коли числа q_i всі мають однаковий аргумент θ і множина чисел $|p_i| - |q_i|$ є обмежена, то ступанковий дріб

$$(10) \quad \frac{p_1}{r_1 z + q_1} - \frac{p_2}{r_2 z + q_2} - \frac{p_3}{r_3 z + q_3} -$$

збігається для всіх тих вартостей змінного z , що справджують умови

$$r_i z e^{-i\theta} \geq |p_i| - |q_i| + 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Справді, бо в такому разі

$$|p_i| \leq |r_i z + q_i| - 1$$

Нехай маємо тепер ряд функцій

$$(11) \quad f_0(z) = f(z), f_1(z), f_2(z), f_3(z),$$

зв'язаних залежностями:

$$f_i(z) = \frac{s_0^i}{z - \frac{s_1^i}{s_0^i} - s_0^i f_{i+1}(z)}$$

Тоді

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1} - \frac{s_0^1 s_0^2}{z - \frac{s_1^2}{s_0^2} - \dots - \frac{s_0^{k-2} s_0^{k-1}}{z - \frac{s_1^{k-1}}{s_0^{k-1}} - s_0^{k-1} f_k(z)},$$

де очевидно повинно бути

$$s_0 \neq 0, \quad s_0^1 \neq 0, \quad s_0^{k-1} \neq 0.$$

Взявши $k = \infty$, можна поставити питання за збіжність ступанкового дроба

$$(12) \quad \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \frac{s_0^1 s_0^2}{z - \frac{s_1^2}{s_0^2}} - \dots$$

і за правдивість рівності:

$$(13) \quad f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \dots$$

в разі, коли дріб (12) збігається.

Для збіжності дроба (12) поза колом $|z| = R$ досить великого радіуса, як бачимо з попереднього, досить, щоб числа s_0^i, s_1^i , справджували нерівності:

$$(14) \quad |s_0^{i-1} s_0^i| < k, \quad \left| \frac{s_1^{i-1}}{s_0^{i-1}} \right| < k \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

де k є якесь стале число; ці нерівності правдиві впр., коли дріб (12) є періодичний. Але не можемо твердити, що з умов (14) випливає рівність (13). Припустімо, що крім нерівностей (14) маємо ще для $|z| > R_1$

$$(15) \quad f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \dots$$

отже, що функція $f(z)$ розвивається в степеневий ряд в обсягу точки $z = \infty$. Тоді рівність (13) є правдива в усякім обсягу, що належить одночасно до $|z| > R$ та до $|z| > R_1$.

Справді, як відомо, розвинення n -го ступанкового наближення $\frac{A_n}{B_n}$ дроба (12) у степеневий ряд:

$$(16) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots + \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} + \dots$$

має перші $2n$ членів ті самі, що ряд (15); крім того, з огляду на обмеженість множини функцій $\frac{A_n}{B_n}$ в обсягу $|z| > R$, ряди (16) всі в тім обсягу збігаються, і до тогож для $|z| > \rho > R$

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} \right| \leq \left| \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} + \dots \right| \leq$$

$$\leq M \left(\left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+1} + \left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+2} + \dots \right),$$

де

$$M \geq \left| \frac{A_n}{B_n} \right| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Так бачимо, що

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_n}{B_n} - f(z) \right| &\leq \left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} \right| + \left| \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \right| \leq \\ &\leq M \left(\left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+1} + \left| \frac{\rho}{z} \right|^{2n+2} + \dots \right) + \left| \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + \frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \right| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0 \end{aligned}$$

Отже

$$(17) \quad f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$$

для

$$|z| > R \text{ та } R_1,$$

що й малося довести.

Слід ще відзначити, що на підставі відомої теореми Stieltjes'a — Vitali¹⁾, рівність (13) або (що те саме) рівність (17) правдива одностайно в усякім замкненім обсягу площі комплексного змінного z , де множина функцій $\frac{A_n}{B_n}$ є обмежена.

Звідси, між иншим, висновок, що обсяг збіжності ряду (15) є не менший за обсяг $|z| > R$.

§ 2.

Нехай сучинники ряду (15) є дійсні і справджують вимоги:

$$(18) \quad s_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \dots^2)$$

Із нерівностей (18), на підставі відомої Якобі'ввої формули в теорії визначників впливають ще наступні

$$(19) \quad s_{2k} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+1} \\ s_{2k+1} & s_{2k+2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+2} \\ s_{2k+2} & s_{2k+4} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Далі з залежності

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - s_0 f_1(z)}$$

¹⁾ Див. нпр. Vitali. Annali di Matematica, (3), m. 10, 1904, Carathéodory and Landau, Sitzgsber. Berl. Akad., 1911, Jacobsthal, Jahresbericht der Deutsch. Math.-Ver., m. 36.

²⁾ Цей випадок розібрав Grommer (Crelle's Journal, m. 144.), виходячи з вищих засад.

де за $f_1(z)$ беремо ряд того самого, що $f(z)$:

$$(20) \quad f_1(z) = \frac{s_0'}{z} + \frac{s_1'}{z^2} + \frac{s_2'}{z^3} +$$

через порівняння сучинників вираховуємо:

$$(21) \quad s_i' = \frac{(-1)^{i+1}}{(s_0)^{i+3}} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Далі, знов із допомогою Яacob'ової формули, пишемо:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix}^2 - (s_0)^{i+1} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

або, беручи під увагу (21):

$$(22) \quad - \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{i-2}' & s_{i-1}' \\ s_{i-1}' & s_i' \end{vmatrix} \cdot (s_0)^{i+3}$$

Так само:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s_3 & s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_2 \end{vmatrix}^2 = (-s_0)^{i+1} s_{i-2}' \begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots & s_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

або, беручи під увагу (22):

$$(23) \quad \begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{i-4}' & s_{i-3}' & s_{i-2}' \\ s_{i-3}' & s_{i-2}' & s_{i-1}' \\ s_{i-2}' & s_{i-1}' & s_i' \end{vmatrix} (s_0)^{i+3}$$

І т. д. Поклавши тепер в (21) $i = 0$, в (22) $i = 2$, в (23) $i = 4$, дістанемо:

$$(24) \quad s'_0 = \frac{1}{(s_0)^3} \left| \frac{s_0 s_1}{s_1 s_2} \right| > 0, \quad \left| \frac{s'_0 s'_1}{s'_1 s'_2} \right| > 0, \quad \left| \frac{s'_0 s'_1 s'_2}{s'_2 s'_3 s'_4} \right| > 0,$$

Отже нерівності (18) [а так само і (19)] не порушуються, коли в них числа s_k замінити відповідно числами s'_k .

Тепер з (24) та з (19) маємо:

$$(25) \quad |s_0^{i-1} s_0^i| \leq \frac{s_2^{i-1}}{s_0^{i-1}} < \frac{s_4^{i-1}}{s_2^{i-1}} < \frac{s_6^{i-1}}{s_4^{i-1}} <$$

$$(26) \quad \left| \frac{s_{2k+1}^i}{s_{2k}^i} \right| < \left| \frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k+1}^i} \right|$$

отже

$$(27) \quad \left| \frac{s_1^i}{s_0^i} \right| < \sqrt{\frac{s_2^i}{s_0^i}} < \sqrt{\frac{s_4^i}{s_2^i}} < \sqrt{\frac{s_6^i}{s_4^i}} <$$

$$(28) \quad \left| \frac{s_3^i}{s_2^i} \right| < \sqrt{\frac{s_4^i}{s_2^i}} < \sqrt{\frac{s_6^i}{s_4^i}} < \sqrt{\frac{s_8^i}{s_6^i}} < \dots$$

Останні нерівності доводять існування оцих границь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k}^i}} = \alpha \leq R \text{ та } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k}^i} > 0,$$

і тоді (25), (27) та (28) дають:

$$(29) \quad |s_0 s_0^i| \leq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0}{s_1} \right| \leq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}}{\alpha} \right| \leq s_{2k}$$

Тепер доведемо, що для всякого i правдиві нерівності:

$$(30) \quad |s_0^{i-1} s_0^i| \leq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0^i}{s_1^i} \right| \leq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}^i}{s_{2k}^i} \right| \leq \alpha \leq R$$

Справді, колиб найдальша від $z=0$ особлива точка β функції $f_1(z)$ лежала поза колом

$$|z| = \alpha,$$

то вона могла б бути лише (простим або кратним) полюсом функції $f_1(z)$, тоб то нулем функції $f(z)$; при тім цей полюс не міг бути дійсним, бо для такого дійсного числа β

$$\beta f(\beta) = \left(s_0 + \frac{s_1}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta_2} \left(s_2 + \frac{s_3}{\beta}\right) + \\ + > \left(s_0 - \left|\frac{s_1}{\alpha}\right|\right) + \frac{1}{\beta_2} \left(s_2 - \left|\frac{s_3}{\alpha}\right|\right) + \geq 0$$

Отож нехай цей полюс є

$$\beta = |\beta| e^{i\theta} \quad (\theta \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

а його résidu

$$B = \{B\} e^{i\varphi};$$

коли більше полюсів з модулем $|\beta|$, крім $|\beta| e^{i\theta}$, функція $f_1(z)$ не має, то дістаємо неможливу нерівність:

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s'_{2n+2}}{\rho^2 s'_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n\theta + \varphi)}{\cos(2n\theta + \varphi)} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos 2\theta - \sin 2\theta \operatorname{tg}(2n\theta + \varphi)],$$

бо ця границя або не існує або (у випадку $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) є -1 .

Той самий висновок і з припущення кількох пар полюсів з модулем $|\beta|$: воно неможливе з огляду на додатність відношення $\frac{s'_{2n+2}}{s_{2n}}$.

Так доведемо, що за умов (18) всі ряди $f_1(z)$ збігаються в обсягу $|z| > R$; одночасно доведемо нерівності (30) і рівність:

$$(31) \quad f(z) = z - \frac{s_0}{s_1} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}}$$

для досить великих вартостей $|z|$, за тих самих умов.

§ 3.

До типу функцій $f(z)$ попереднього параграфу належать інтеграли Stieltjes'a — Маркова:

$$(32) \quad f(z) = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z-x},$$

де функція $\psi(x)$ є обмежена і не меншає на інтервалі (a, b) (інтеграл узято в розумінні Stieltjes'овім). Тут очевидно $f(z)$ є аналітична функція від z скрізь на площі комплексного змінного z , окрім точок інтервалу (a, b) . Поза колом

$$|z| = R$$

досить великого радіуса маємо:

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

як що a та b є числа скінченні; тут

$$s_i = \int_a^b x^i d\psi(x) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Звідси, з огляду на нерівність:

$$d\psi(x) \geq 0,$$

як простий висновок нерівності:

$$s_0 > 0, \quad \left| \frac{s_0 s_1}{s_1 s_2} \right| > 0, \quad \left| \frac{s_0 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3 s_4} \right| > 0, \dots$$

Отже функція (32) розвивається в ступанковий дріб, що збігається до цієї функції скрізь поза колом $|z| = R$ досить великого радіуса.

Не так легко стоїть справа досліду збіжності ступанкових дробів, що в них розвиваються інтеграли (32) з нескінченими

межами. Нпр. відомо, що $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{z-x} dx$ розвивається в ступанковий дріб¹⁾

$$(33) \quad \frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z-3} - \frac{\frac{m}{m+1}}{z-2m-1} - \dots$$

Збіжність цього дроба для вартостей змінного

$$z < 0$$

впливає з п. 2) § 1, до слід лише покласти:

$$r_i = \frac{1}{i+1}, \quad \theta = \pi;$$

тоді бо буде

$$|p_i| - |q_i| + 1 = \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i+1} + 1 = 0$$

¹⁾ Пор. А. Марков, Исчисление конечных разностей, стор. 121.

Але питання, чи правдива рівність

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{z-x} = \frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{z-3}{2}}$$

цим не розв'язується. Теорія Маркова та Stieltjes'a дає на нього позитивну відповідь.

Завважмо на останку оце відоме просте твердження: нулі та полюси n -го ступанкового наближення $\frac{A_n}{B_n}$ дроба (31) всі різні, дійсні і чергуються, отже résidus всіх полюсів додатні. Ця властивість не залежить від збіжності нашого дроба і правдива для всякого дроба типу

$$\frac{p_1}{z+q_1} - \frac{p_2}{z+q_2} - \frac{p_3}{z+q_3} -$$

де числа q_i є дійсні, а числа p_i — додатні.

Отож

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{R_1}{z-x_1} + \frac{R_2}{z-x_2} + \dots + \frac{z-x_n}{R_n},$$

де числа x_i дійсні, а числа R_i додатні і при тім

$$(34) \quad R_1 + R_2 + \dots + R_n = s_0$$

і тому

$$(35) \quad f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{z-x_i}$$

З огляду на (34) бачимо, що всі $\frac{A_n}{B_n}$ обмежені в усякім обсягу

поза дійсною віссю площі комплексного змінного z . Отже, на підставі теореми Vitali (див. § 1) рівність (35) (або рівноважна рівність (31)) є правдива на всій площі, крім, може, частини дійсної осі.

Що до рівності (35), то вона особливо виявляє, оскільки загальний приклад умов (18) дає функція (32).

§ 4.

Нехай тепер сучинники ряду

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z_2} + \frac{s_2}{z_3} + \dots,$$

лишаючися дійсними, справджують вимоги

(36)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_i \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_{i+2} & \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

почавши з якогось значка $i > 0$. Узагальнюючи обчислення параграфу 2 легко приходимо до формули:

$$\begin{vmatrix} s_0^1 & s_1^1 & \dots & s_{i+p-1}^1 \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_{i+p}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p}^1 & s_{i+p+1}^1 & \dots & s_{2i+2p-2}^1 \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p-1} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

Так само:

$$\begin{vmatrix} s_0^2 & s_1^2 & \dots & s_{i+p-2}^2 \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_{i+p-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p-2}^2 & s_{i+p-1}^2 & \dots & s_{2i+2p-4}^2 \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p+1} \begin{vmatrix} s_0^1 & s_1^1 & \dots & s_{i+p-1}^1 \\ s_1^1 & s_2^1 & \dots & s_{2i+2p-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p}^1 & s_{i+p+1}^1 & \dots & s_{2i+2p-2}^1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} = (s_0^{i-1})^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0^{i-1} & \dots & s_p^{i-1} & s_{p+1}^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p+1}^{i-1} & \dots & s_{2p-1}^{i-1} & s_{2p+2}^{i-1} \end{vmatrix}$$

Перемноживши ці рівності, дістанемо:

$$(37) \quad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p-1} (s_0^1)^{-2i-2p+1} (s_0^{i-1})^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

Зосібна тут можна взяти $i-1$ замість i та 0 замість p :

$$(38) \quad s_0^{i-1} = (s_0)^{-2i+1} (s_0^1)^{-2i+3} \dots (s_0^{i-2})^{-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}$$

Дві останні формули показують, що вирази

$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_1^i & s_2^i & \dots & s_{p+1}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+p+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

мають однаковий знак. Отож із умов (36) випливає, коли покласти $p = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$(37) \quad s_0^i > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i \\ s_1^i & s_2^i \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & s_2^i \\ s_1^i & s_2^i & s_3^i \\ s_2^i & s_3^i & s_4^i \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Звідси, в зв'язку з тим, що доведено в параграфі 3, висновок: ступанковий дріб

$$f_i(z) = \frac{s_0^i}{z - \frac{s_1^i}{s_0^i} - \frac{s_0^i s_0^{i+1}}{z - \frac{s_1^{i+1}}{s_0^{i+1}} - \dots}}$$

збігається до функції $f_i(z)$ поза колом $|z| = R$ досить великого радіуса; якийби не був значок i , за умов (36) функція $f(z)$ розкладається в збіжний ступанковий дріб так, що

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1} - \dots}}$$

поза колом $|z| = R$ досить великого радіуса.

Очевидно умови (37) рівнозначні з нерівностями:

$$(38) \quad s_0^i > 0, \quad s_0^{i+1} > 0, \quad s_0^{i+2} > 0, \dots$$

Але з (37) або з (38) не конче випливають нерівності (36), а умови трохі загальні:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_i \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \quad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+1} & s_{i+2} & \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i+2} & s_{i+3} & \dots & s_{2i+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \dots,$$

що є цілком рівноважні з умовами (37).

Résumé.

Sur la convergence des certaines fractions continues

par M. Krawtchouk.

En se basant sur un critère connu de Pringsheim on peut affirmer que la fraction continue

$$\frac{p_1}{z + q_1} - \frac{p_2}{z + q_2} - \frac{p_3}{z + q_3} - \dots,$$

converge pour $|z| > R$, si les nombres p_i et q_i vérifient la condition suivante:

$$|p_i| + |q_i| \leq R + 1$$

En développant la fonction

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \dots$$

en fraction continue:

$$(1) \quad \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \frac{s_0^1 s_0^2}{z - \frac{s_1^2}{s_0^2}} - \dots$$

on peut établir que

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0}} - \frac{s_0 s_0^1}{z - \frac{s_1^1}{s_0^1}} - \dots$$

pour $|z|$ assez grand pourvu que les nombres

$$\left| s_0^{i-1} s_0^i \right| + \left| \frac{s_1^i}{s_0^i} \right| \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{soient bornés.}$$

L'auteur démontre que cette dernière condition est remplie dans le cas

$$s_0 > 0, \quad s_0^1 > 0, \quad s_0^2 > 0, \dots$$

ainsi que dans le cas plus général:

$$s_0^k > 0, \quad s_0^{k+1} > 0, \quad s_0^{k+2} > 0, \dots$$

Ces dernières conditions se réduisant aux suivantes:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & \dots & s_{2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0, \quad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{2k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k+2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+2} & s_{k+3} & \dots & s_{2k+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

on parvient de la sorte à la généralisation des inégalités connues

$$s_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

suffisantes pour la convergence de la fraction continue (1).