УДК 539.3
А. Сяський, докт.техн.наук; Ю. Батишкіна
Рівненський державний гуманітарний університет

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ РОЗІМКНЕНИХ СТРИЖНІВ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ НЕСКІНЧЕННОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Розглянуто задачу про часткове підсилення еліптичного отвору в ортотропній пластині одним або двома центральносиметричними тонкими пружними ізотропними стрижнями змінної жорсткості. Подаючи компоненти деформації контура отвору пластинки у вигляді інтегральних залежностей від компонент напруженого стану, отримано систему двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта відносно контактних зусиль. Наближений числовий розв'язок системи реалізовано методом граничної колокації, яким визначено напружений стан на контурі отвору пластинки та в підсилювальних стрижнях і досліджено вплив на нього анізотропії матеріалу.

Умовні позначення

T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ	- нормальні, дотичні та кільцеві зусилля на контурі отвору;
V_λ	- поздовжня сила в підсилювальному стрижні;
ε_λ	- відносна осьова пружна деформація контура отвору;
V	- кут пружного повороту нормалі до контура отвору;
E_x, ν_x	- модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямі осі Ox ;
$E_0F(s)$	- змінна жорсткість стрижня на розтяг або стиск;
s	- дуга на контурі отвору;
$\tilde{\rho}$	- радіус кривини контура отвору.

Пластинки з отворами, технологічними вирізами, які є концентраторами напружень, знаходять широке застосування в сучасних машинах та інженерних конструкціях. Часткове підсилення отворів тонкими пружними елементами дозволяє зменшити концентрацію напружень і збільшити жорсткість конструкції [1, 2]. Ця проблема стала особливо актуальною в зв'язку з розробкою і удосконаленням нових композиційних матеріалів, а її розв'язання вимагає залучення більш досконалих методів визначення напруженого стану пластинчастих конструкцій з ребрами жорсткості.

Задачі про часткове симетричне підсилення кругового отвору в ортотропній пластинці розглянуто в роботах [2, 3], де методом колокації досліджено вплив ортотропії матеріалу і жорсткості підсилювальних елементів сталого перерізу на напружений стан пластинки.

В даній статті пропонується розв'язок задачі про часткове підсилення еліптичного отвору в ортотропній пластинці одним або двома центрально-симетричними стрижнями загального положення і змінної жорсткості.

Постановка задачі. Вивід основних рівнянь. Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором контур якого Γ на частині Γ_1 підсилений одним або двома однаковими симетричними відносно центра отвору пружними ізотропними стрижнями змінної жорсткості загального положення.

У випадку підсилення контура Γ одним стрижнем $\Gamma_1 \equiv [\alpha_0^*; \beta_0^*]$, де α_0^*, β_0^* – полярні кути торців підсилення. Якщо контур Γ підсилений двома стрижнями, то $\Gamma_1 \equiv [\alpha_0^*; \beta_0^*] \cup [\pi + \alpha_0^*; \pi + \beta_0^*]$. Стрижні будемо моделювати пружними лініями змінної жорсткості на розтяг-стиск $E_0F(s)$. Жорсткістю стрижнів на згин нехтуємо.

Середня площина пластинки віднесена до прямокутної системи координат Oxy, координатні осі якої співпадають осями еліпса. Вісь полярної системи координат (r, δ) з полюсом в центрі отвору співпадає з віссю Ox і визначає один із головних напрямів ортотропії матеріалу пластинки.

Пластинка перебуває в умовах розтягу або стиску рівномірно розподіленими зусиллями p і q, що діють в напрямках координатних осей і прикладені „на нескінченності” (рис. 1).

Розв’язування задачі передбачає визначення напруженого стану на контурі отвору пластинки і в підсилювальних стрижнях.

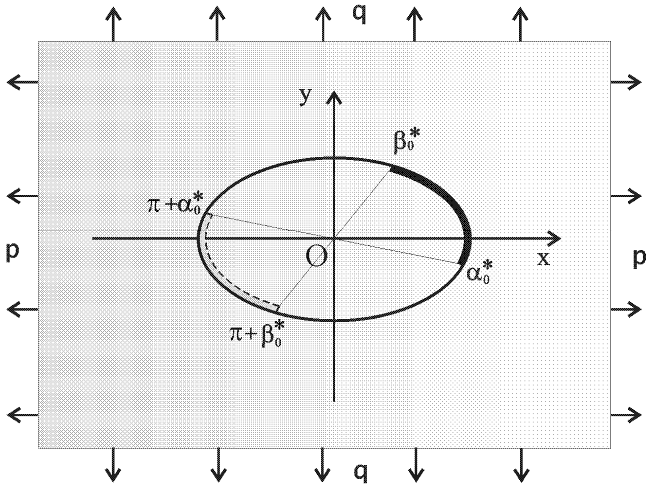

Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Умовно відділивши стрижні від пластинки і замінивши їх дію невідомими контактними зусиллями T_ρ та $S_{\rho\lambda}$, приходимо до першої основної граничної задачі для ортотропної пластинки з еліптичним отвором [3, 4], розв’язок якої приводить до співвідношень

$$\varepsilon_\lambda^* = \frac{1}{2E_x h}\left\{c_1 T_\rho^*(\lambda) + \frac{c_2 N}{\pi}\oint_\gamma J^*(t, \lambda)dt - \frac{c_3 N}{\pi}\oint_\gamma J^*(t, \lambda)dt + \tilde{\varepsilon}_\lambda^0\right\}; \qquad (1)$$

$$V^* = \frac{1}{2E_x h}\left\{c_1 S_{\rho\lambda}^*(\lambda) + \frac{c_3 N}{\pi}\oint_\gamma I^*(t, \lambda)dt + \frac{c_4 N}{\pi}\oint_\gamma J^*(t, \lambda)dt + \tilde{V}^0\right\}.$$

Тут введено позначення $N = \begin{cases} 1, & \textit{підсилення одним стрижнем}; \\ 2, & \textit{підсилення двома стрижнями}; \end{cases}$

$$c_1 = \beta_1\beta_2 - \nu_x;\quad c_2 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left[(1-\beta_1\beta_2)cos^2\lambda - 1\right];\quad c_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}(1-\beta_1\beta_2)cos\,\lambda\,sin\,\lambda;$$

$$c_4 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left[(1-\beta_1\beta_2)sin^2\lambda - 1\right];\quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = \left(T_\rho + iS_{\rho\lambda}\right)\omega'(\sigma);\quad \varepsilon_\lambda^* + iV^* = \left(\varepsilon_\lambda + iV\right)\omega'(\sigma);$$

$$I^*(t, \lambda) = T_\rho^*(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)ctg\frac{N(\lambda - t)}{2};\quad J^*(t, \lambda) = S_{\rho\lambda}^*(t) + T_\rho^*(t)ctg\frac{N(\lambda - t)}{2};$$

$$l_1 = a^2 sin^2\lambda - b^2\beta_1\beta_2 cos^2\lambda;\quad l_2 = a\,sin^2\lambda - b\,cos^2\lambda;$$

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 = p\Big[\, l_2 + b(\beta_1\beta_2)sin^2\lambda \,\Big] + q\beta_1\beta_2\Big[\, a(\beta_1+\beta_2)cos^2\lambda - l_1 \,\Big]; \qquad (2)$$

$$\tilde{V}^0 = \left\{p\Big[a + b(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\Big] - q\beta_1\beta_2\Big[a(1+\beta_1+\beta_2) + b\beta_1\beta_2\Big]\right\}sin\,\lambda\,cos\,\lambda;$$

β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [4];

$$\omega(\xi) = R_0\left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi}\right) \tag{3}$$

– функція, яка реалізує конформне відображення нескінченної площини $\xi = \rho e^{i\lambda}$ з одиничним круговим отвором, контур якого γ, на область, яку займає пластинка; R_0, ε - характерний розмір еліпса і його ексцентриситет; $R_0 = \frac{a+b}{2} = 1$; $a = 1+\varepsilon$, $b = 1-\varepsilon$ – півосі еліпса; $\gamma_1 \equiv [\alpha_0;\ \beta_0] \cup [\pi+\alpha_0;\ \pi+\beta_0]$ – образ зони Γ_1 при відображенні (3); $\sigma = e^{i\lambda}$; $i = \sqrt{-1}$.

Компоненти напружено-деформованого стану на контурі Γ через величини, відзначені зірочками, визначаються за формулами [2, 5], які після певних перетворень можна записати так

$$T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2+\beta^2};\ S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2+\beta^2};\ \varepsilon_\lambda = \frac{\alpha\varepsilon_\lambda^* + \beta V^*}{\alpha^2+\beta^2};\ V = \frac{\alpha V^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2+\beta^2}; \tag{4}$$

$$T_\lambda = -\frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2}\Big[\big(l_1 l_2 + (a+b)l_4 \sin^2\lambda \cos^2\lambda\big)R_1 + \big((a+b)l_1 - l_2 l_4\big)\sin\lambda\cos\lambda R_2\Big] -$$

$$-\frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2}\Big[\big(l_4(b-a)\sin^2\lambda\cos^2\lambda - l_1 l_3\big)\widetilde{R}_3 + \big(l_4 l_3 + (b-a)l_1\big)\sin\lambda\cos\lambda\widetilde{R}_4\Big] + T_\lambda^0.$$

Тут

$$T_\lambda^0 = \frac{l_3}{\Delta_1\Delta_2}\Big[p\big(l_1 + l_4\sin^2\lambda\big) + q\beta_1\beta_2\big(l_4\cos^2\lambda - l_1\big)\Big]; \qquad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma);$$

$$l_3 = a\sin^2\lambda + b\cos^2\lambda;\ l_4 = ab(\beta_1+\beta_2);\ \Delta_j = a^2\sin^2\lambda + b^2\beta_j^2\cos^2\lambda;\ (j = 1, 2);$$

$$R_1 = -2T_\rho^* + \frac{N}{\pi}\oint_\gamma I^*(t, \lambda)dt;\ R_2 = -2S_{\rho\lambda}^* + \frac{N}{\pi}\oint_\gamma J^*(t, \lambda)dt;\ R_3 = 4T_\rho^* - R_1; \tag{5}$$

$$R_4 = 4S_{\rho\lambda}^* + R_2;\ \widetilde{R}_3 = R_3\cos 2\lambda + R_4\sin 2\lambda;\ \widetilde{R}_4 = R_4\cos 2\lambda - R_3\sin 2\lambda.$$

У співвідношеннях (1), (2), (4) здійснено граничний перехід від ортотропного до ізотропного матеріалу при $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Граничні умови на ділянці підсилення Γ_1 мають вигляд [1]

$$T_\rho = \frac{E_0 F(s)}{\widetilde{\rho}}\varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{\partial}{\partial s}\big(\widetilde{\rho}T_\rho\big); \quad s \in [s_0;\ s_1]; \quad \lambda \in [\alpha_0;\ \beta_0]. \tag{6}$$

Крім граничних умов повинні виконуватися умови рівноваги підсилювального стрижня

$$\int_{s_0}^{s_1}\big(T_\rho + iS_{\rho\lambda}\big)e^{i\theta}ds = 0, \tag{7}$$

які з використанням властивостей конформного відображення (3)

$$ds = |\omega'(\sigma)|d\lambda = \widetilde{\rho}d\theta; \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1-\varepsilon^2}{\alpha^2+\beta^2}; \quad \frac{1}{\widetilde{\rho}} = \frac{1-\varepsilon^2}{|\omega'(\sigma)|^3}$$

можна записати так

$$T_\rho(\beta_0) = T_\rho(\alpha_0) = 0. \tag{8}$$

Тут θ – кут, який утворює нормаль до контура Γ з віссю Ox; $e^{i\theta} = e^{i\lambda}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}$.

Підставляючи (1), (4) в граничні умови (6) приходимо після певних перетворень до системи двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення величин T_ρ та $S_{\rho\lambda}$ в зоні підсилення

$$T_\rho(\lambda) = \Delta \frac{(1-\varepsilon^2)}{|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ c_1(\alpha^2+\beta^2) T_\rho(\lambda) + \frac{N}{\pi} \oint_{\gamma_1} R(\lambda,t) \left[T_\rho(t) - S_{\rho\lambda}(t) ctg \frac{N(\lambda-t)}{2} \right] dt + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \frac{N}{\pi} \oint_{\gamma_1} Q(\lambda,t) \left[S_{\rho\lambda}(t) + T_\rho(t) ctg \frac{N(\lambda-t)}{2} \right] dt + \alpha \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta \tilde{V}^0 \right\};$$

$$S_{\rho\lambda}(\lambda) = -\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{1-\varepsilon^2} \frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{6T_\rho(\lambda)}{(1-\varepsilon^2)} \beta; \; \lambda \in [\alpha_0; \; \beta_0],$$

де

$$R(\lambda, t) = c_2 \alpha(\lambda)\alpha(t) + c_4 \beta(\lambda)\beta(t) - c_3(\alpha(\lambda)\beta(t) + \beta(\lambda)\alpha(t)); \quad \Delta = \frac{E_0 F(s)}{2E_x h};$$

$$Q(\lambda, t) = c_4 \beta(\lambda)\alpha(t) - c_2 \alpha(\lambda)\beta(t) - c_3(\alpha(\lambda)\alpha(t) - \beta(\lambda)\beta(t)).$$

Якщо ці величини стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ на контурі отвору визначаємо за формулою (5), а поздовжні зусилля V_λ в підсилювальному стрижні зі співвідношення [6, 1]

$$V_\lambda = \frac{|\omega'(\sigma)|^3}{1-\varepsilon^2} T_\rho. \quad (10)$$

Покладаючи в (9) $\beta_1 = \beta_2 = 1$ одержимо відповідну систему рівнянь для ізотропної пластинки з еліптичним отвором [6].

2. Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (9), (8) знайти неможливо. Для наближеного числового розв'язання задачі (9), (8) проведемо заміну змінних

$$tg\frac{N\lambda}{2} = a_0 x + b_0; \; tg\frac{Nt}{2} = a_0 S + b_0; \; \lambda = \frac{2}{N} arctg(a_0 x + b_0); \; t = \frac{2}{N} arctg(a_0 S + b_0); \quad (11)$$

$2a_0 = tg\frac{N\beta_0}{2} - tg\frac{N\alpha_0}{2}$; $2b_0 = tg\frac{N\beta_0}{2} + tg\frac{N\alpha_0}{2}$ за допомогою якої інтеграли, що входять в (9), зведемо до стандартного $[-1; \; 1]$ проміжку інтегрування

$$\frac{N}{\pi} \int_{\gamma_1} R(\lambda, t) \left[T_\rho(t) - S_{\rho\lambda}(t) ctg \frac{N(\lambda-t)}{2} \right] dt = \frac{2a_0}{\pi} \int_{-1}^{1} R(\lambda, S) \frac{T_\rho(S) - (a_0 S + b_0) S_{\rho\lambda}(S)}{1 + (a_0 S + b_0)^2} dS - \quad (12)$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} R(\lambda, S) S_{\rho\lambda}(S) \frac{dS}{x-S}; \; \frac{N}{\pi} \int_{\gamma_1} Q(\lambda,t) \left[S_{\rho\lambda}(t) + T_\rho(t) ctg \frac{N(\lambda-t)}{2} \right] dt = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} Q(\lambda,S) T_\rho(S) \frac{dS}{x-S} +$$

$$+ \frac{2a_0}{\pi} \int_{-1}^{1} Q(\lambda, S) \frac{S_{\rho\lambda}(S) + (a_0 S + b_0) T_\rho(S)}{1 + (a_0 S + b_0)^2} dS; \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad x \in [-1; \; 1].$$

Підставляючи (11), (12) в (9), (8), одержимо

$$T_\rho(x) = \Delta \frac{(1-\varepsilon^2)}{|\omega'(\sigma)|^5} \left[\alpha \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta \tilde{V}^0 + c_1(\alpha^2+\beta^2) T_\rho(x) + \frac{2a_0}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{R(\lambda, S) + Q(\lambda, S)(a_0 S + b_0)}{1 + (a_0 S + b_0)^2} T_\rho(S) dS + \right.$$

$$\left. + \frac{2a_0}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{Q(\lambda, S) - R(\lambda, S)(a_0 S + b_0)}{1 + (a_0 S + b_0)^2} S_{\rho\lambda}(S) dS + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} Q(\lambda, S) S_{\rho\lambda}(S) \frac{dS}{x-S} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} R(\lambda, S) T_\rho(S) \frac{dS}{x-S} \right];$$

$$S_{\rho\lambda}(x) = -\frac{\alpha^2+\beta^2}{1-\varepsilon^2}\frac{1+(a_0x+b_0)^2}{2a_0}N\frac{\partial T_\rho(x)}{\partial x}+\frac{6T_\rho(x)}{(1-\varepsilon^2)}\beta; \quad \lambda\in[\alpha_0;\beta_0]; \quad x\in[-1;\ 1]. \quad (13)$$

$$T_\rho(-1) = T_\rho(1) = 0\,. \quad (14)$$

На підставі (14) наближений розв'язок системи (13) вибираємо у вигляді

$$T_\rho(x) = \sqrt{1-x^2}\,\Phi_1(x);\ S_{\rho\lambda}(x) = \frac{\Phi_2(x)}{\sqrt{1-x^2}};\ x\in[-1;\ 1], \quad (15)$$

де $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ – обмежені на $[-1;\ 1]$ функції.

Система (13) має таку ж структуру, як і відповідна система для ізотропної пластинки [6], тому наближений її розв'язок методом колокації [5, 7, 8] переноситься без змін.

Для ортотропної пластинки з еліптичним отвором, підсиленим двома стрижнями змінного поперечного перерізу $2h_0b_0$, досліджено вплив способу розміщення підсилень та ортотропії матеріалу на напружений стан на контурі отвору пластинки і в підсилювальних стрижнях.

При цьому закон зміни товщини підсилення визначався за формулою

$$b(\lambda) = \frac{b_0}{2}\begin{cases} 2, & при \ \ \lambda\in[\alpha_0';\beta_0']; \\ 1+sin\left(\pi\dfrac{\lambda-\dfrac{\alpha_0'+\alpha_0}{2}}{\alpha_0'-\alpha_0}\right), & при \ \ \lambda\in[\alpha_0;\alpha_0']; \\ 1-sin\,\pi\left(\dfrac{\lambda-\dfrac{\beta_0'+\beta_0}{2}}{\beta_0-\beta_0'}\right), & при \ \ \lambda\in[\beta_0';\beta_0], \end{cases} \quad (16)$$

де $[\alpha_0;\alpha_0']$ і $[\beta_0';\beta_0]$ – зони змінної жорсткості підсилювальних стрижнів.

Результати числового розрахунку при $\alpha_0 = -\frac{\pi}{3}$; $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$; $p = 0$; $q = 1$; $\frac{E_0}{\sqrt{E_xE_y}} = 1$; $\frac{h_0}{h} = 1$; $\frac{b_0}{R_0} = 0.05$; $\alpha_0' - \alpha_0 = \beta_0 - \beta_0' = \frac{\pi}{6}$ наведено на рис.2 і рис.3

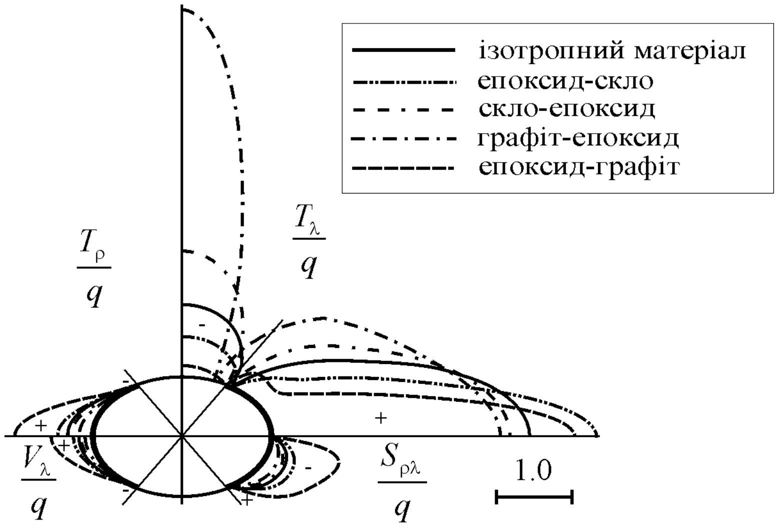

Рис.2. Розподіл зусиль на контурі отвору і в підсилювальному стрижні $(\varepsilon = 0.2)$

На рис. 4 подано аналогічні графіки для кільцевих зусиль на непідсиленому отворі з такими ж параметрами.

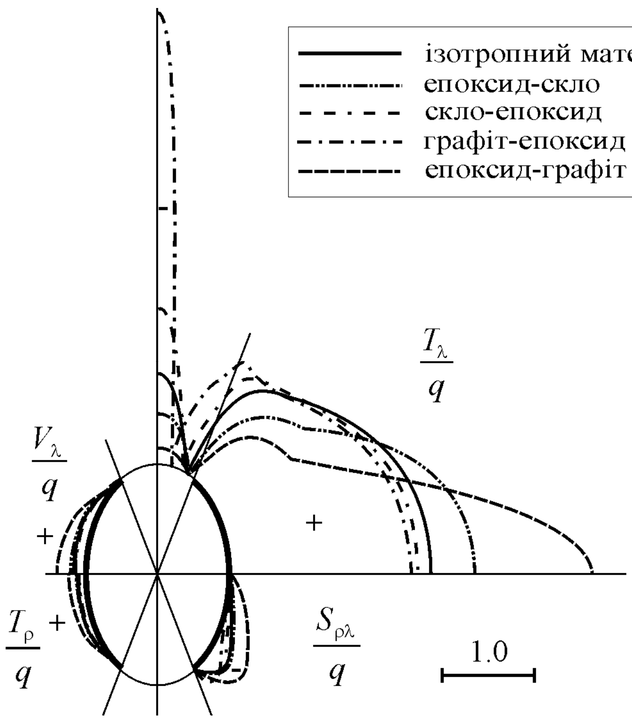

Рис.3. Розподіл зусиль на контурі отвору і в підсилювальному стрижні $(\varepsilon = -0.2)$

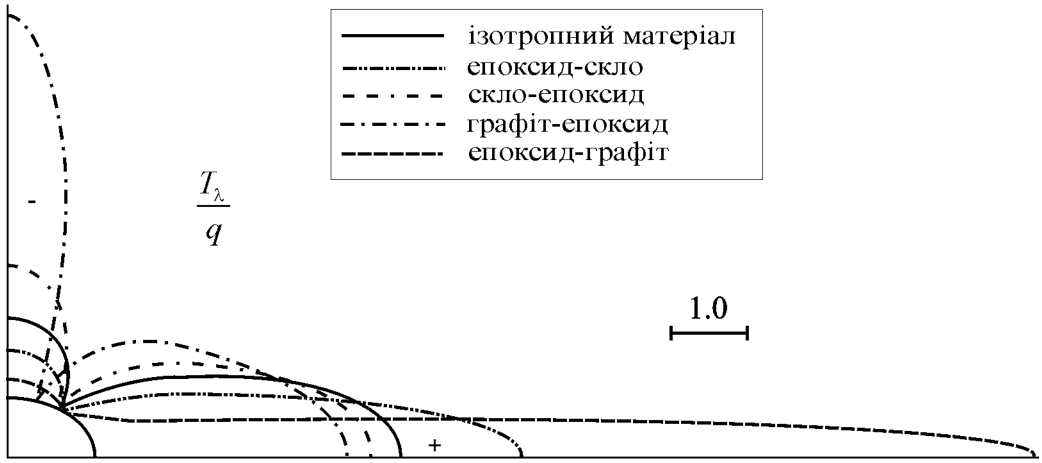

Рис.4. Розподіл зусиль на контурі непідсиленого отвору $(\varepsilon = 0.2)$

Характеристики досліджуваних матеріалів наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	E_x / E_y
ізотропний матеріал	1	1	0.300	1
скло-епоксид	2.2712	0.7626	0.250	3
графіт-епоксид	6.9992	0.7144	0.250	25
епоксид скло	0.4400	1.3100	0.083	1/3
епоксид-графіт	0.1430	1.4010	0.010	1/25

Всі обчислення проведені для різних значень N_0 до $N_0 = 48$. Відзначимо, що результати розрахунку не змінюються, починаючи з $N_0 = 32$.

Аналізуючи результати числового розрахунку напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки і в підсилювальних стрижнях приходимо до таких **висновків:**

Анізотропія матеріалу пластинки суттєво впливає на розподіл зусиль по контуру отвору. При цьому із збільшенням відношення E_x / E_y максимальні значення T_λ різко зростають. Як показують графіки на рис. 2 і 4 ці зусилля можна ефективно зменшити шляхом підсилення небезпечних ділянок стрижнями змінної жорсткості. На відміну від стрижнів сталої жорсткості в околі торців підсилення кільцеві зусилля змінюються плавно. За межами зони підсилення напружений стан пластинки несуттєво залежить від жорсткості стрижня.

The problem about a partial reinforcement of an elliptic orifice in an orthotropic plate by one surveyed or two is central by symmetric thin elastic isotropic rods of a variable rigidity. Introducing components of a strain of an orifice of a plate by the way of integrated associations on components of a state of stress, the system of two singular integrally - differential equations with cores of Hilbert concerning contact gains is obtained. The approximate numerical solution of a system is implemented by a method of a boundary collocation, which one defines a state of stress on a contour of an orifice of a plate and in substantiating rods and the influence to it of an anisotropy of a material is explored.

Література

1. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. – К.: Наукова думка, 1975. – 200 с.
2. Сяський В.А. Контактные взаимодействия пластин с разомкнутыми криволинейными упругими элементами: Дис... канд.. фіз.-мат. наук: 01.02.04. – Львів., 1986. – 158с.

3. Сяський А.О. Тиск жорсткого диска на еліптичний отвір ортотропной полімерної пластинки // Фізика конденсованих високомолекулярних систем. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – Вип. 7. – 1999. – С. 46-50.
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
5. Мартинович Т.Л., Сяський А.А., Демчик С.П. Контактные задачи для анизотропных сред с эллиптическими границами. – Ровно, 1989. – 16 с. – Деп. в Укр НИИНТИ 12.03.1990, №463 – Ук 90.
6. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці // Вісник ТДТУ. – Вип. 2. – 2004. –
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304с.
8. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным отверстием // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, № 2. – С. 247 – 254.

Одержано 10.06.2004 р.