МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 66.047

З.Мазяк, докт. техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОГО СУШІННЯ ПРИ ВОЛОГОМУ СТАНІ НА ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ В УМОВАХ ПРОТИТЕЧІЇ

Розроблено математичні моделі процесів конвективного сушіння для дисперсних матеріалів у формі кулі, циліндра, паралелепіпеда на основі систем диференціальних рівнянь тепломасоперенесення в сушарках безперервної дії, призначених для розв'язку задач підвищеної складності – адекватного прогнозування, оптимізації, керування процесами

В промислових умовах широко використовують конвективні сушарки безперервної дії, в яких дисперсний матеріал і агент сушіння постійно рухаються. Існують методи розрахунку, які дозволяють наближено розрахувати такі процеси з метою визначення розмірів відповідних апаратів. При цьому нерідко використовуються напівемпіричні залежності.

Такі методи розрахунку процесів не можуть бути використані тоді, коли необхідно оцінювати кінетику процесу з метою адекватного прогнозування, оптимізації, якісного керування; або коли потрібно оцінювати нестаціонарні поля температур і вологовмісту у висушених зразках з технологічних міркувань та ін.

Для вказаних випадків потрібні адекватні математичні моделі, що мають у своїй основі відповідні системи диференціальних і інтегродиференціальних рівнянь з частковими похідними, оскільки конвективне сушіння – це складний технологічний і теплотехнічний процес, який ґрунтується на багатьох явищах, таких як: тепло і масообмін між поверхнею висушуваного матеріалу і газовим середовищем, тепло і масоперенесення в твердих пористих тілах, випаровування вологи у поверхневому шарі і в середині висушуваного зразка. В свою чергу масоперенесення пов'язане з явищами молярного і молекулярного перенесення пари в макрокапілярах, теплового ковзання, циркуляції газу в пористому тілі, молекулярного перенесення пари в мікрокапілярах, ізотермічному і неізотермічному русі рідини в капілярах, термовологопровідності, а теплоперенесення – з явищами теплопровідності, конвекції, випромінювання. Перечислені явища змінні в часі і просторі. В ході протікання процесу в кожній точці фази двохфазної гетерогенної системи і на межі фаз має місце перенесення імпульсу, маси і енергії. Процес проходить в сушарці, яка має конкретні геометричні характеристики, що відповідним чином впливають на нього. Складність таких процесів проявляється у великому числі і різноманітності характерних параметрів, що визначають його хід, у великій кількості внутрішніх зв'язків між параметрами, в їх взаємному впливі. Вказані складності підсилюються розвитком конкуруючих напрямків, що змінюють його хід.

Тому для оцінки таких процесів, їх досліджень доцільно використовувати математичне моделювання.

Більшість матеріалів, що висушуються, є капілярно-пористими колоїдними тілами. Детальний аналіз вищевказаних явищ, що лежать в основі процесів висушування, дозволив створити систему диференціальних рівнянь тепломасоперенесення [1], яка описує нестаціонарні поля температури і вологовмісту в твердих пористих тілах при висушуванні. Вказана система створена на основі уявлень, що тепло, яке отримує вологий матеріал від агента сушіння, витрачається на нагрівання матеріалу і випаровування вологи. При цьому зміна агрегатного стану маси впливає на формування температурного поля, а його характер, в свою чергу, визначає термодифузійний потік вологи, що має відповідний вплив на характер поля вологовмісту. Швидкість масоперенесення при цьому залежить від градієнтів вологовмісту і температури, оскільки термодинамічні сили вологоперенесення є їх функціями.

Вказана система не враховує впливу сил тяжіння, дія яких в даному випадку є незначною, а також не застосовується для тіл монокапілярної структури, які дуже рідко зустрічаються на практиці.

Рушійними силами тепломасоперенесення в процесах сушіння є градієнт вологовмісту, температури і загального тиску.

В ряді випадків процеси сушіння реалізуються в сушарках при тиску близькому до атмосферного при температурах нагрівання матеріалу не вище 100 □С. Тоді система диференціальних рівнянь тепломасоперенесення спрощується, оскільки при цьому не враховується перенесення маси за рахунок градієнта загального тиску.

З метою отримання потрібних математичних моделей вказана система повинна бути доповнена відповідними краєвими умовами. Оскільки в апаратах безперервної дії температура і вологовміст агента сушіння безперервно змінюється по довжині або висоті сушарки, то для того випадку необхідно застосувати відповідні балансові рівняння, які визначають змінні потоки маси і тепла на межі між вологим матеріалом і агентом сушіння. Такі рівняння можливо отримати на основі рівнянь матеріального і теплового балансів, що складені для потоків дисперсного матеріалу і агента сушіння. Вони можуть рівночасно враховувати різну структуру потоку газового середовища, що суттєво при створенні потрібної математичної моделі. В складанні таких характеристик лежить ідея зворотнього зв’язку – хід процесу визначає величину потенціалу, від якого залежить його швидкість [2].

Один з основних підходів для створення потрібних моделей базується на використанні методів механіки суцільного середовища, коли основою розв’язку задачі є внутрішня структура досліджуваної системи. Однак в ряді випадків такий підхід приводить до дуже складних залежностей, тому на приктиці часто зручніше користуватися другим методом, який базується на модельних уявленнях про внутрішню структуру процесу. В його основі знаходяться математичні моделі структури потоку [3].

Складати математичні моделі складних процесів з позиції чистого детермінізму не завжди можливо. У зв’язку з тим при їх синтезі доцільно виходити з того, що явища, які лежать в основі досліджуваного процесу мають подвійну (детерміновано-стохастичну) природу, що проявляється в суперпозиції стохастичних особливостей (досить часто гідродинамічних умов в технологічному апараті) на фізичні, фізико-хімічні явища.

При створенні граничних умов, виходячи з концепції, що тепло, яке отримує вологий матеріал від агента сушіння, витрачається на нагрівання і випаровування вологи, для випадку вологого стану на поверхні контакту, що часто має місце при висушуванні, можливо використати рівняння

– для потоку маси

$$B(P_S - P) = -a_m \rho_0 (\nabla U + \delta \cdot \nabla t) = j; \tag{1}$$

– для потоку тепла

$$\alpha_T (t_T - t_n) = \lambda \cdot \nabla t + (1-\varepsilon) r_C j, \tag{2}$$

де B – коефіцієнт випаровування, *кг/нс*; P_S – пружність насиченої водяної пари при даній температурі, *Н/м*^{2}; P – пружність водяної пари в середовищі, *Н/м*^{2};

a_m – коефіцієнт вологопровідності, *м²/с*; ρ_0 – густина сухого матеріалу, *кг/м³*; ∇ – градієнт на поверхні матеріалу, *1/м*; δ – термоградієнтний коефіцієнт,*1/град*; j – потік маси, *кг/м²с*; U - текучий диференціальний вологовміст матеріалу, *кг.в./кг.с.м*; t – текуча температура матеріалу, *град*; α_T – коефіцієнт тепловіддачі, *Вт/м² град*; t_T – текуча температура агента сушіння, *град*; t_n – температура поверхні матеріалу, *град*; (при вологому стані на поверхні контакту її наближено приймають рівною температурі мокрого термометра); ε - критерій фазового переходу, $0 \le \varepsilon \le 1$; r_c – скрите тепло випаровування вологи, *Дж/кг.в.*; λ – коефіцієнт теплопровідності, *Вт/м град*.

При реалізації процесів сушіння часто використовується протитечія.

На основі аналізу схем теплових і масових потоків в сушарці з врахуванням явища зворотнього перемішування при протитечії отримуємо рівняння

– для масових потоків

$$G(W_0 - W) - V(X_K - X) - \rho \cdot f \cdot D\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)_{l=0} - \frac{dx}{dl}\right] = 0; \quad (3)$$

– для теплових потоків

$$VC_T(t_T - t_K) - \frac{(1+Rb)r_c G(W_0 - W)}{C_T} - \rho \cdot f \cdot C_T \cdot D \cdot \left[\left(\frac{dt_T}{dl}\right)_{l=0} - \frac{dt_T}{dl}\right] = 0, \quad (4)$$

де G – подача матеріалу, кг с.м./с; V – подача агента сушіння, кг с.а./с; W_0, W – середній по об'єму вологовміст матеріалу на вході в сушарку, текучий, кг в./кг с.м.; D – коефіцієнт зворотнього перемішування, м²/с; X_K, X – вологовміст агента сушіння на виході з апарата, текучий, кг/кг с.а.; ρ – густина агента сушіння, кг/м³; f – площа поперечного перетину апарата, м²; l – текучий лінійний розмір апарата, м; $0 \le l \le L$ – висота (довжина) апарата, м; C_T – теплоємність агента сушіння, Дж/кг град; $t_к$ – температура агента сушіння на виході з апарата, град; Rb – число Ребіндера – відношення кількості тепла нагрівання і випаровування.

Оскільки сушарки звичайно мають значну висоту (довжину), то $\left(\frac{dX}{dl}\right)_{l=0}, \left(\frac{dt_T}{dl}\right)_{l=0}$ – мають незначну величину, тому при першому наближенні в розрахунках приймають $\left(\frac{dX}{dl}\right)_{l=0} = 0$ і $\left(\frac{dt_T}{dl}\right)_{l=0} = 0$. Тоді на основі рівнянь (3) і (4) отримують характеристики змінних величин X, t_T.

– для масових потоків

$$X = X_к - \frac{1}{\alpha}(W_0 - W) - \frac{D}{U_c}\frac{dX}{dl}, \quad (5)$$

де $\alpha = \frac{G}{V}$; U_c – лінійна швидкість агента сушіння, *м/с*;

– для теплових потоків

$$t_T = t_к + \frac{(1+Rb)\cdot r_c \cdot (W_0 - W)}{\alpha \cdot C_T} - \frac{D}{U_c}\frac{dt_T}{dl}. \quad (6)$$

Таким, чином математичні моделі процесів конвективного сушіння з використанням системи диференціальних рівнянь тепломасоперенесення і рівнянь ($1 \div 6$) можливо записати:

для матеріалу у форму кулі

система рівнянь тепломасоперенесення

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{\varepsilon r_c}{C}\frac{\partial U}{\partial \tau};$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) + a_m\delta\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right) \quad (7)$$

$$a_T = \frac{\lambda}{c\rho_0}; \qquad \tau \ge 0; \qquad 0 \le r \le R,$$

краєві умови

$$t\Big|_{\tau=0} = t_0;\ U\Big|_{\tau=0} = U_0;\ \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=0} = 0;\ \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

$$-a_m\rho_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_n + \delta\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_n\right] = BP_S\left\{1 - \frac{\Pi}{AP_S}\left[X_K - \frac{1}{\alpha}(W_0 - W) - \frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}\right]\right\}$$

$$\alpha_T\left[t_K + \frac{(1+Rb)r_c(W_0 - W)}{\alpha C_T} - \frac{D}{U_C}\frac{dt_T}{dl} - t_n\right] = (1-\varepsilon)r_c BP_S\{1 - \frac{\Pi}{AP_S}[X_K - \frac{1}{\alpha}(W_0 - W) - \quad (8)$$

$$-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}]\} + \lambda\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_n,$$

де $A = 0{,}622 + X_K - \frac{W_0 - W}{\alpha};\ \ W = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 U dr$,

t_0 - початкова температура матеріалу, град; U_0 - початковий вологовміст матеріалу, кг в./кг с.м; τ - час, с; Π – загальний тиск в апараті, н/м^2; R - радіус кулі, м; L - висота апарата, м; n - індекс, що вказує поверхню матеріалу, C – теплоємність матеріалу, дж/кг·град.

Для матеріалу у формі циліндра

система рівнянь тепломасоперенесення

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial b^2}\right) + \frac{\varepsilon r_c}{C}\frac{\partial U}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2}\right) + a_m\delta\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial b^2}\right) \quad (9)$$

$$\tau \ge 0; \quad 0 \le r \le R; \quad 0 \le b \le B;$$

краєві умови

$$t\Big|_{\tau=0} = t_0;\quad U\Big|_{\tau=0} = U_0;\ \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial b}\right)_{b=0} = \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=0} = \left(\frac{\partial t}{\partial b}\right)_{b=0} = 0$$

$$-a_m\rho_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_n + \delta\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_n\right] = BP_S\left\{1 - \frac{\Pi}{AP_S}\left[X_K - \frac{1}{\alpha}(W_0 - W) - \frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}\right]\right\}$$

$$-a_m\rho_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial b}\right)_n + \delta\left(\frac{\partial t}{\partial b}\right)_n\right] = BP_S\left\{1 - \frac{\Pi}{AP_S}\left[X_K - \frac{1}{\alpha}(W_0 - W) - \frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}\right]\right\} \quad (10)$$

$$\alpha_T[t_K + \frac{(1+Rb)r_c(W_0 - W)}{\alpha C_T} - \frac{D}{U_C}\frac{dt_T}{dl} - t_n] = \lambda\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_n + (1-\varepsilon)r_c BP_S\{1 - \frac{\Pi}{AP_S}[X_K - \frac{1}{\alpha}(W_0 - W) -$$

$$-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}]\};$$

$$\alpha_T[t_K+\frac{(1+Rb)r_c(W_0-W)}{\alpha C_T}-\frac{D}{U_C}\frac{dt_T}{dl}-t_n]=\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial b}\right)_n+(1-\varepsilon)r_cBP_S\{1-\frac{\Pi}{AP_S}[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-$$
$$-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}]\};$$

$$W=\frac{2}{R^2B_1}\int_0^R\int_0^{B_1}U\cdot rdrdb,$$

де R - радіус циліндра, м; B_1 - довжина половини циліндра, м.

Для матеріалу у формі паралелепіпеда

система рівнянь тепломасоперенесення

$$\begin{aligned}&\frac{\partial t}{\partial\tau}=a_T\left(\frac{\partial^2t}{\partial b_1^2}+\frac{\partial^2t}{\partial b_2^2}+\frac{\partial^2t}{\partial b_3^2}\right)+\frac{\varepsilon r_c}{C}\frac{\partial U}{\partial\tau}\\&\frac{\partial U}{\partial\tau}=a_m\left(\frac{\partial^2U}{\partial b_1^2}+\frac{\partial^2U}{\partial b_2^2}+\frac{\partial^2U}{\partial b_3^2}\right)+a_m\delta\left(\frac{\partial^2t}{\partial b_1^2}+\frac{\partial^2t}{\partial b_2^2}+\frac{\partial^2t}{\partial b_3^2}\right)\\&\tau\ge0;\quad 0\le b_1\le B_1;\quad 0\le b_2\le B_2;\quad 0\le b_3\le B_3;\end{aligned}\tag{11}$$

краєві умови

$$t\Big|_{\tau=0}=t_0;\qquad U\Big|_{\tau=0}=U_0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial b_1}\right)_{b_1=0}=\left(\frac{\partial U}{\partial b_2}\right)_{b_2=0}=\left(\frac{\partial U}{\partial b_3}\right)_{b3=0}=\left(\frac{\partial t}{\partial b_1}\right)_{b_1=0}=\left(\frac{\partial t}{\partial b_2}\right)_{b_2=0}=\left(\frac{\partial t}{\partial b_3}\right)_{b_3=0}=0$$

$$\begin{aligned}&-a_m\rho_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial b_1}\right)_n+\delta\left(\frac{\partial t}{\partial b_1}\right)_n\right]=BP_S\left\{1-\frac{\Pi}{AP_S}\left[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}\right]\right\}\\&-a_m\rho_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial b_2}\right)_n+\delta\left(\frac{\partial t}{\partial b_2}\right)_n\right]=BP_S\left\{1-\frac{\Pi}{AP_S}\left[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}\right]\right\}\\&-a_m\rho_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial b_3}\right)_n+\delta\left(\frac{\partial t}{\partial b_3}\right)_n\right]=BP_S\left\{1-\frac{\Pi}{AP_S}\left[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}\right]\right\}\end{aligned}\tag{12}$$

$$\alpha_T[t_K+\frac{(1+Rb)r_c(W_0-W)}{\alpha C_T}-\frac{D}{U_C}\frac{dt_T}{dl}-t_n]=\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial b_1}\right)_n+(1-\varepsilon)r_cBP_S\{1-\frac{\Pi}{AP_S}[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-$$
$$-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}]\};$$

$$\alpha_T[t_K+\frac{(1+Rb)r_c(W_0-W)}{\alpha C_T}-\frac{D}{U_C}\frac{dt_T}{dl}-t_n]=\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial b_2}\right)_n+(1-\varepsilon)r_cBP_S\{1-\frac{\Pi}{AP_S}[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-$$
$$-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}]\};$$

$$\alpha_T[t_K+\frac{(1+Rb)r_c(W_0-W)}{\alpha C_T}-\frac{D}{U_C}\frac{dt_T}{dl}-t_n]=\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial b_3}\right)_n+(1-\varepsilon)r_cBP_S\{1-\frac{\Pi}{AP_S}[X_K-\frac{1}{\alpha}(W_0-W)-$$
$$-\frac{D}{U_C}\frac{dX}{dl}]\};$$

$$W=\frac{1}{B_1B_2B_3}\int_0^{B_1}\int_0^{B_2}\int_0^{B_3}U\cdot db_1db_2db_3,$$

де B_1, B_2, B_3 - розміри половин паралелепіпеда, м.

Моделі записані для симетричних умов, які часто зустрічаються на практиці, для ізотропних матеріалів, при сталих коефіцієнтах, при початковому рівномірному розподіленню температури і вологовмісту матеріалу, що висушується, при відсутності градієнта загального тиску.

Випрацьовані моделі мають у своєму складі значну кількість параметрів, цифрові значення яких обчислюють згідно з відповіднми методиками. Деякі з них, що визначаються на підставі функцій розподілення, дають змогу описувати імовірностеві за своєю природою явища детермінованими характеристиками нескладної структури. Такі параметри можуть обчислюватись в ряді випадків шляхом розв’язки зворотніх задач, що дозволяє значно підвищувати адекватність моделей. До таких належить коефіцієнт зворотнього перемішування, що входить до складу приведених моделей, який здатний відображати подвійну (детерміновано-стохастичну) природу досліджуваних процесів. Наявність зворотнього перемішування сповільнює процеси тепломасообміну тому, що при цьому зменшуються їх рушійні сили.

Висновок

Розроблено ряд математичних моделей процесів конвективного сушіння з оцінкою динаміки, які здатні відображувати основні явища, що лежать в їх основі, які можуть бути використані при розв’язанні задач підвищеної складності – адекватного прогнозування, оптимізації, керування процесами в оптимальних умовах.

Mathematical models of processes convection dryings for disperse materials in the form of a sphere, the cylinder are developed on the basis of system of the differential equations of carry of weight and heat in dryers of continuous action which serve for the dicision of the complicated problems adequate forecasting, optimization, a manual of processes.

Література

1. Лыков А.В. Тепломассообмен.- М.: Энергия, 1978.-560 с.
2. Мазяк З.Ю. Тепломассоперенос в пористых телах при переменных потенциалах в среде.- К.: Вища школа, 1979.-120 с.
3. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии.-М.: Химия, 1985.-495 с.

Одержано 11.11.2003 р.