

Міністерство освіти і науки України

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

*Кафедра технічної механіки та
сільськогосподарських машин*

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ
конкурсні задачі,
прикладні розв'язування
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

для студентів спеціальностей
«Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування»,
«Будівництво», «Автомобільний транспорт», «Агроінженерія»

Тернопіль
2020

УДК 620.10

Г 27

Автори:

Р.Б. Гевко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Т.А. Довбуш, кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Н.І. Хомик, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

А.Д. Довбуш, старший викладач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин

Рецензенти:

Дідух В.Ф., д.т.н., професор, завідувач кафедри агроінженерії Луцького національного технічного університету

Марущак П.О., д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизації Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Розглянуто на засіданні кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин, протокол № 11 від 06.05.2020 р.

Схвалено й рекомендовано до друку та впровадження у навчальний процес на засіданні вчені ради ТНТУ імені Івана Пулюя, протокол № 9 від 23.06.2020 р.

Гевко Р.Б.

Г 27 Опір матеріалів. Конкурсні задачі, приклади розв'язування: навчальний посібник / Р.Б. Гевко, Т.А. Довбуш, Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль: ФОП Паляниця В.М., 2020. – 160 с.

Посібник розроблено для поглибленого вивчення дисципліни «Опір матеріалів» для студентів спеціальностей «Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування», «Будівництво», «Автомобільний транспорт», «Агроінженерія».

Мета посібника – надати практичну допомогу студентам при вивченні окремих розділів дисципліни «Опір матеріалів» на основі конкурсних задач. У посібнику, у короткій формі, у кожному з розділів, а саме: складаний напружений стан; прямий поперечний згин; криві бруси; бруси, виготовлені з різнорідних матеріалів, викладено основні поняття опору матеріалів. Наведено приклади розв'язування задач та задачі, призначені для самостійного розв'язування до кожного із цих розділів, які вибрані із завдань всеукраїнських олімпіад з «Опору матеріалів». Є список рекомендованої літератури.

© Гевко Р.Б.
Довбуш Т. А.,
Хомик Н. І.,
Довбуш А. Д., 2020

ЗМІСТ

стр.

ВСТУП	4
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ	6
2. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН	13
<i>ПРИКЛАДИ</i>	16
Задачі для самостійного розв'язування	32
3. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН	35
3.1. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.....	35
<i>ПРИКЛАДИ</i>	40
Задачі для самостійного розв'язування.....	48
3.2. Напруження при згині. Розрахунок на міцність.....	50
<i>ПРИКЛАДИ</i>	54
Задачі для самостійного розв'язування.....	67
3.3. Визначення переміщень при згині.....	70
<i>ПРИКЛАДИ</i>	79
Задачі для самостійного розв'язування.....	101
4. КРИВІ БРУСИ	104
<i>ПРИКЛАДИ</i>	107
Задачі для самостійного розв'язування.....	125
5. БРУСИ, ВИГОТОВЛЕНІ З РІЗНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ	126
5.1. Розтяг стиск.....	127
5.2. Кручення.....	130
5.3. Прямий поперечний згин.....	134
<i>ПРИКЛАДИ</i>	138
Задачі для самостійного розв'язування.....	152
Перелік використаної і рекомендованої літератури.....	155
Додатки.....	156

ВСТУП

Час в якому ми живемо – це час бурхливого розвитку техніки, нових технологій. Сучасні молоді людини, яка здобувають вищу технічну освіту, повинні глибоко та всебічно вивчити комплекс дисциплін, щоб ґрунтовно оволодіти інженерними навиками розрахунків та конструювання.

Предметні олімпіади, які проходять у нашому університеті, допомагають студентам виявити знання з окремих дисциплін та поглибити їх. Згодом кращі студенти захищають честь університету на всеукраїнських олімпіадах.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя розпочав свою діяльність у 1960 році, як Тернопільський філіал Львівського політехнічного інституту. На той час проводив підготовку фахівців із спеціальностей: технологія машинобудування, металорізальні верстати та інструменти, радіотехніка, електровимірвальна техніка. На даний час наш університет готує фахівців із 27 спеціальностей.

Розвиток напряму підготовки «Інженерна механіка» сприяв виділенню тісно з ним пов'язаного напряму «Машинобудування». Нові технології і потреби ринку праці сприяли відкриттю у нашому університеті підготовки фахівців за напрямом «Будівництво».

Студенти, які навчаються на цих спеціальностях, для оволодіння фахом вивчають багато предметів. Але однією із фундаментальних дисциплін для майбутніх інженерів-механіків та інженерів-будівельників є опір матеріалів. Він є основою для вивчення решти інженерних дисциплін, зокрема, будівельної механіки, деталей машин.

Дисципліну «Опір матеріалів» викладають досвідчені фахівці кафедр технічної механіки та будівельної механіки.

Кафедра технічної механіки (з вересня 2016 року – технічної механіки та сільськогосподарських машин) заснована одночасно із створенням нашого навчального закладу. Викладачі кафедри, починаючи з 1976 року, підтримують всеукраїнську ініціативу та постійно організовують вузівські тури олімпіад з опору матеріалів серед студентів другого та третього курсів. Переможці перших турів олімпіад беруть участь у всеукраїнських олімпіадах, свого часу були й учасниками всесоюзних олімпіад.

Відзначимо, що учасниками олімпіад з опору матеріалів були кращі студенти, а згоом співробітники ТНТУ, а саме: Гладь Юрій Богданович – переможець Українського та Всесоюзного турів олімпіади 1978 р., к.т.н., доцент; Зеленський Костянтин Васильович – учасник олімпіади 1984 р., к.т.н., доцент, директор Гусятинського коледжу; Дячук Степан Федорович – учасник олімпіади 1985 р. (посів третє місце), к.т.н., доцент, проректор

ТНТУ; Мартов Сергій – учасник олімпіади 1990 р., колишній ст. викладач кафедри маркетингу на виробництві; Головата Ірина Михайлівна – учасниця олімпіади у 1986 р. (зайняла 6 місце), колишній викладач кафедри інформатики та математичного моделювання; Бабій Андрій Васильович – учасник олімпіад 1999, 2000, 2001 рр., сьогодні доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин; Пастернак Сергій Ігорович – учасник олімпіади у 2002 р. (увійшов у першу десятку), згодом студент Національного університету «Київський політехнічний інститут»; Костюк Мар'яна – учасник олімпіад 2004, 2005 рр., (увійшла у першу десятку), після закінчення університету працює у бюро технічної інвентаризації м. Тернополя; Клендій Олександра Миколаївна – учасник олімпіад 2007, 2008 рр., на даний час к.т.н., доцент Національного університету біоресурсів та природокористування; Довбуш Тарас Анатолійович – учасник олімпіади 2010 р. у Київському національному університеті будівництва та архітектури, зайняв загальне п'яте місце і третє серед технічних університетів України; а також учасник олімпіади 2012 року у Полтавському національному технічному університеті, переможець – перше місце (Додатки А, Б), на даний час к.т.н., доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин ТНТУ ім. Ів. Пулюя; Колісник Микола – учасник олімпіад 2017 р. та 2018 р. в Одеській державній академії будівництва та архітектури; у 2017 р. переможець – перше місце серед студентів других курсів (Додаток В); у 2018 р. посів третє місце серед студентів третіх курсів (Додаток Д); на даний час студент магістратури; Биків Назарій (учасник олімпіади 2017 р. в Одеській академії будівництва та архітектури, третє місце серед студентів третіх курсів).

Розроблений посібник включає короткі теоретичні відомості розділів: складний напружений стан; прямий поперечний згин; криві бруси; бруси, виготовлені з різнорідних матеріалів. Наведено приклади розв'язування задач до кожного із цих розділів, які вибрані із завдань всеукраїнських олімпіад з «Опору матеріалів». (період з 1975 р. до 2019 р.) Також вміщені задачі, з тих же розділів, призначені для самостійного розв'язування, які вибрані із завдань всеукраїнських олімпіад з «Опору матеріалів». Є список рекомендованої літератури. Автори вважають, що запропонований посібник дасть можливість кращим студентам відповідних спеціальностей спробувати свої сили у поглибленому вивченні опору матеріалів, заохотити їх до участі в університетській олімпіаді та всеукраїнських олімпіадах.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Задачі опору матеріалів

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

Міцність – здатність матеріалу чи конструкції витримувати механічне навантаження не руйнуючись

$$p_{\max} \leq [p],$$

де p_{\max} – максимальне напруження;

$[p]$ – допустиме напруження.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження без зміни геометричних розмірів та форми

$$f_{\max} \leq [f],$$

де f_{\max} – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$ – допустима деформація (переміщення).

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: бруси, оболонки, пластини, масивні тіла. Відповідно до них виконують розрахунки в опорі матеріалів.

Стержень (брус) – тіло призматичної форми, в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стержні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

Приклади стержнів: вали, осі, балки, труби, рейки, елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки, елементи ланцюгів).

Пластина – призматичне (циліндричне) тіло, в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших.

Приклади пластин: плоскі днища й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриттів.

Оболонка – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це – пластина з викривленою серединною поверхнею. Приклади: стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів.

Масив (масивне тіло) – тіло, розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку. Приклади: фундаменти споруд, підпірні стінки, основи потужних пресів і верстатів.

Класифікація зовнішніх навантажень

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

Статичні – це навантаження, значення, напрямок і місце прикладання яких залишаються постійними.

Динамічні – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямку чи місця прикладання.

2. За характером прикладання (рис. 1.1):

а) F , Q , R – зосереджені сили [Н, кН, МН];

б) M , T – зосереджені моменти [Нм, кНм, МНм];

в) q – розподілені на лінії [Н/м, кН/м].

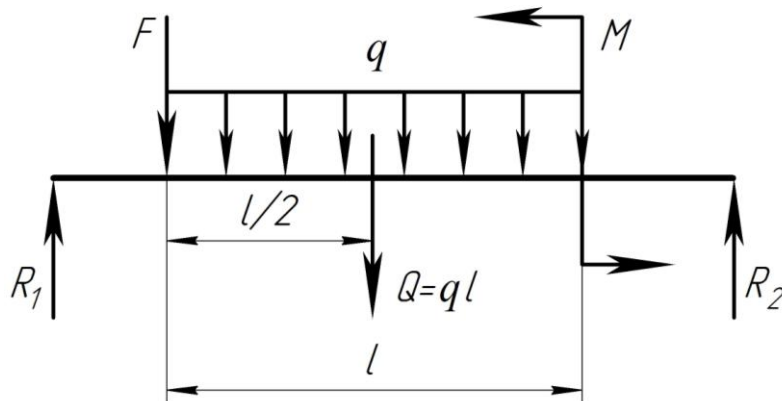


Рисунок 1.1

Розрахункова схема – це реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей. Для одного і того ж об'єкта може бути створена не одна розрахункова схема, що залежить від особливостей навантаження і умов роботи.

Основні види деформацій

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину. При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки *поздовжня (осьова) сила N* .

Брус, що працює на розтяг (стиск), називають стержнем.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневих машин. На стиск працюють цегляна кладка будинків, фундамент, колони, пуансони штампів.

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила Q* . Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

3. **Кручення** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *крутний момент M_{KR}* . Брус круглого поперечного перетину, який передає потужність під час обертального руху, називають валом. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникає *згинальний момент $M_{зг}$* та поперечна сила Q . Брус, який працює на згин, називають балкою.

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій, а саме: *згин + кручення; стиск + згин* і т.д.

Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Ейлора

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають *зусиллями*. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають *навантаженнями*.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують метод перетинів.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають *нормальним* або *поперечним*; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають *косим* або *похилим*.

Метод перетинів полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізають площиною на 2-і частини (рис. 1.2а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рис. 1.2б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

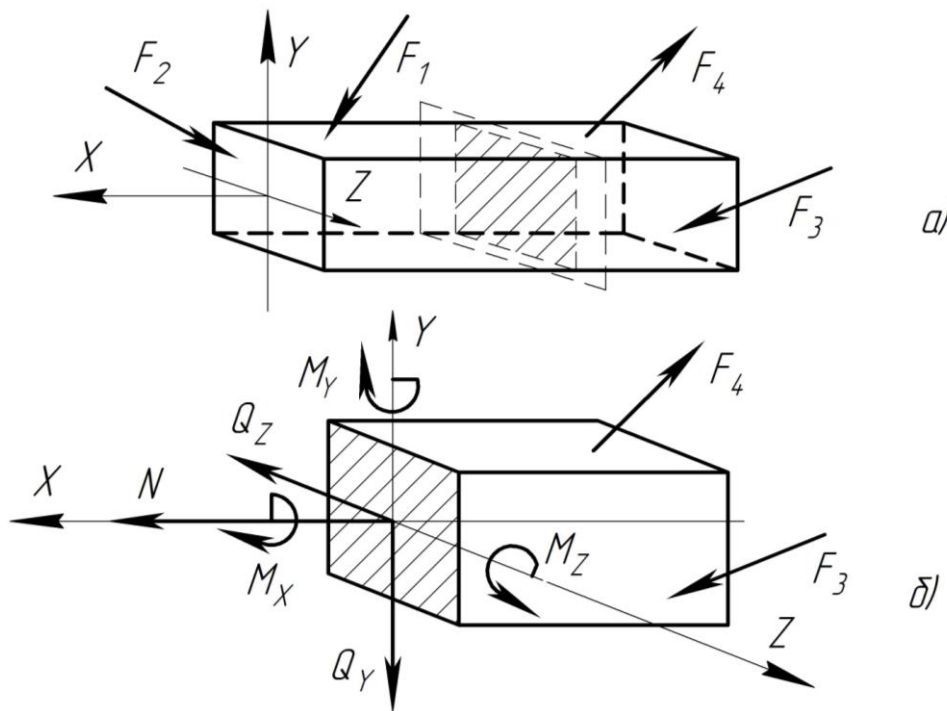


Рисунок 1.2

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає шість внутрішніх силових факторів:

N_X – поздовжня (нормальна) сила, діє вздовж осі бруса, перпендикулярна до площини перетину;

Q_Y, Q_Z – поперечні сили, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей OY, OZ ;

M_Y, M_Z – моменти, що повертають перетин навколо осей OY, OZ , намагаються зігнути стержень у площинах XZ та XY , тобто згинальні моменти, $M_Y = M_{зг.Y}$; $M_Z = M_{зг.Z}$;

M_X – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот перетину відносно поздовжньої осі бруса OX , тобто скручує брус, називають його крутним моментом, $M_X = M_{кр}$.

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, відповідно до методу перетинів, записують шість умов рівноваги сил, що діють на залишену частину бруса (використовують шість рівнянь статки). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проекцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі Ox , Oy , Oz , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{array}{ll} \sum X = 0; & N_X + \sum F_{iX} = 0; \\ \sum Y = 0; & Q_Y + \sum F_{iY} = 0; \\ \sum Z = 0; & Q_Z + \sum F_{iZ} = 0; \\ \sum M_X = 0; & M_{KP} + \sum M_X(F_i) = 0; \\ \sum M_Y = 0; & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) = 0; \\ \sum M_Z = 0; & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) = 0. \end{array}$$

Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стержня (бруса). **Епюри штрихують лініями, перпендикулярними до осі бруса.**

Припущення (гіпотези) про властивості матеріалів конструктивних елементів

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Припускають, що матеріал суцільно заповнює об'єм тіла, спростовуючи теорію дискретної будови речовин.

2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність. Вважають, що у будь-якій точці тіла та у будь-якому напрямі механічні властивості матеріалу однакові.

3. Гіпотеза про ідеальну пружність та природну ненапруженість матеріалу. Припускають, що деформації, спричинені дією навантажень, після розвантаження повністю зникають, а початкові зусилля та напруження відсутні.

Напруження

Це – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Повне напруження (рис. 1.3) визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;
 ΔA – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля ΔR .

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину ΔN ; друга лежить у площині перетину ΔQ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

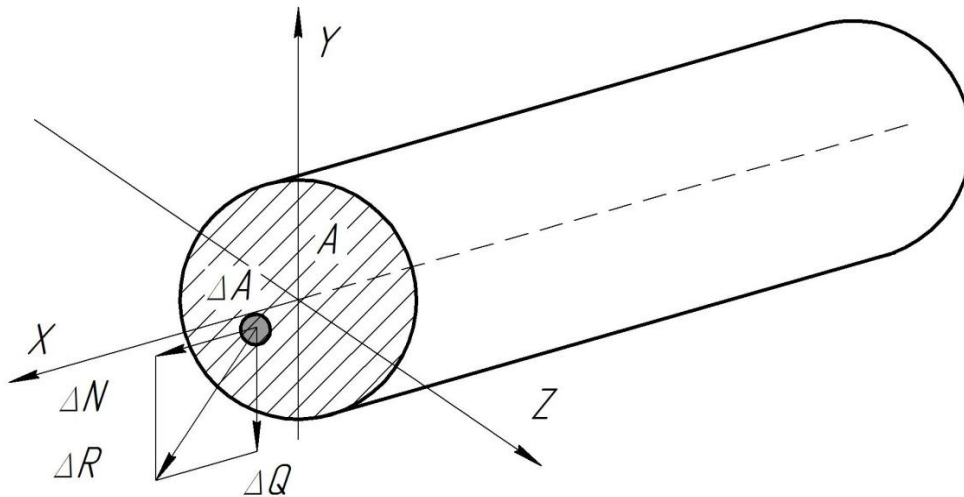


Рисунок 1.3

Дотичне напруження – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Нормальне напруження – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень $1 \text{ Па} = \text{Н} / \text{м}^2$, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н} / \text{мм}^2$.

Допустимі напруження. Розрахунок на міцність

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні, допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – це ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні. Але якщо робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча й менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому *при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими*.

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг і стиск;

n – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де $[\sigma]_P$ – допустиме напруження на розтяг;

σ_{MP} – границя міцності на розтяг;

$[\sigma]_C$ – допустиме напруження на стиск;

σ_{MC} – границя міцності на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \dots 2,5$;
для крихких матеріалів $n = 2 \dots 5$.

2. СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

Через будь-яку точку деформованого масивного тіла можна провести безліч по-різному орієнтованих січних площин (площадок). **Сукупність нормальних і дотичних напружень, які виникають на площадках, що проходять через дану точку, характеризують напружений стан тіла у даній точці.**

Нормальні напруження σ вважаємо додатними якщо вони розтягують матеріал елемента. Дотичні напруження вважаємо додатними, коли вони утворюють пару сил відносно центра елемента, яка хоче повернути його за годинниковою стрілкою (рис. 2.1).

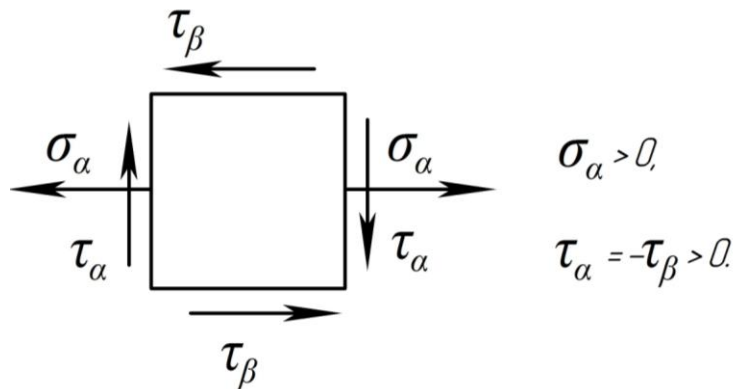


Рисунок 2.1

Дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках дорівнюють одні одним, але протилежні за знаком. (Закон парності дотичних напружень).

Через кожну точку тіла можна провести три взаємно-перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Такі площадки називають **головними площадками**, а напруження, що діють на них, – **головними напруженнями**. Позначають їх $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, до того ж $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Головні напруження в даній точці масивного тіла досягають екстремальних значень для заданого напруженого стану.

Є три види напруженого стану (рис. 2.2–2.4).

1. Лінійний

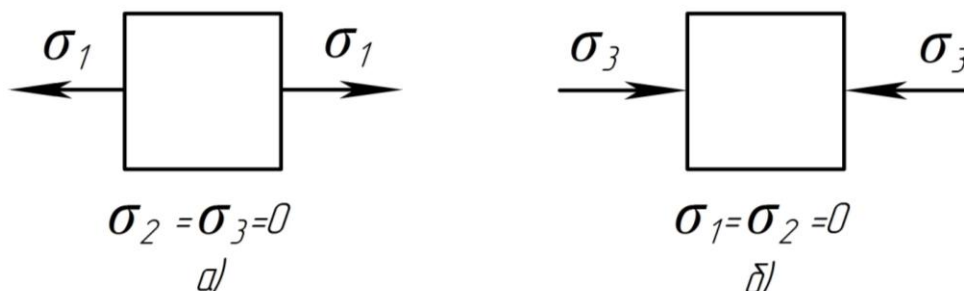


Рисунок 2.2

2. Плоский

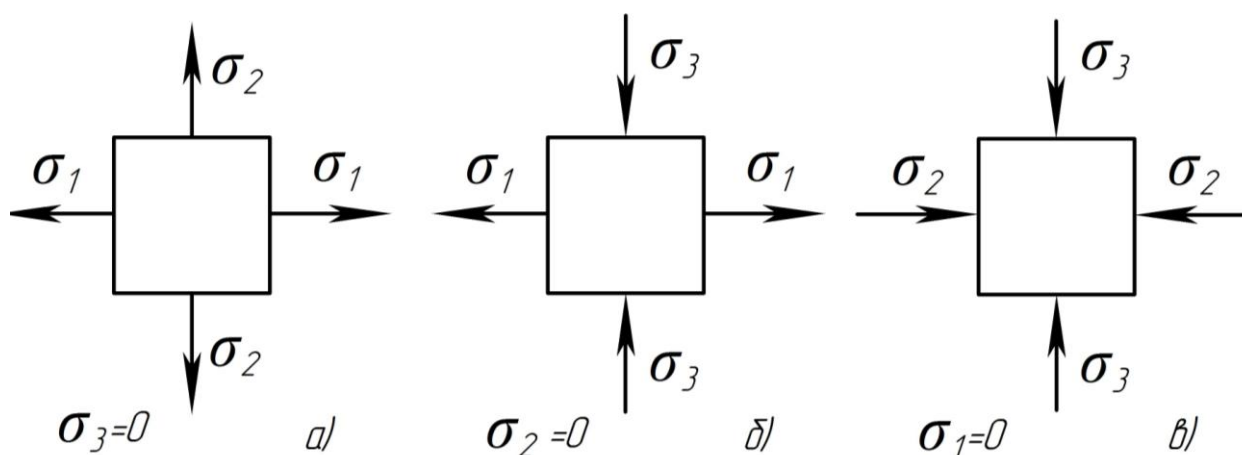


Рисунок 2.3

3. Об'ємний

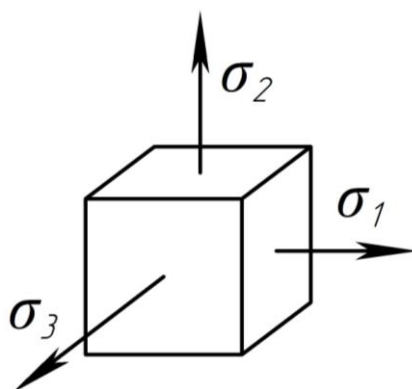


Рисунок 2.4

Надалі розглядаємо лінійний та плоский напружені стани.

Більшість задач складного напруженого стану полягає у визначенні головних напружень за відомими нормальними та дотичними напруженнями на площадках.

Головні напруження – це екстремальні (максимальні і мінімальні) напруження, за якими можна оцінювати міцність матеріалу конструкції.

У загальному випадку, для плоского напруженого стану відомі нормальні σ_α , σ_β та дотичні $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ напруження, що діють на взаємно перпендикулярних площадках. Вважаємо, що $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$. Тому розрахункову схему можна прийняти такою, як зображено на рис. 2.5.

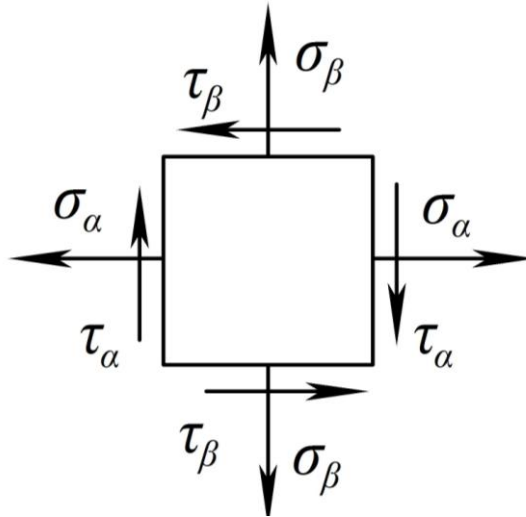


Рисунок 2.5

Величину та напрям головних напружень визначають за формулами

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} \pm \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \right];$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}},$$

де σ_{\max} – більше головне напруження, $\sigma_{\max} = \sigma_1$ (рис. 2.3а,б),

$\sigma_{\max} = \sigma_2$ (рис. 2.3в);

σ_{\min} – менше головне напруження, $\sigma_{\min} = \sigma_2$ (рис. 2.3а),

$\sigma_{\min} = \sigma_3$ (рис. 2.3б,в);

α – кут, на який необхідно повернути вектор σ_{α} , щоб визначити напрям більшого головного напруження (якщо кут додатній, то повертати потрібно проти ходу стрілки годинника).

Узагальнений закон Гука для об'ємного напруженого стану

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

де μ – коефіцієнт Пуассона;

E – модуль пружності.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – відносні деформації у напрямку головних напружень.

Відносна зміна об'єму

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

ПРИКЛАДИ

Приклад 2.1. На елемент, зображений на рис. 2.6, діють: $\sigma_B = 0$; $\sigma_\Gamma = 60$ МПа; $\tau = 100$ МПа. Необхідно:

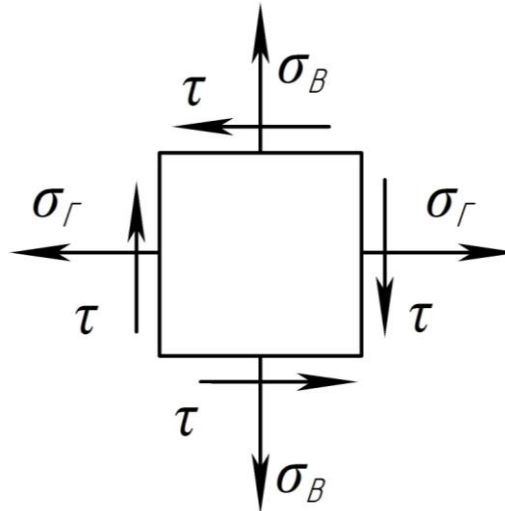


Рисунок 2.6

1. Визначити величини і напрями σ_α , σ_β , τ_α , τ_β (індекси «B» і «Г» на схемі означають «вертикальний» і «горизонтальний», замінити їх на α і β згідно з величиною і знаком σ), зобразити заданий елемент.

2. Визначити графічно величину і напрям головних напружень. В середині заданого елемента зобразити «головний елемент», обмежений головними площадками.

3. Визначити величину τ_{\max} і на тому ж самому рисунку показати положення площадки, на якій діє τ_{\max} .

4. Перевірити отримані результати аналітично.

5. Визначити відносні деформації у напрямках всіх трьох головних напружень.

6. Визначити відносну зміну об'єму і питому потенціальну енергію деформації.

7. Визначити розрахункові напруження за однією з відповідних заданому матеріалу теорій міцності для матеріалів сталь Ст.3 і чавун СЧ18-36. Порівняти їх значення з допустимими напруженнями, прийнявши коефіцієнти запасу міцності $n_T = 1,5$; $n_M = 2,5$.

Розв'язування

Замінімо індекси напружень, що діють на елемент, відповідно до даних та розрахункової схеми (рис. 2.7a)

$$\sigma_\alpha = \sigma_\Gamma = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_\beta = \sigma_B = 0; \quad \sigma_\alpha > \sigma_\beta.$$

На площадці α дотичні напруження $\tau_\alpha = 100$ МПа. За законом парності дотичних напружень

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = 100 \text{ МПа.}$$

Викреслюємо прямокутну систему координат σ, τ . Вісь σ проводимо паралельно більшому нормальному напруженню σ_α (рис. 2.7б). У цій системі координат визначаємо точки, які відповідають напруженням на площадках α і β – це точки D_α і D_β . Так як ці точки відображають напруження, які діють на двох взаємноперпендикулярних площадках, то відрізок $D_\alpha D_\beta$ є діаметром кола напружень. Точка перетину цього діаметра з віссю σ дає центр кола – точку C . Точки A і B , в яких коло перетинає вісь σ ($\tau = 0$), визначають величини головних нормальних напружень:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = 135 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \overline{OB} = -75 \text{ МПа}.$$

Напрямок напруження σ_1 визначають вектором BD'_α , $\sigma_\beta = 0$; $\sigma_2 = 0$.

Кут між нормальними напруженнями σ_α і σ_1 становить $\alpha = -37^\circ$. Знак мінус вказує на те, що його відкладають від осі σ за годинниковою стрілкою.

Максимальне дотичне напруження τ_{\max} дорівнює радіусу кола Мора

$$\tau_{\max} = CT = 105 \text{ МПа}.$$

Кут між напруженням σ_α і більшим головним напруженням визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -\frac{2 \cdot 100}{60 - 0} = -3,33;$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (3,33) = -37^\circ.$$

Максимальне дотичне напруження дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{135 - (-75)}{2} = 105 \text{ МПа}.$$

Вектори напружень $\sigma_1, \sigma_3, \tau_{\max}$ і площадки, на яких вони діють, зображаємо на рис. 2.7а.

Відносні деформації в напрямі головних напружень для сталюого елемента визначаємо за формулами:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[135 - 0,3 \cdot (-75) \right] = 78,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left[\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[0 - 0,3 \cdot (135 - 75) \right] = -9,00 \cdot 10^{-5};$$

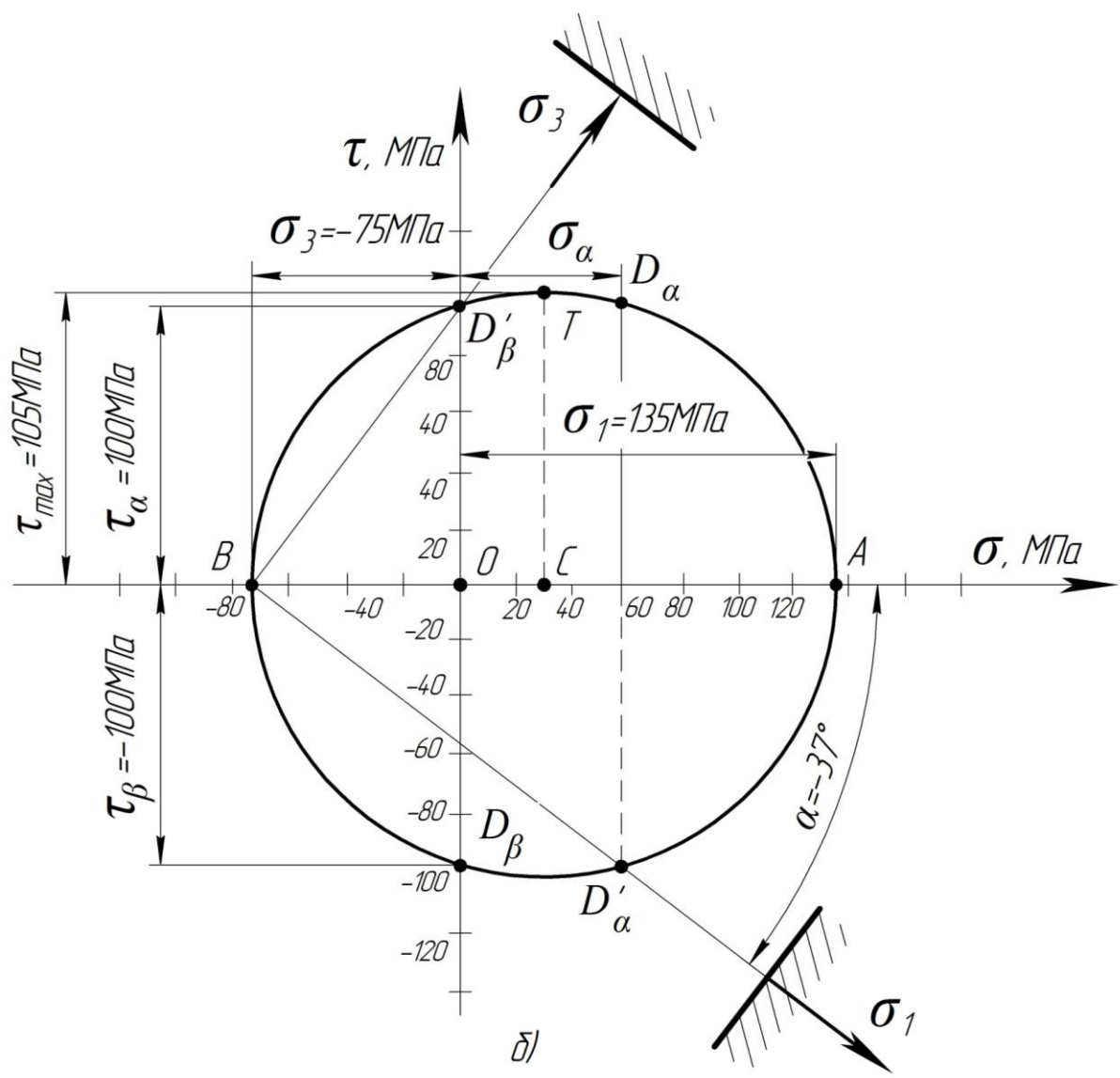
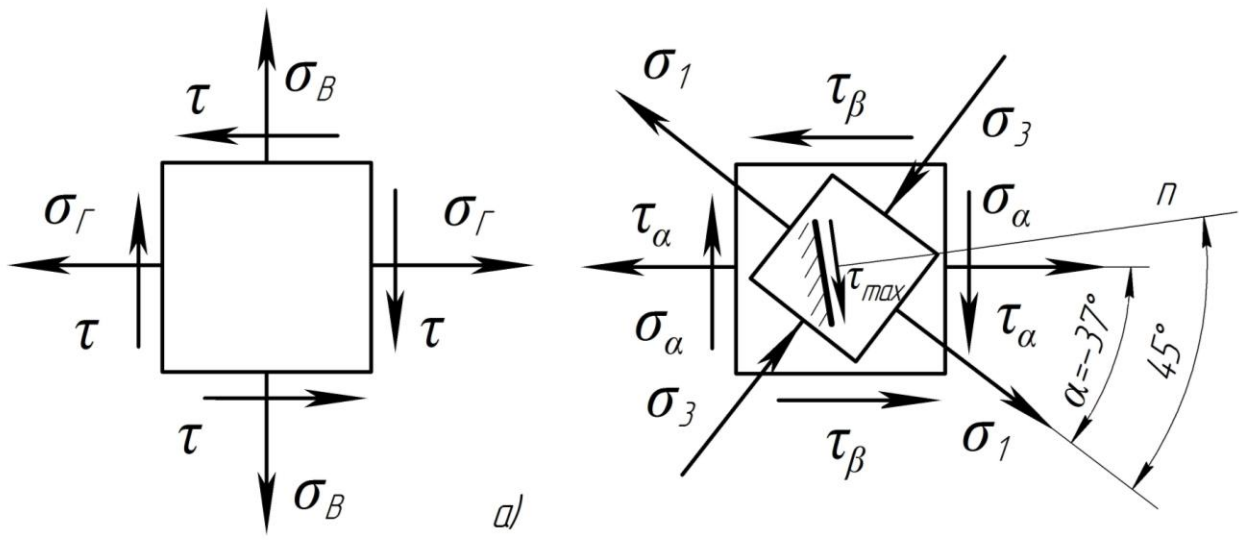


Рисунок 2.7

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-75 - 0,3 \cdot 135] = -57,8 \cdot 10^{-5}.$$

Визначаємо відносну зміну об'єму

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (78,8 - 9,00 - 57,8) \cdot 10^{-5} = 12 \cdot 10^{-5}.$$

Визначаємо питому потенціальну енергію деформації сталюого елемента

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2}(78,8 \cdot 135 + 0 + 57,8 \cdot 75) \cdot 10^{-5} = 74,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{МНм}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

Визначаємо допустимі напруження:

а) для сталі Ст.3

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{220}{1,5} = 147 \text{ МПа},$$

де σ_T – границя текучості, для сталі Ст.3 $\sigma_T = 220$ МПа;

б) для чавуну СЧ18-36:

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n_M} = \frac{180}{2,5} = 72 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n_M} = \frac{700}{2,5} = 280 \text{ МПа},$$

де σ_{MP} , σ_{MC} – границі міцності на розтяг і стиск для крихкого

матеріалу, для СЧ18-36 $\sigma_{MP} = 180$ МПа, $\sigma_{MC} = 700$ МПа.

Для сталі Ст.3, яка є пластичним матеріалом, перевірку на міцність можна проводити за третьою або четвертою теорією міцності. За третьою теорією міцності

$$\sigma_{P3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 135 - (-75) = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{P3} = 210 \text{ МПа} > [\sigma] = 147 \text{ МПа}.$$

Умову міцності не забезпечено.

Для чавуна СЧ18-36, який є крихким матеріалом, застосовуємо теорію міцності Мора, оскільки досліджуваний напружений стан матеріалу знаходиться між простим розтягом і простим стиском

$$\sigma_P = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3 = 135 - 0,257 \cdot (-75) = 154 \text{ МПа};$$

$$\sigma_P = 154 \text{ МПа} > [\sigma]_P = 72 \text{ МПа},$$

де

$$\nu = \frac{[\sigma]_P}{[\sigma]_C} = \frac{72}{280} = 0,257.$$

Умову міцності для чавуну теж не забезпечено.

Приклад 2.2. Стержень (рис. 2.8а) довжиною $2l$ квадратного поперечного перетину з довжиною сторони a виготовлений з ізотропного пружного матеріалу з модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона μ . Стержень встановлюють у паз, виконаний точно за його розмірами. Тертя по поверхні дотику стержня і пазу відсутнє. Визначити переміщення точки C під дією сили F , вважаючи матеріал, в якому виконано паз, абсолютно жорстким.

Розв'язування

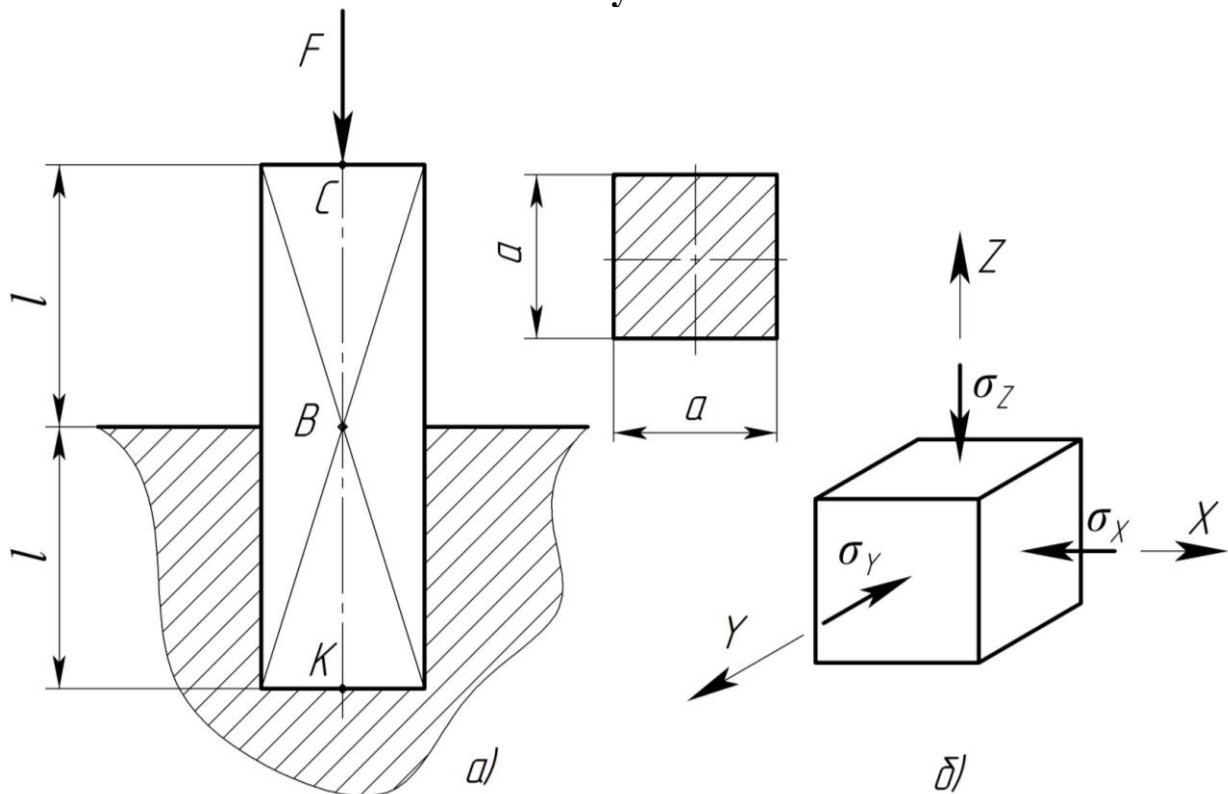


Рисунок 2.8

Переміщення точки C від впливу сили F дорівнює

$$\Delta l_C = \Delta l_C^{CB} + \Delta l_C^{BK},$$

де Δl_C^{CB} – переміщення точки C від деформації ділянки CB ;

Δl_C^{BK} – переміщення точки C від деформації ділянки BK .

Деформація ділянки CB

$$\Delta l_C^{CB} = -\frac{F \cdot l}{E \cdot A},$$

де A – площа поперечного перетину, $A = a^2$.

$$\Delta l_C^{CB} = -\frac{F \cdot l}{E \cdot a^2}.$$

Для визначення деформації ділянки BK , розглянемо напружений стан елементарного кубика вирізаний з матеріалу стержня цієї ділянки (рис. 2.8б). На його бокові поверхні діють нормальні напруження:

$$\sigma_Z = -\frac{F}{a^2}; \quad \sigma_X = \sigma_Y = -p,$$

де p – тиск зі сторони абсолютно жорсткого паза на поверхні стержня.

З узагальненого закону Гука відносна деформація у напрямку осі X

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} \left[\sigma_X - \mu (\sigma_Y + \sigma_Z) \right] = 0,$$

або

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} \left[-p - \mu \left(-p - \frac{F}{a^2} \right) \right] = \frac{1}{E} \left[\mu \cdot p - p + \mu \cdot \frac{F}{a^2} \right] = 0.$$

Визначимо тиск

$$p = \frac{\mu \cdot F}{(1 - \mu) a^2}.$$

Деформація ділянки BK

$$\Delta l_C^{BK} = \varepsilon_Z \cdot l,$$

де ε_Z – відносна деформація ділянки BK

$$\begin{aligned} \varepsilon_Z &= \frac{1}{E} [\sigma_Z - \mu (\sigma_X + \sigma_Y)] = \\ &= \frac{1}{E} \left[-\frac{F}{a^2} - 2\mu \cdot \frac{\mu F}{(1 - \mu) a^2} \right] = -\frac{F}{E \cdot a^2} \left(1 + \frac{2\mu^2}{1 - \mu} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta l_C = -\frac{F \cdot l}{E \cdot a^2} - \frac{F \cdot l}{E \cdot a^2} \left(1 + \frac{2\mu^2}{1 - \mu} \right) = -\frac{F \cdot l}{E \cdot a^2} \left(2 + \frac{2\mu^2}{1 - \mu} \right).$$

Приклад 2.3. В елементарному кубіку (рис. 2.9) діють напруження: $\sigma_X = 150$ МПа; $\sigma_Z = 100$ МПа; $\sigma_Y = 0$. Експериментально визначено: $\varepsilon_Y = -1,07 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_v = 1,44 \cdot 10^{-3}$. Необхідно визначити коефіцієнт Пуассона та модуль пружності матеріалу з якого виготовлено кубик.

Розв'язування

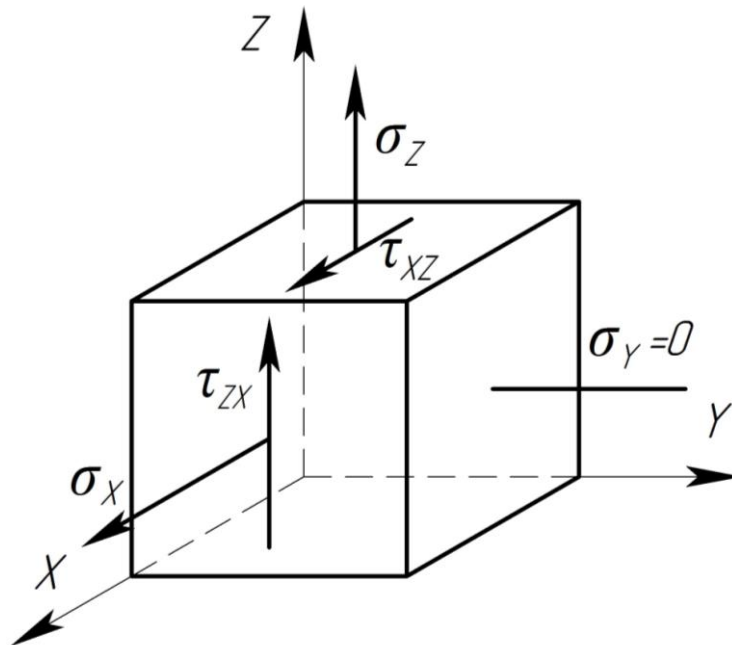


Рисунок 2.9

Площадка, на якій нормальні напруження $\sigma_Y = 0$, є головною, тому що на ній відсутнє дотичне напруження. Тому $\sigma_Y = \sigma_3 = 0$, а $\varepsilon_Y = \varepsilon_3 = -1,07 \cdot 10^{-3}$. Для даного напруженого стану σ_1 і σ_2 більші за нуль і дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{1}{2} \left[\sigma_X + \sigma_Z \pm \sqrt{(\sigma_X - \sigma_Z)^2 + 4\tau_{XZ}^2} \right] = \\ &= \frac{150 + 100 \pm \sqrt{(150 - 100)^2 + 4 \cdot 90^2}}{2} = \frac{250 \pm 187}{2} \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{250 + 187}{2} = 218,5 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{250 - 187}{2} = 31,5 \text{ МПа.}$$

Відносна зміна об'єму кубика

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Звідки

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_v - \varepsilon_3. \quad (2.1)$$

За законом Гука відносні деформації

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2); \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1). \quad (2.3)$$

Підставимо (2.2) і (2.3) в (2.1), отримаємо

$$\frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) + \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) = \varepsilon_v - \varepsilon_3,$$

або

$$\frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2 + \sigma_2 - \mu\sigma_1) = \varepsilon_v - \varepsilon_3,$$

звідки визначимо модуль пружності

$$E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)}{\varepsilon_v - \varepsilon_3} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot (1 - \mu)}{\varepsilon_v - \varepsilon_3}. \quad (2.4)$$

Відносна деформація в напрямку дії головного напруження σ_3 :

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left[-\mu(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \quad (2.5)$$

Після підстановки (2.4) в (2.5), отримаємо

$$\varepsilon_3 = \frac{(\varepsilon_v - \varepsilon_3) \cdot \left[-\mu(\sigma_1 + \sigma_2) \right]}{(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot (1 - \mu)} = -\frac{\mu(\varepsilon_v - \varepsilon_3)}{1 - \mu}.$$

Визначимо чисельне значення коефіцієнта Пуассона

$$\varepsilon_3 \cdot (1 - \mu) = -\mu (\varepsilon_v - \varepsilon_3);$$

$$\varepsilon_3 - \mu \varepsilon_3 = -\mu \varepsilon_v + \mu \varepsilon_3;$$

$$\mu (2\varepsilon_3 - \varepsilon_v) = \varepsilon_3.$$

Визначимо:

- коефіцієнт Пуассона

$$\mu = \frac{\varepsilon_3}{(2\varepsilon_3 - \varepsilon_v)} = \frac{-1,07 \cdot 10^{-3}}{-2 \cdot 1,07 \cdot 10^{-3} - 1,44 \cdot 10^{-3}} = 0,299 ;$$

- модуль пружності

$$E = \frac{(218,5 + 31,5) \cdot (1 - 0,299)}{(1,44 + 1,04) \cdot 10^{-3}} = 6,98 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

Приклад 2.4. Стержень BC круглого поперечного перетину (рис. 2.10) встановлений без зазору в отвір абсолютно жорсткого тіла. Сили тертя відсутні. Необхідно визначити абсолютне видовження стержня BC при його нагріві на Δt° . Пружні характеристики і коефіцієнт лінійного розширення ізотропного матеріалу відомі, $E, \mu, \alpha, \Delta t^\circ$.

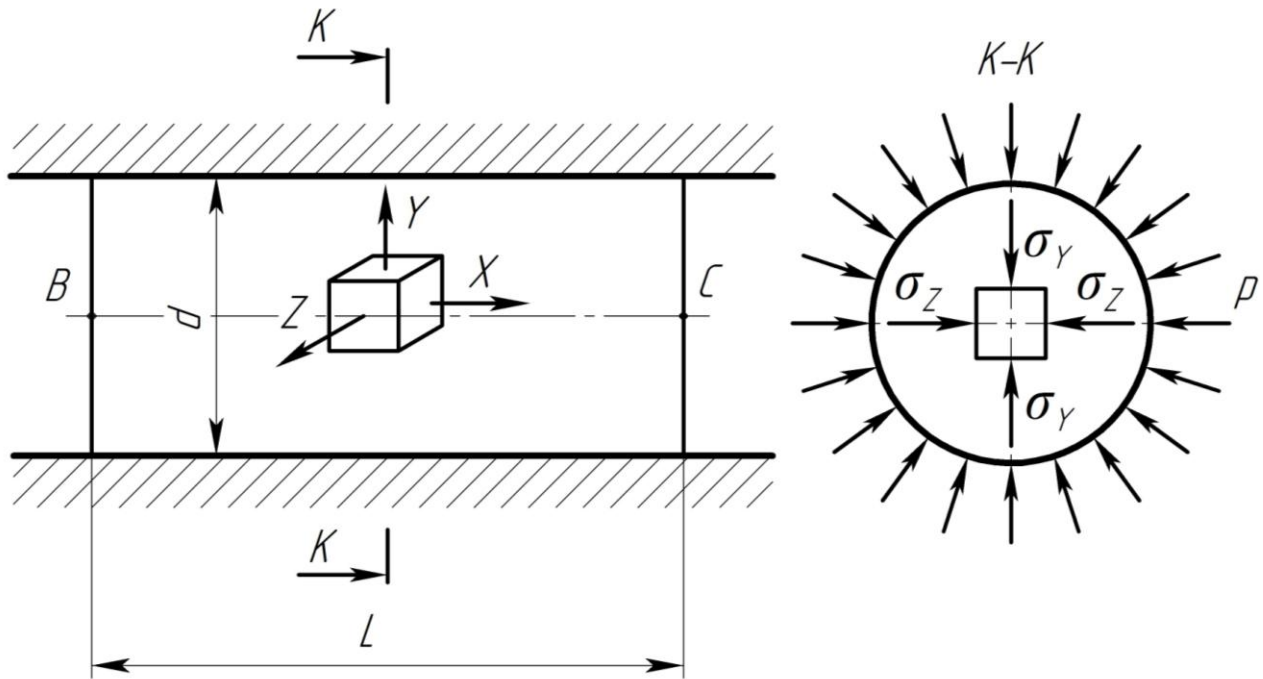


Рисунок 2.10

Розв'язування

На елементарний кубик матеріалу всередині стержня BC (рис. 2.10) діють напруження:

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = -p; \quad \sigma_z = -p.$$

Величину тиску p визначимо з умови рівності деформацій у напрямку осі Y .

Під час нагріву стержня BC на Δt° градусів в напрямку осі Y відбудеться лінійне розширення

$$\Delta l_Y(t) = \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot d,$$

тут d – діаметр стержня BC .

Ця деформація компенсується стисканням від тиску p

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E} \left[\sigma_Y - \mu \cdot \sigma_Z \right] = -\frac{p}{E} \left[\sigma_Y - \mu \cdot \sigma_Z \right] = -\frac{p}{E} \left[1 - \mu \right],$$

$$\Delta l_Y(p) = \varepsilon_Y \cdot d.$$

Враховуючи, що

$$\Delta l_Y(t) + \Delta l_Y(p) = 0,$$

отримаємо

$$p = \frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta t^\circ}{1 - \mu}.$$

Видовження стержня BC в напрямку осі X дорівнює

$$\Delta L = \Delta l_t + \Delta l_X,$$

де Δl_t – лінійне видовження від нагріву матеріалу,

$$\Delta l_t = \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot L;$$

Δl_X – лінійне видовження від напруженого стану, який виникає внаслідок нагрівання матеріалу

$$\Delta l_X = \varepsilon_X \cdot L.$$

Деформація матеріалу стержня BC у напрямку осі X .

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} \left[\sigma_X - \mu (\sigma_Y + \sigma_Z) \right] = -\frac{2\mu \cdot p}{E} = \frac{2\mu \cdot \alpha \cdot E \cdot \Delta t^\circ}{E \cdot (1 - \mu)}.$$

Загальне видовження стержня BC становить

$$\Delta L = \Delta l_t + \Delta l_X = \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot L + \frac{2\mu \cdot \alpha \cdot \Delta t^\circ}{1 - \mu} \cdot L = \alpha \cdot \Delta t^\circ \cdot L \cdot \frac{1 + \mu}{1 - \mu}.$$

Приклад 2.5. Нижня частина бруса (рис. 2.11а) піддається обтисканню по двох напрямках: $q_X = 50$ МПа, $q_Y = 70$ МПа. Визначити напруження у поперечних перетинах кожної частини бруса, якщо $A = 2 \cdot 10^{-2}$ м²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,25$.

Розв'язування

Від дії обтискаючого навантаження q_X і q_Y в опорах D і C бруса виникають сили реакції R_D і R_C (рис. 2.11б). Складаємо рівняння статички

$$\sum Z = -R_C + R_D = 0, \quad R_C = R_D.$$

В даному випадку система (стержень) $2 - 1 = 1$ раз статично невизначена.

Використовуємо метод суперпозиції, тобто розглядаємо незалежно дію силових факторів на брус.

Умовно звільняємо брус від опори D (рис. 2.11в). У нижній частині від дії q_X і q_Y виникає напружений стан (рис. 2.11г), для якого

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E} \left[\sigma_Z - \mu (\sigma_X + \sigma_Y) \right],$$

де σ_X , σ_Y , σ_Z – напруження на гранях елемента,

$$\sigma_X = -q_X = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_Y = -q_Y = -70 \text{ МПа};$$

$$\sigma_Z = 0.$$

Отже, деформація у напрямку осі Z

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E} \left[-\mu (\sigma_X + \sigma_Y) \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \left[-0,25 (-50 - 70) \right] = 15 \cdot 10^{-5}.$$

Абсолютне видовження нижньої частини бруса від дії навантажень q_X і q_Y

$$\Delta l_q = \varepsilon_Z \cdot l = 15 \cdot 10^{-5} \cdot l.$$

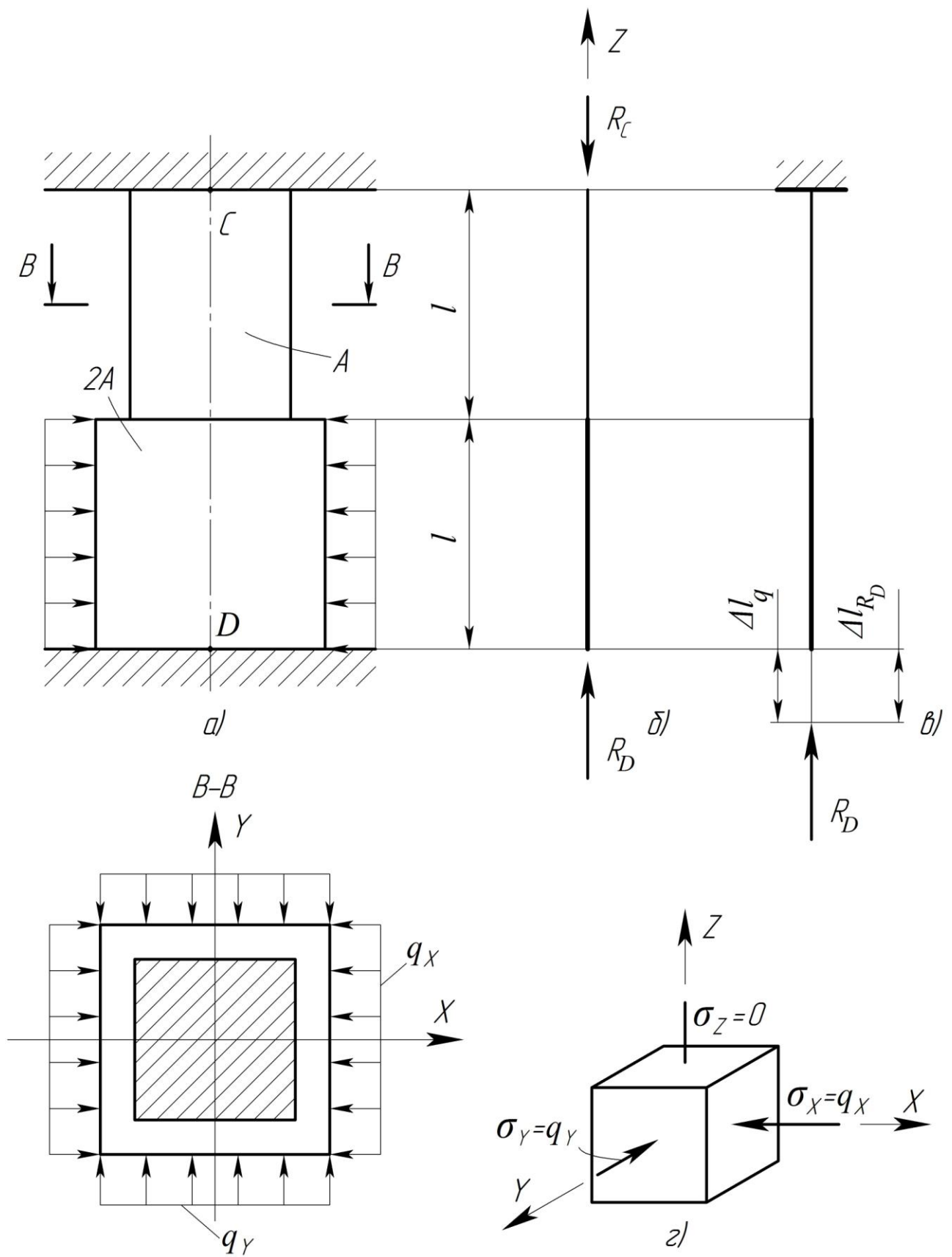


Рисунок 2.11

Опорна реакція R_D , яка діє на всю довжину бруса, повертає поперечний перетин опори в його попереднє положення, тобто

$$\Delta l_{R_D} = \frac{R_D \cdot l}{E \cdot 2A} + \frac{R_D \cdot l}{E \cdot A} = \frac{3R_D \cdot l}{E \cdot 2A}.$$

З рівняння сумісності деформації

$$\Delta l_{R_D} = \Delta l_q,$$

або

$$\frac{3R_D \cdot l}{E \cdot 2A} = 15 \cdot 10^{-5} \cdot l,$$

визначаємо

$$R_D = \frac{15 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{3} = 40 \cdot 10^{-2} \text{ МН.}$$

Визначимо напруження у частинах бруса:

- верхній

$$\sigma_B = -\frac{R_D}{A} = -\frac{40 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = -20 \text{ МПа;}$$

- нижній

$$\sigma_H = -\frac{R_D}{A} = -\frac{40 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = -10 \text{ МПа.}$$

Приклад 2.6. У жорсткій обоймі, яка не деформується, силою $F = 100$ кН пресується пластмасовий виріб з коефіцієнтом Пуассона $\mu = 0,4$. Дві половини обойми стягнуті шістьма болтами (рис. 2.12а). Визначити напруження від розтягу у болтах діаметром $d = 20$ мм; $a = 300$ мм.

Розв'язування

Розглянемо елементарний кубик вирізаний із пластмасового виробу всередині обойми (рис. 2.12б). На поверхні кубика діють напруження:

- від дії сили пресування

$$\sigma_Z = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{a^2}, \quad (2.6)$$

де A – площа поперечного перетину пластмасового виробу, $A = a^2$;
- від протидії обойми на пластиковий виріб

$$\sigma_X = \sigma_Y = -p, \quad (2.7)$$

де p – сила тиску обойми на виріб.

Відносні деформації в напрямках дії напружень σ_X і σ_Y ,

$$\varepsilon_X = \varepsilon_Y = 0,$$

або за законом Гука

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E} \left[\sigma_X - \mu (\sigma_Y + \sigma_Z) \right] = 0. \quad (2.8)$$

Після підстановок (1.6) і (1.7) в (1.8), отримаємо

$$\frac{1}{E} \left[-p - \mu \left(-p - \frac{F}{a^2} \right) \right] = 0,$$

звідки

$$-p + \mu \cdot p + \mu \cdot \frac{F}{a^2} = 0,$$

або

$$p = -\frac{\mu \cdot F}{a^2(\mu - 1)} = -\frac{0,4 \cdot 100}{0,3^2(0,4 - 1)} = 444 \text{ кПа.}$$

Сила тиску на одну з частин обойми в напрямку осі Y

$$F_Y = p \cdot L \cdot a = p \cdot 2a^2 = 444 \cdot 2 \cdot 0,3^2 = 79,9 \text{ кН.}$$

Сила розтягу на один болт

$$F_B = \frac{F_Y}{6} = \frac{79,9}{6} = 13,3 \text{ кН.}$$

Розтягуючі напруження у болтах

$$\sigma_B = \frac{F_B}{A_B} = \frac{13,3 \cdot 10^{-3}}{314 \cdot 10^{-6}} = 42,4 \text{ МПа,}$$

де A_B – площа поперечного перетину одного болта,

$$A_B = \frac{\pi \cdot d_B^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2.$$

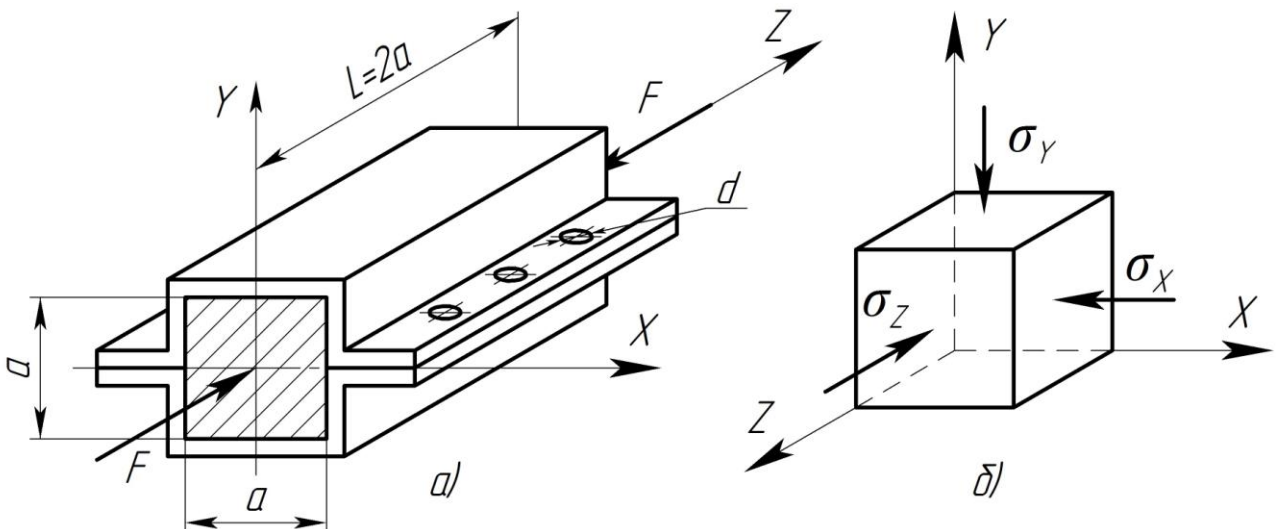
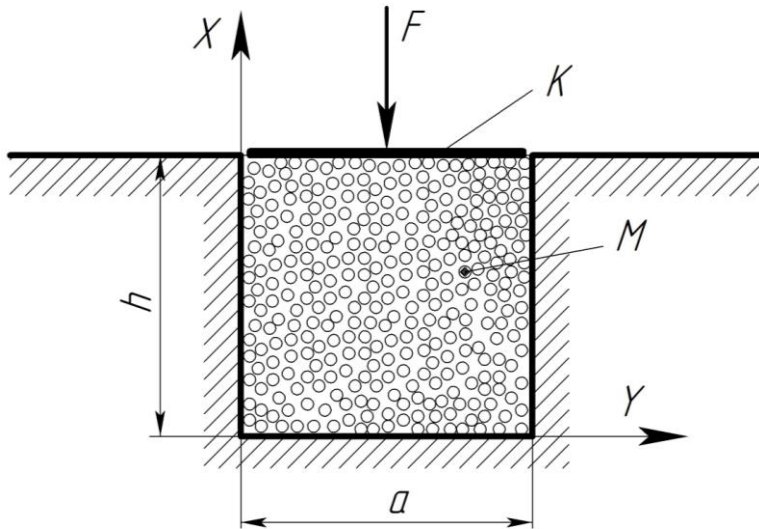


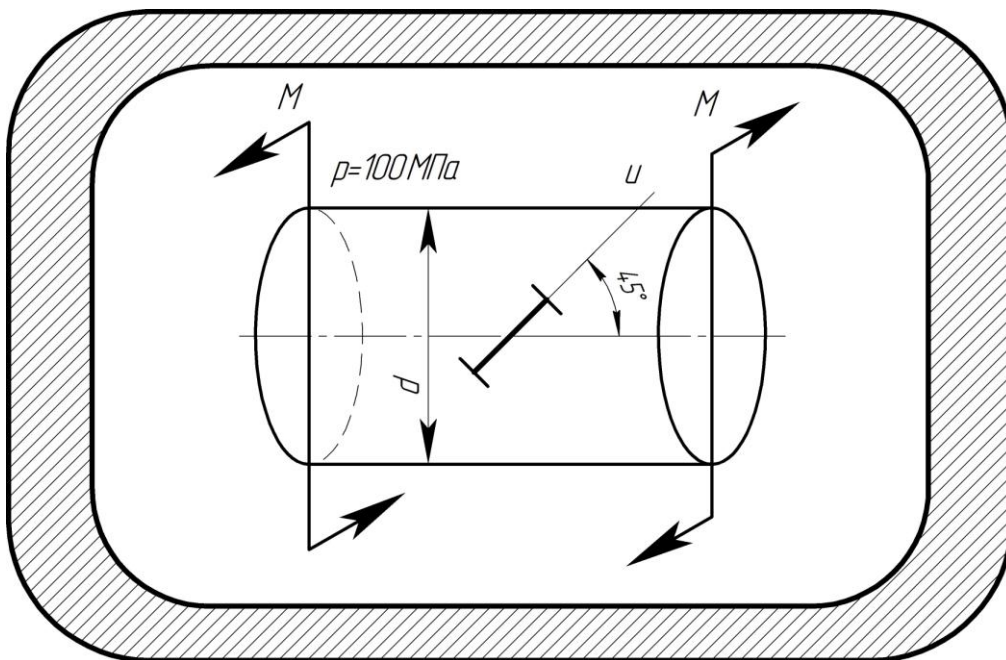
Рисунок 2.12

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

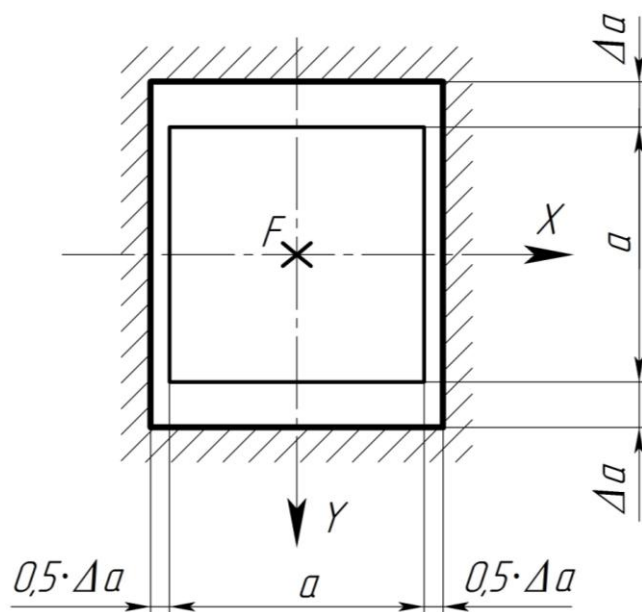
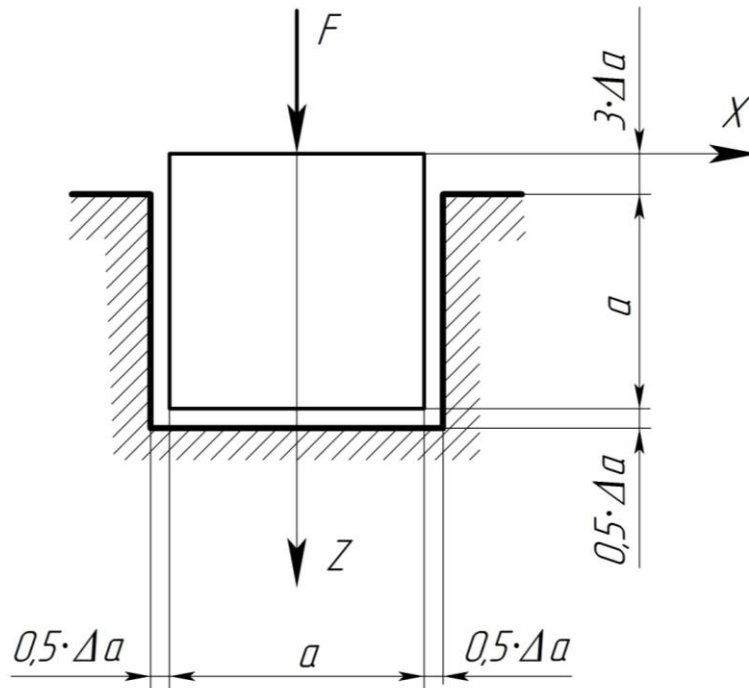
Задача 2.1. В абсолютно жорсткому матеріалі зроблено гніздо квадратного поперечного перетину $a \times a$, з висотою h . В ньому із силою F стиснутий матеріал M , що має пружні константи E , μ . Нехтуючи тертям зі стінками, визначити на скільки підніметься кришка K , якщо матеріал M нагріти на Δt° . Коефіцієнт лінійного розширення матеріалу дорівнює α .



Задача 2.2. Стальний вал діаметром $d = 20$ мм знаходиться у камері з високим тиском p і скручується моментами M . На поверхні вала під кутом 45° до твірної наклеєний тензодатчик. Визначити величину моменту M . Деформація, яка заміряна датчиком, дорівнює $\varepsilon_u = -32 \cdot 10^{-5}$. Пружні характеристики матеріалу $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.



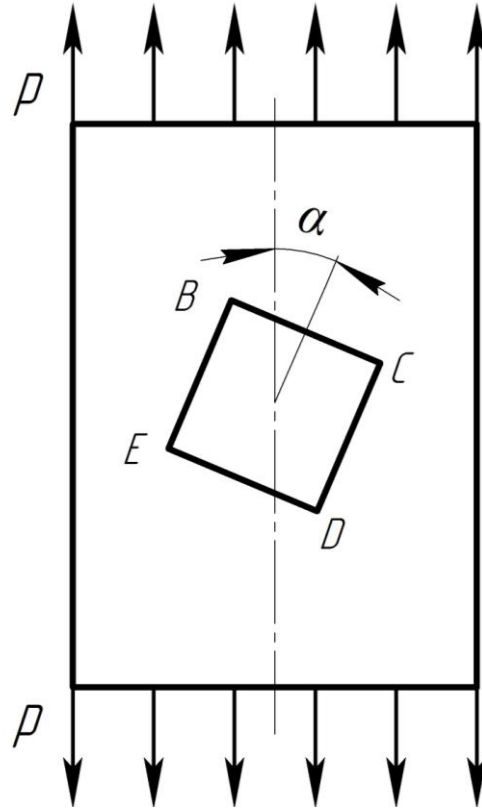
Задача 2.3. Кубик зі сторонами a вставлено в отвір абсолютно жорсткої плити. Розміри отвору більші в одному напрямку на Δa , а в іншому на $2\Delta a$ ($\Delta a \ll a$). Крім цього кубик виступає над поверхнею на $3\Delta a$. Від дії сили F зазори між гранями кубика та плити зникають. У момент зникнення останнього зазору верхня грань кубика зрівнюється із плитою. Визначити значення коефіцієнта Пуассона μ матеріалу кубика, якщо усі деформації пружні та модуль пружності E відомий.



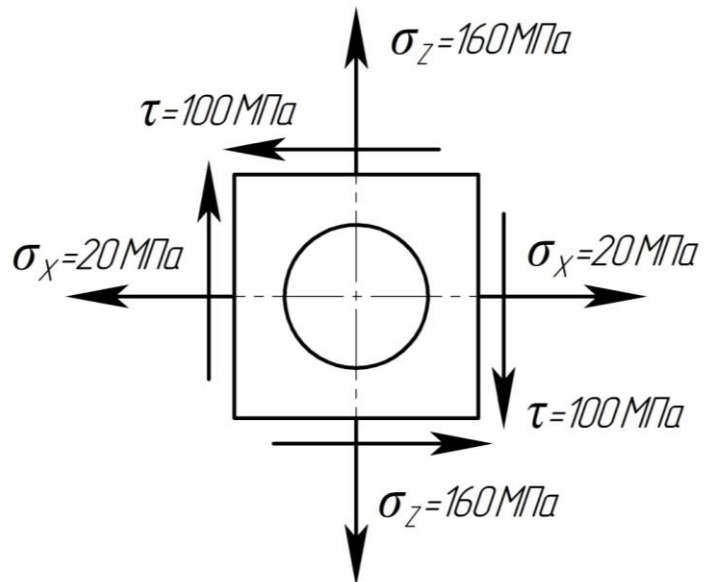
Задача 2.4. На торці сталюї пластини дїє рївномірно розподїлений тиск $p = 140$ МПа.

Необхїдно визначити:

- залежнїсть кутових деформацїй квадрата $BCDE$ вїд кута α ;
- залежнїсть вїдносних лїнійних деформацїй дїагоналей BD і CE вїд кута α , і значення α при якому цї деформацїї досягають екстремальних значень.



Задача 2.5. На гранї сталюго кубика, що спївпадає з площиною креслення, нанесене коло. Визначити положення і вїдносне видовження малої і великої осей еліпса, в який перетвориться коло в процесї навантаження, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.



3. ПРЯМИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН

3.1. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів

Згин – це стан опору бруса, в якому відбувається викривлення або зміна кривизни його осі. Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

На згин працюють багато конструктивних елементів: осі залізничних вагонів, вали, панелі перекриттів, прольотні споруди мостів, стріли кранів, плоскі ресори автомобілів і т. д.

Плоский, або прямий, згин – це такий випадок згину, при якому викривлення осі балки відбувається у напрямі дії зовнішніх сил та навантажень, тобто в одній площині із зовнішніми силами.

Прямий поперечний згин – це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникають **поперечна сила** Q та **згинальний момент** $M_{зг}$ (рис. 3.1а). Якщо поперечна сила не виникає, то це – **чистий згин** (рис. 3.1б).

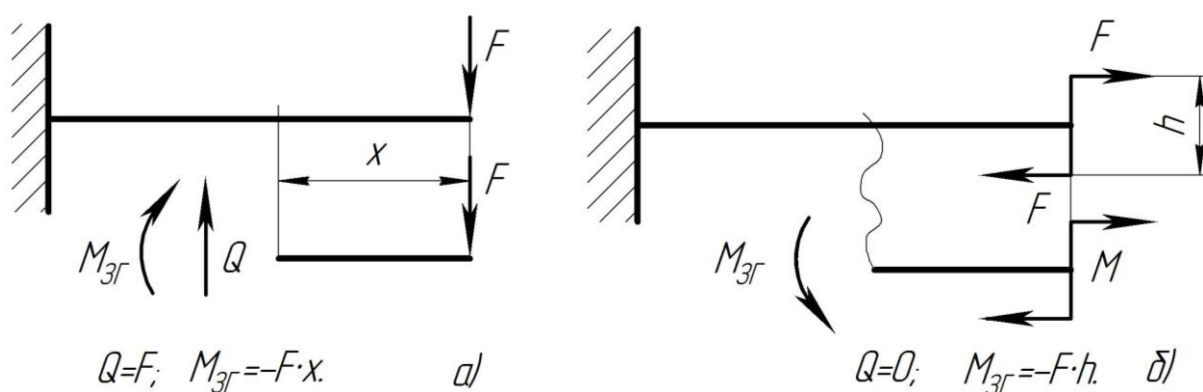


Рисунок 3.1

Внутрішні силові фактори. Поперечна сила у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі проекцій усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину на вісь, перпендикулярну до осі балки, тобто

$$Q = \sum F_{iy} .$$

Згинальний момент у будь-якому поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють справа чи зліва від перетину відносно центра ваги перетину.

$$M_{зг} = \sum M(F_i).$$

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Отже, **сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перетину, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перетину.**

Правила знаків статички непридатні для встановлення знаків поперечної сили Q і згинального моменту $M_{зг}$.

Правило знаків можна зобразити графічно – поперечної сили (рис. 3.2) та згинального моменту (рис. 3.3).

Якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перетину, дає рівнодійну, направлену вгору, то **поперечну силу** в перетині вважають **додатною**. І навпаки: для частини балки, розміщеної справа від перетину, знаки поперечної сили будуть протилежними (див. рис. 3.2). Або поперечні сили додатні, якщо вони намагаються повернути елемент балки за годинниковою стрілкою.

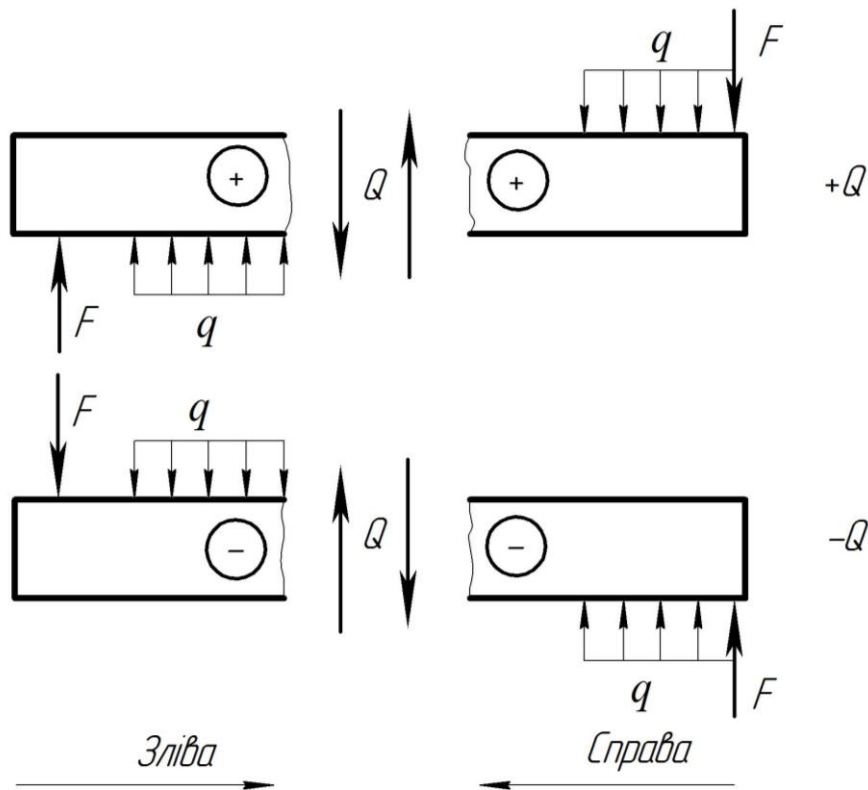


Рисунок 3.2

Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз (розтягуються нижні волокна), то **згинальний момент** у перетині вважають **додатним**, і навпаки (див. рис. 3.3).

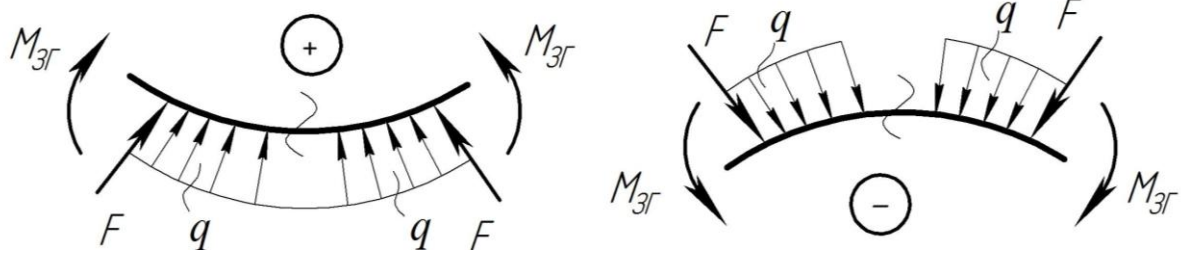


Рисунок 3.3

Користуючись цими правилами, треба уявити мислено **перетин балки жорстко закріпленим**, а в'язі – відкинутими і заміненіми реакціями.

Для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статички; для визначення знаків згинального моменту і перерізуючої сили – правилами опору матеріалів.

Спрощене уявлення реальних опорних елементів балок.

Схематизація, яку використовують для побудови розрахункових схем балок у стані плоского згину, дає змогу виділити три основні типи опор: шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома та затиснення (жорстке закріплення). Кожну з них моделюють у вигляді стержнів (рис. 3.4).

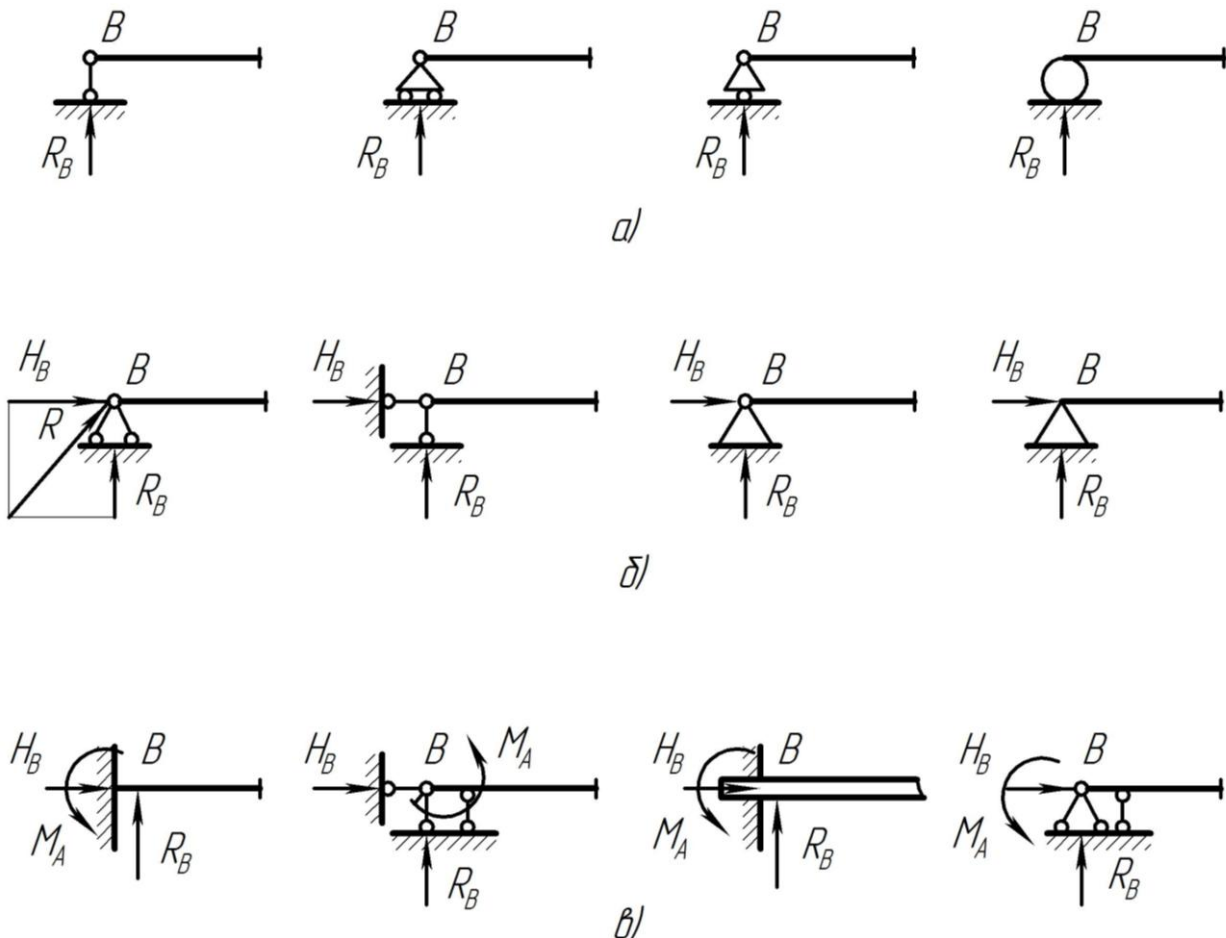


Рисунок 3.4 – Схеми опор балок:

а) шарнірно-рухома; б) шарнірно-нерухома; в) жорстке закріплення

Диференціальні залежності при прямому поперечному згині. Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить **теорема Журавського: функція поперечних сил дорівнює першій похідній від функції згинального моменту за абсцисою перетину балки.** Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{d^2 M_{зГ}(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x). \quad (3.1)$$

Друга похідна від функції згинального моменту або перша похідна від функції поперечної сили за абсцисою перетину балки дорівнює функції інтенсивності розподіленого навантаження.

Розподіл зовнішнього навантаження на лінійні елементи конструктивних систем переважно має змінну форму (рис. 3.5).

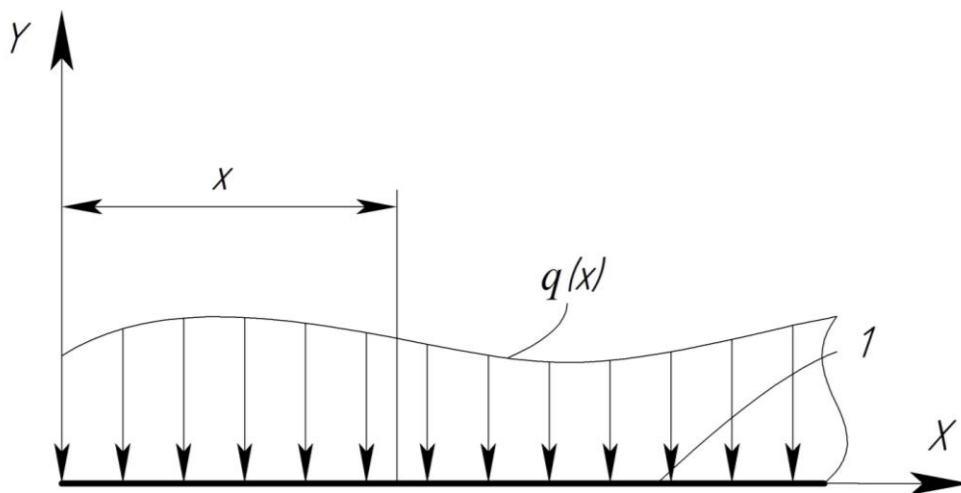


Рисунок 3.5 – Схематизація довільного нерівномірного розподіленого навантаження на лінійний елемент конструкції

$q(x)$ – функція нерівномірно розподіленого навантаження;

1 – лінійний елемент конструкції, балки.

Для оцінки міцності елемента конструкції (надалі балки), необхідно побудувати епюри внутрішніх силових факторів, а саме, перерізуючих сил Q та згинальних моментів $M_{зГ}$.

При відомій функції дії зовнішнього розподіленого навантаження на балку $q(x)$ (рис. 3.5), використавши відомі диференціальні залежності між внутрішніми силовими факторами та зовнішнім розподіленим навантаженням визначимо: функції перерізуючих сил та згинальних моментів

$$Q(x) = \int_x q(x)dx; \quad M_{зГ}(x) = \int_x Q(x)dx. \quad (3.2)$$

Контроль правильності побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів за розрахунковою схемою балки

Для епюри поперечних сил:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюру поперечних сил зображають прямою, нахиленою до осі балки.

2. На ділянці балки, вільній від q , епюру поперечних сил зображають прямою, паралельною осі балки.

3. Під перетином балки, де прикладена зосереджена сила, на епюрі поперечних сил є «стрибок», що дорівнює величині прикладеної сили.

4. У перетині, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), епюра поперечних сил не змінює свого значення.

Для епюри згинальних моментів:

1. На ділянці балки, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням q , епюра згинальних моментів зображають квадратичною параболою.

2. На ділянках балки, вільних від q , епюру згинальних моментів зображають прямою лінією, нахиленою до осі балки.

3. Згинальний момент досягає екстремальних значень у перетинах, де поперечні сили дорівнюють нулю.

4. Під перетином балки, де прикладена зосереджена пара сил (зосереджений момент), на епюрі згинальних моментів є «стрибок», що дорівнює величині зосередженого моменту.

5. На ділянках балки, де поперечна сила дорівнює нулю, балка зазнає чистого згину, епюра згинальних моментів – пряма, паралельна осі балки.

Перевірка епюри згинальних моментів із використанням диференціальної залежності при згині (за епюрою Q).

Виконують перевірку за епюрою поперечних сил, використовуючи залежність

$$\frac{dM_{зГ}(x)}{dx} = Q(x),$$

враховуючи, що епюра Q – це графічне зображення похідної від згинального моменту $M_{зГ}$:

1. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ зростає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – додатна.

2. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ спадає, якщо похідна функції, тобто $Q(x)$ – від'ємна.

3. Функція згинального моменту $M_{зГ}(x)$ досягає екстремального значення у точці, де її похідна $Q(x)$ дорівнює нулю. Функцію у цьому перетині обов'язково необхідно досліджувати на екстремум.

ПРИКЛАДИ

Приклад 3.1. Для заданої балки (рис. 3.6а) побудувати епюри перерізуючих сил та згинальних моментів.

Розв'язування

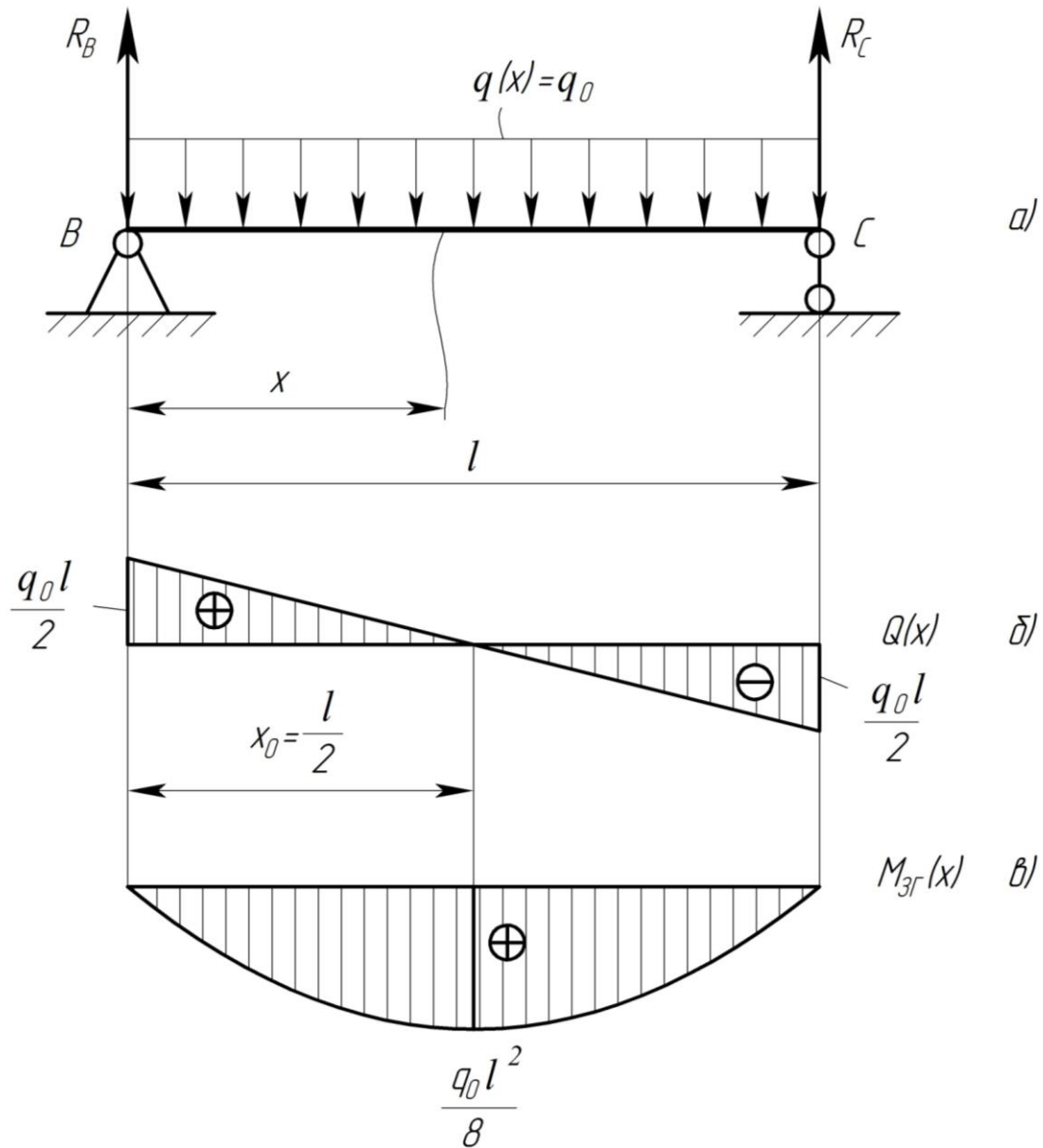


Рисунок 3.6

Визначимо реакції балки, які виникають в опорах B і C . Внаслідок симетричного навантаження

$$R_B = R_C = \frac{q_0 \cdot l}{2}.$$

Використовуючи (3.2), записуємо функції перерізуючих сил $Q(x)$ та згинальних моментів $M_{3\Gamma}(x)$:

$$Q(x) = R_B - \int_0^x q_0 dx = R_B - q_0 \cdot x;$$

$$M_{3\Gamma}(x) = \int_0^x (R_B - q_0 \cdot x) dx = R_B \cdot x - \frac{q_0 \cdot x^2}{2}.$$

Для побудови епюри перерізуючих сил, визначимо їх значення на границях балки:

$$Q(x=0) = R_B = \frac{q_0 \cdot l}{2};$$

$$Q(x=l) = R_B - q_0 \cdot l = \frac{q_0 \cdot l}{2} - q_0 \cdot l = -\frac{q_0 \cdot l}{2}.$$

За отриманими значеннями будемо епюру перерізуючих сил $Q(x)$ (рис. 3.6б). Епюра перерізуючих сил – це графік похідної від функції згинальних моментів. В даному випадку графік функції $Q(x)$ має перетин нульової лінії, а це означає, що в даній точці згинальний момент досягає екстремального значення. Екстремум необхідно дослідити. Визначаємо координату точки при якій $Q(x_0) = 0$

$$R_B - q_0 \cdot x_0 = 0, \quad \text{або} \quad x_0 = \frac{R_B}{q_0} = \frac{q_0 \cdot l}{2q_0} = \frac{l}{2}.$$

Визначаємо значення величин згинальних моментів у точках з координатами:

$$M_{3\Gamma}(x_B = 0) = R_B \cdot 0 - \frac{q_0 \cdot 0}{2} = 0;$$

$$M_{3\Gamma}(x_C = l) = R_B \cdot l - \frac{q_0 \cdot l}{2} = \frac{q_0 \cdot l^2}{2} - \frac{q_0 \cdot l^2}{2} = 0;$$

$$M_{3\Gamma \max} \left(x_0 = \frac{l}{2} \right) = R_B \cdot \frac{l}{2} - \frac{q_0 \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} = \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q_0 \cdot l^2}{8} = \frac{q_0 \cdot l^2}{8}.$$

Будемо епюру згинальних моментів $M_{3\Gamma}(x)$ (рис. 3.6в).

Приклад 3.2. На балку (рис. 3.7а) діє розподілене навантаження $q(x) = q_0 \left[1 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]$; $q_0 = 7 \text{ кН/м}$; $l = 1 \text{ м}$. Необхідно побудувати епюри поперечних сил Q та згинальних моментів $M_{зг}$.

Розв'язування

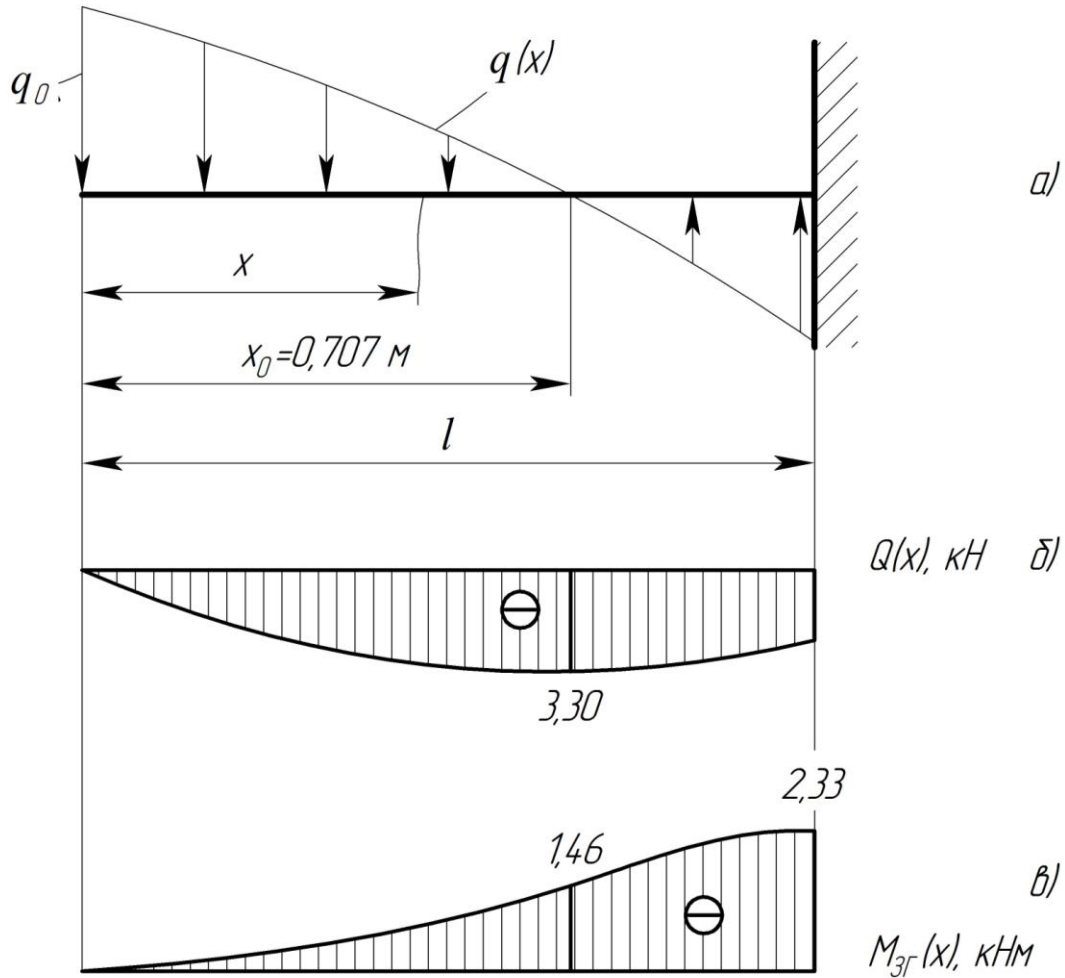


Рисунок 3.7

Запишемо диференціальну залежність функції перерізуючих сил $Q(x)$ від розподіленого навантаження $q(x)$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) = q_0 \left[1 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right].$$

Інтегруючи, отримаємо функцію поперечних сил

$$Q(x) = -\int_x q_0 \left[1 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] dx = - \left[q_0 \cdot x - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{l^2} \cdot q_0 \right].$$

Визначимо значення поперечних сил на границях балки і побудуємо епюру поперечних сил Q (рис. 3.7б):

$$Q(x=0) = 0;$$

$$Q(x=l) = - \left(q_0 \cdot l - \frac{2}{3} \cdot q_0 \cdot l \right) = - \frac{1}{3} \cdot q_0 \cdot l = - \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 1 = -2,33 \text{ кН.}$$

На епюрі Q визначимо екстремум, координату якого отримаємо із рівняння

$$q_0 \left[1 - 2 \cdot \left(\frac{x_0}{l} \right)^2 \right] = 0, \quad 2x_0^2 = l^2,$$

звідки

$$x_0 = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ м.}$$

Відповідно

$$Q_{\max} = Q(x_0 = 0,707 \text{ м}) = - \left[7 \cdot 0,707 - \frac{2}{3} \cdot \frac{0,707^3}{1^2} \cdot 7 \right] = -3,30 \text{ кН.}$$

Функцію згинального моменту визначаємо з диференціальної залежності

$$\frac{dM_{3\Gamma}(x)}{dx} = Q(x) = - \left(q_0 \cdot x - \frac{2}{3} q_0 \cdot \frac{x^3}{l^2} \right);$$

$$M_{3\Gamma}(x) = - \int_x \left(q_0 \cdot x - \frac{2}{3} q_0 \cdot \frac{x^3}{l^2} \right) dx = - \left(\frac{q_0 \cdot x^2}{2} - \frac{2}{12} \cdot q_0 \cdot \frac{x^4}{l^2} \right).$$

Визначимо значення згинальних моментів у перетинах балки з координатами 0 ; l :

$$M_{3\Gamma}(x=0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{3\Gamma}(x=l=1 \text{ м}) = - \left(\frac{7 \cdot 1^2}{2} - \frac{2}{12} \cdot 7 \cdot \frac{1^4}{1^2} \right) = -2,33 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На даній ділянці балки відсутній екстремум згинального моменту. Будуємо епюру згинальних моментів $M_{3\Gamma}$ (рис. 3.7в).

Приклад 3.3. На ділянці балки ВС довжиною l (рис. 3.8а) діє розподілене навантаження, що змінюється за законом $q(x) = q_0 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$, де $q_0 = 20$ кН·м; $l = 2$ м; $a = 1$ м. Визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів.

Розв'язування

Для визначення опорних реакцій балки визначимо рівнодійну силу від дії розподіленого навантаження

$$Q_0 = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l q_0 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) dx = q_0 \left[\frac{x^2}{2l} - \frac{x^3}{3l^2} \right] \Bigg|_0^l =$$

$$= q_0 \left[\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right] = \frac{q_0 \cdot l}{6} = \frac{20 \cdot 2}{6} = 6,67 \text{ кН.}$$

Викреслюємо еквівалентну схему (рис. 3.8б).

Визначимо опорні реакції балки з рівнянь статки:

$$\sum M_K = 0; \quad R_B (l + a) - Q_0 \left(a + \frac{l}{2} \right) = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_K (l + a) - Q_0 \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$R_B = \frac{Q_0 \left(a + \frac{l}{2} \right)}{l + a} = \frac{6,67 \left(1 + \frac{2}{2} \right)}{2 + 1} = 4,45 \text{ кН;}$$

$$R_K = \frac{Q_0 \cdot \frac{l}{2}}{l + a} = \frac{6,67 \cdot \frac{2}{2}}{2 + 1} = 2,22 \text{ кН.}$$

Перевіряємо правильність визначення опорних реакцій

$$\sum Y = R_B - Q_0 + R_K = 4,45 - 6,67 + 2,22 = 6,67 - 6,67 = 0.$$

Опорні реакції визначено правильно.

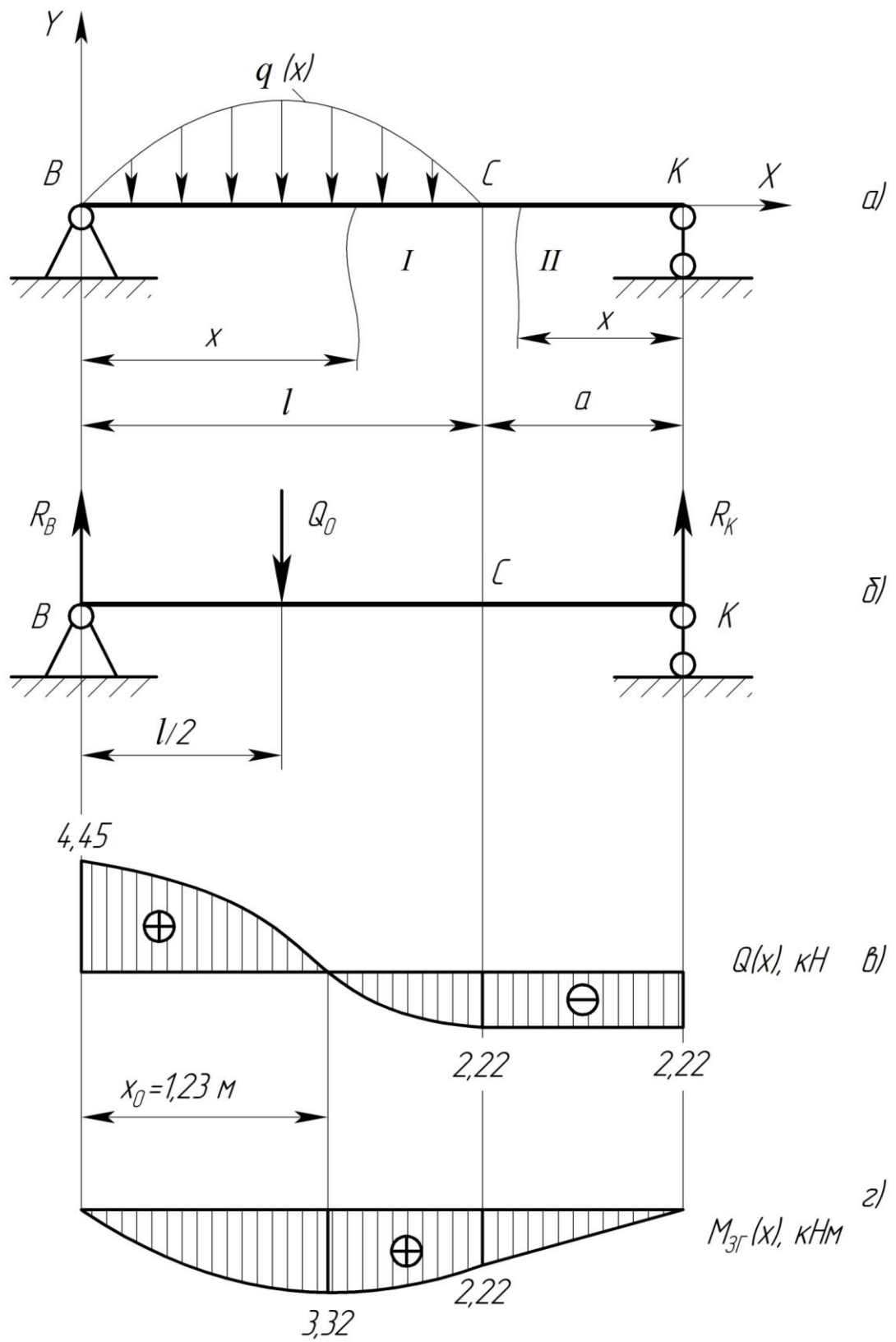


Рисунок 3.8

Запишемо функцію поперечних сил на першій ділянці балки $0 \leq x \leq l = 2\text{ м}$ (рис. 3.8а).

$$Q(x) = R_B - \int_0^l q(x) dx = R_B - q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - \frac{x^3}{3l^2} \right) = 4,45 - 20 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right).$$

Визначимо значення поперечних сил на границях ділянки:

$$Q(x = 0) = R_B = 4,45 \text{ кН};$$

$$Q(x = 2\text{ м}) = R_B - 20 \cdot \left(\frac{2^2}{4} - \frac{2^3}{12} \right) = 4,45 - 20 \cdot \left(\frac{4}{12} \right) = -2,22 \text{ кН}.$$

Визначимо координату точки балки, в якій діє екстремальне значення згинального моменту

$$Q(x) = R_B - q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - \frac{x^3}{3l^2} \right) = 0;$$

$$4,45 - 20 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right) = 0.$$

Отримане кубічне рівняння розв'язуємо наближеним графічним методом.

Епюру поперечних сил будемо дотримуючись масштабів (рис. 3.8в), звідки визначаємо $x_0 \approx 1,23 \text{ м}$.

Виконаємо перевірку

$$Q(x_0 = 1,23 \text{ м}) = 4,45 - 20 \cdot \left(\frac{1,23^2}{4} - \frac{1,23^3}{12^2} \right) = 4,45 - 4,46 \approx 0.$$

Функція згинальних моментів на першій ділянці

$$\begin{aligned} M_{3Г}(x) &= R_B \cdot x - \int_0^x q_0 \cdot \left(\frac{x^2}{2l} - \frac{x^3}{3l^2} \right) dx = \\ &= R_B \cdot x - q_0 \cdot \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^4}{12l^2} \right) = 4,45 \cdot x - 20 \cdot \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{48} \right). \end{aligned}$$

Визначимо значення згинальних моментів у точках з координатами 0 ; 1.23 ; 2 м :

$$M_{3\Gamma}(x = 0) = 0 ;$$

$$M_{3\Gamma}(x_0 = 1,23 \text{ м}) = 4,45 \cdot 1,23 - 20 \cdot \left(\frac{1,23^3}{12} - \frac{1,23^4}{48} \right) = 3,32 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{3\Gamma}(x = 2 \text{ м}) = 4,45 \cdot 2 - 20 \cdot \left(\frac{2^3}{12} - \frac{2^4}{48} \right) = 2,22 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

На другій ділянці $0 \leq x \leq a = 1 \text{ м}$ значення перерізуючих сил та згинальних моментів:

$$Q(x) = -R_K = -2,22 \text{ кН};$$

$$Q(x = 0) = Q(x = 1\text{м}) = -R_K = -2,22 \text{ кН};$$

$$M_{3\Gamma}(x) = R_K \cdot x = 2,22 \cdot x ;$$

$$M_{3\Gamma}(x = 0) = R_K \cdot 0 = 2,22 \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

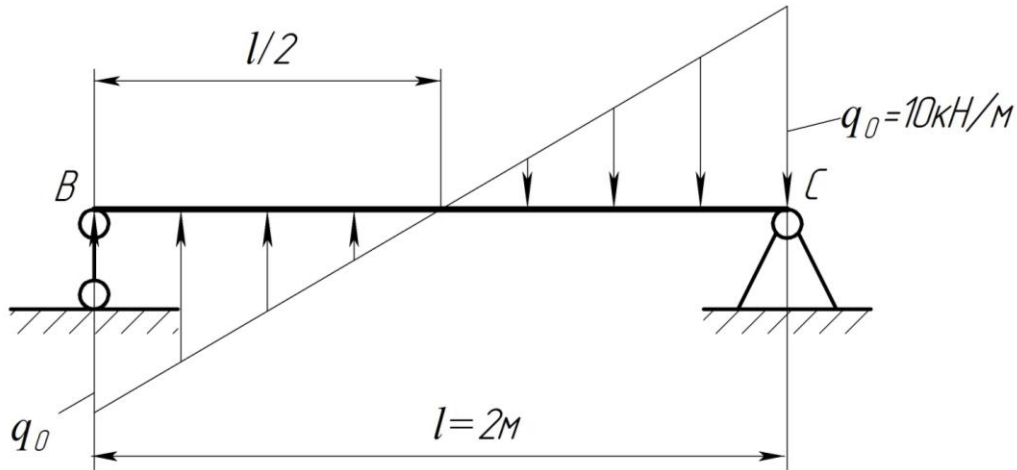
$$M_{3\Gamma}(x = 1\text{м}) = R_K \cdot 1 = 2,22 \cdot 1 = 2,22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюри поперечних сил Q та згинальних моментів $M_{3\Gamma}$ (рис. 3.8в, з).

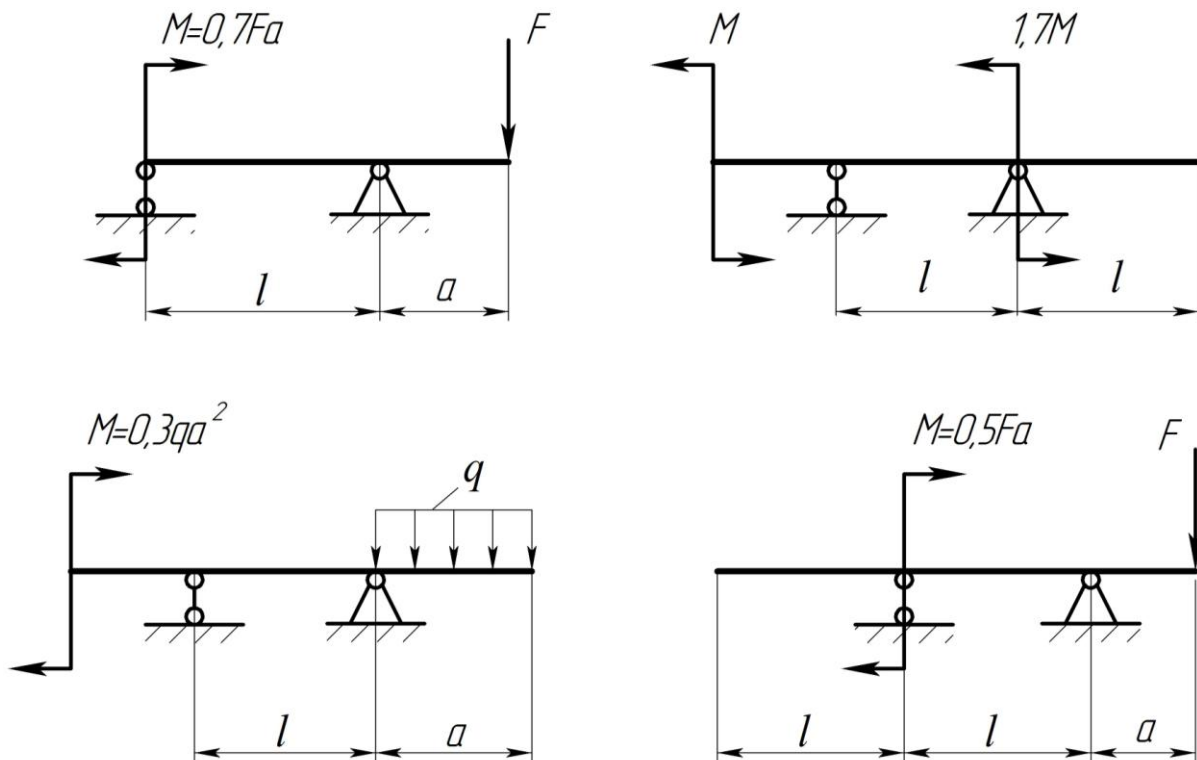
Максимальний згинальний момент $M_{3\Gamma \text{ max}} = 3,32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 3.1. Для заданої схеми побудувати епюри перерізуючих сил та згинальних моментів.



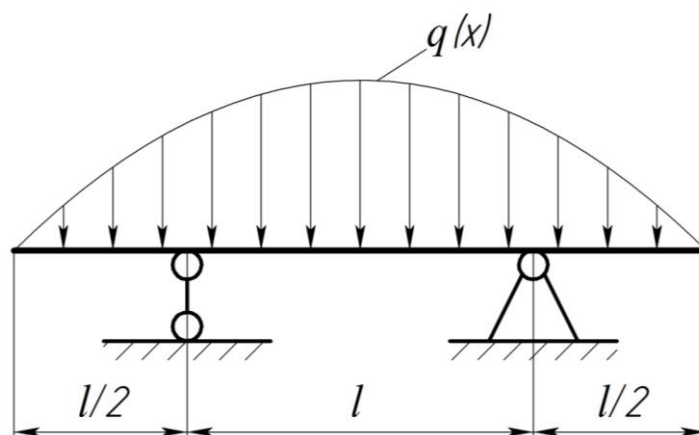
Задача 3.2. Використовуючи принцип суперпозиції, не визначаючи опорні реакції, для кожної з показаних балок побудувати епюри згинальних моментів.



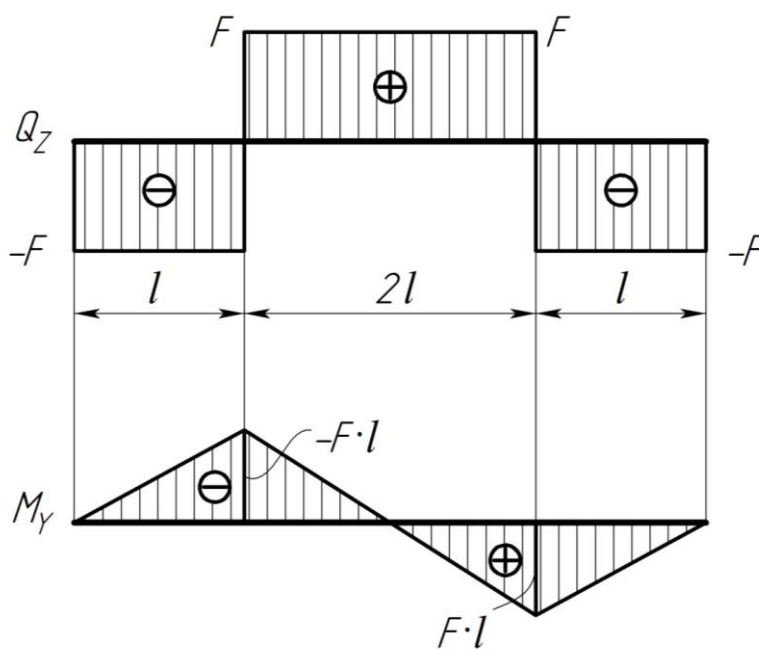
Задача 3.3. На балку діє розподілене навантаження

$$q(x) = q \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l} \right).$$

Побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів



Задача 3.4. Яким розрахунковим схемам балок відповідають епюри поперечних сил та згинальних моментів, що зображені на рисунку.



3.2. Напруження при згині. Розрахунок на міцність

У більшості випадків руйнівним внутрішнім силовим фактором при прямому поперечному згині є згинальний момент. Від дії згинального моменту у поперечному перетині балки виникають нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma = \frac{M_{зГ}}{I_X} \cdot y,$$

де y – відстань (координата) від осі X (нейтральної осі) до точок поперечного перетину, в яких визначають нормальне напруження (рис. 3.9а).

Аналізуючи цю формулу, отримують епюру розподілу нормальних напружень за висотою перетину (рис. 3.9б).

Максимальні нормальні напруження та умова міцності при згині за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{I_X} \cdot y_{\max} = \frac{M_{зГ.\max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де $M_{зГ.\max}$ – максимальний згинальний момент, визначають з епюри $M_{зГ}$;

W_X – осьовий момент опору поперечного перетину балки.

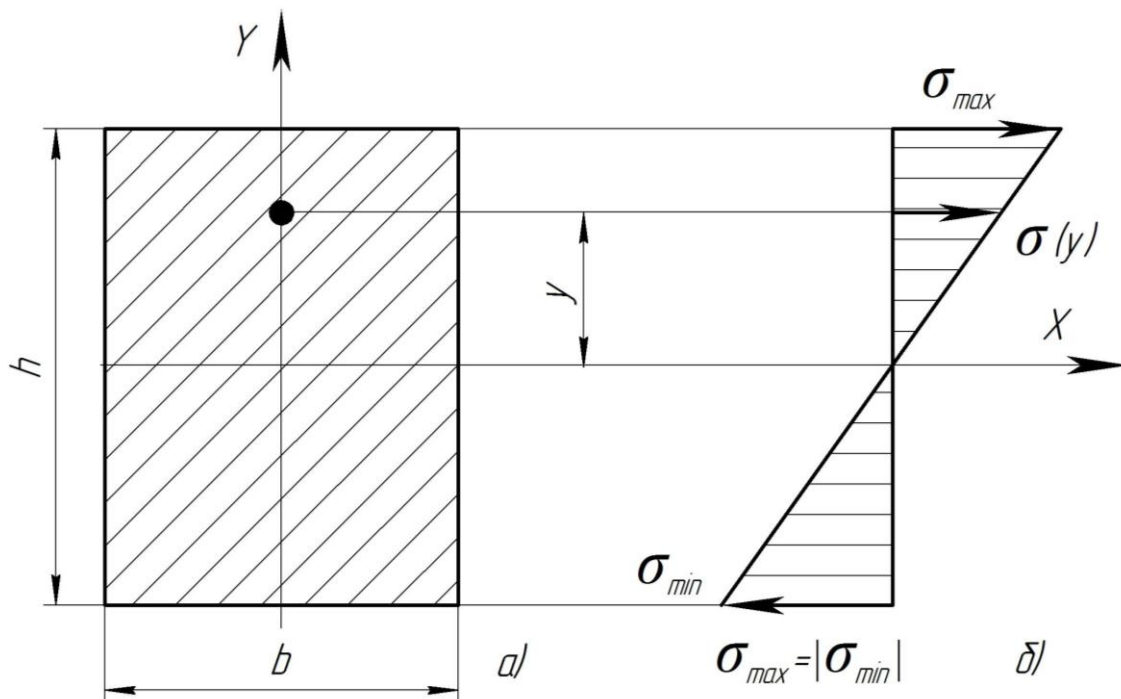


Рисунок 3.9

У поперечних перетинах балки при деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження в результаті дії поперечної сили Q , які спричиняють деформацію зсуву. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруження виникають і в поздовжніх перетинах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напружень у поздовжніх перетинах при поперечному згині підтверджується появою в дерев'яних балках поздовжніх тріщин.

Значення дотичних напружень визначають за формулою Д.І. Журавського

$$\tau = \frac{Q_Y \cdot S_X(y)}{b(y) \cdot I_X},$$

- де τ – дотичне напруження в розглядуваній точці поперечного перетину;
 Q_Y – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перетині;
 $S_X(y)$ – абсолютне значення статичного моменту частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки;
 $b(y)$ – ширина перетину балки на рівні, де визначають дотичні напруження;
 I_X – осьовий момент інерції всього поперечного перетину відносно його центральної вісі X .

Абсолютне значення статичного моменту частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваної точки визначають за формулою

$$S_X(y) = A_{відс} \cdot y^*,$$

- тут $A_{відс}$ – площа відсіченої частини перетину;
 y^* – віддалення (координата) центра ваги C_B площі відсіченої частини відносно центральної вісі.

Для поперечного перетину значення Q_Y та I_X є сталі величини. Залежно від форми поперечного перетину бруса ширина $b(y)$ перетину може бути змінною величиною (при наявності форми перетину функція $b(y)$ – відома).

На відміну від Q_Y та I_X значення статичного моменту $S_X(y)$ відсіченої частини перетину має змінну величину, яка залежить від y^* .

Для балки прямокутного поперечного перетину зі сторонами b і h (рис. 3.10а)

- площа частини перетину, відсіченої на рівні розглядуваного шару ВОЛОКОН mn

$$A_{\text{відс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

- статичний момент цієї площі (тобто на рівні mn)

$$S_{\text{відс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Осьовий момент інерції прямокутного поперечного перетину

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

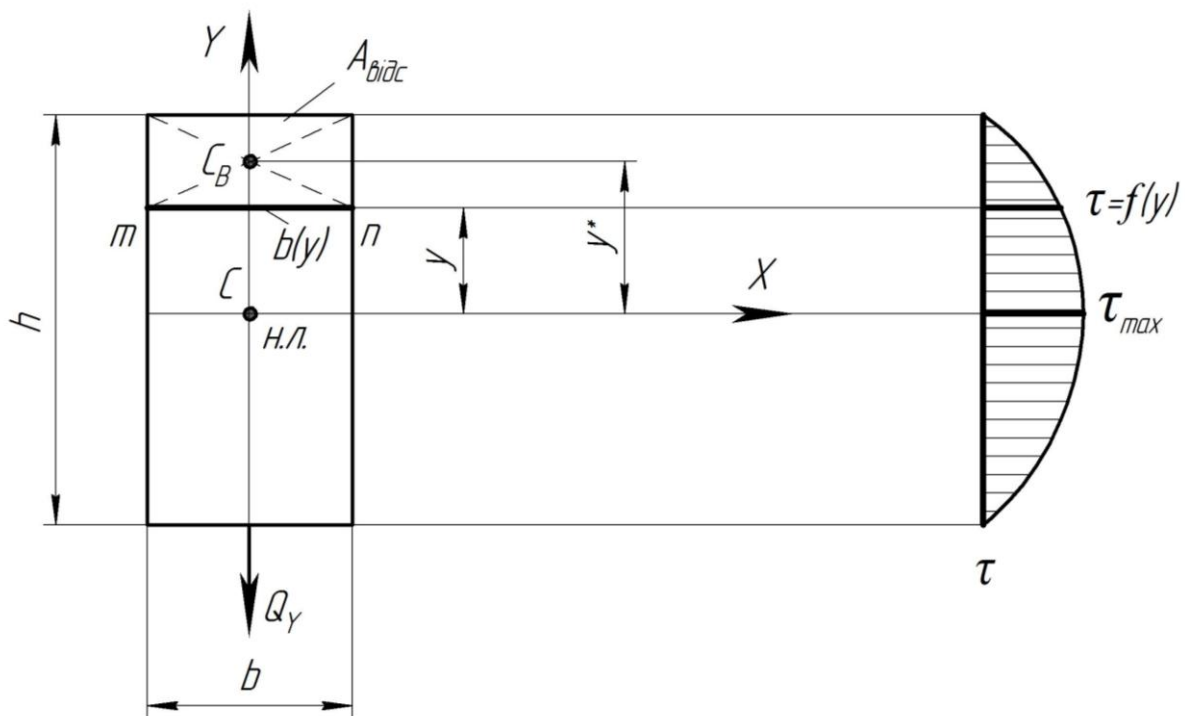


Рисунок 3.10

Визначимо закон розподілу дотичних напружень для балки прямокутного поперечного перетину. Виконаємо це для шару волокон на рівні mn (див. рис. 2.10а)

$$\tau(y) = \frac{Q \cdot S_{\text{відс}}}{b \cdot I_X} = \frac{Q \cdot (b/2) \cdot (h^2/4 - y^2)}{b \cdot b \cdot h^3/12} = \frac{6Q (h^2/4 - y^2)}{b \cdot h^3};$$

коли $y = \pm h/2$, то $\tau = 0$;

$$\text{коли } y = 0, \text{ то } \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2b \cdot h} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3}{2} \tau,$$

де τ – дотичні напруження зсуву.

Еюра дотичних напружень по висоті прямокутного перетину окреслюється **квадратичною параболою** (рис. 3.10б). Тобто у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруження дорівнюють нулю, а у волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення.

Отже, при згині **дотичні напруження** у балках **відповідають деформації зсуву**, у результаті чого плоскі поперечні перетини при прямому поперечному згині не залишаються плоскими, як при чистому згині, а викривляються.

Більшість балок при згині розраховують тільки за нормальними напруженнями.

За дотичними напруженнями перевіряють три види балок:

- 1) дерев'яні балки, бо дерево погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки, наприклад, двотаврові, бо максимальні дотичні напруження обернено пропорційні ширині нейтрального шару;
- 3) короткі балки, бо при відносно невеликих згинаючому моменті і нормальних напруженнях у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруження.

Умова міцності при згині за дотичними напруженнями

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{Y \max} \cdot S_X(y)_{\max}}{b(y) \cdot I_X} \leq [\tau],$$

де Q_{\max} – максимальна поперечна сила, визначають з еюри Q ;

$S_X(y)_{\max}$ – максимальний статичний момент площі поперечного перетину;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau] \approx 0,5 [\sigma]$.

ПРИКЛАДИ

Приклад 3.4. Яке видовження верхнього волокна бруса AB (рис. 3.11) від власної ваги. Величини q, l, E, b, h задані.

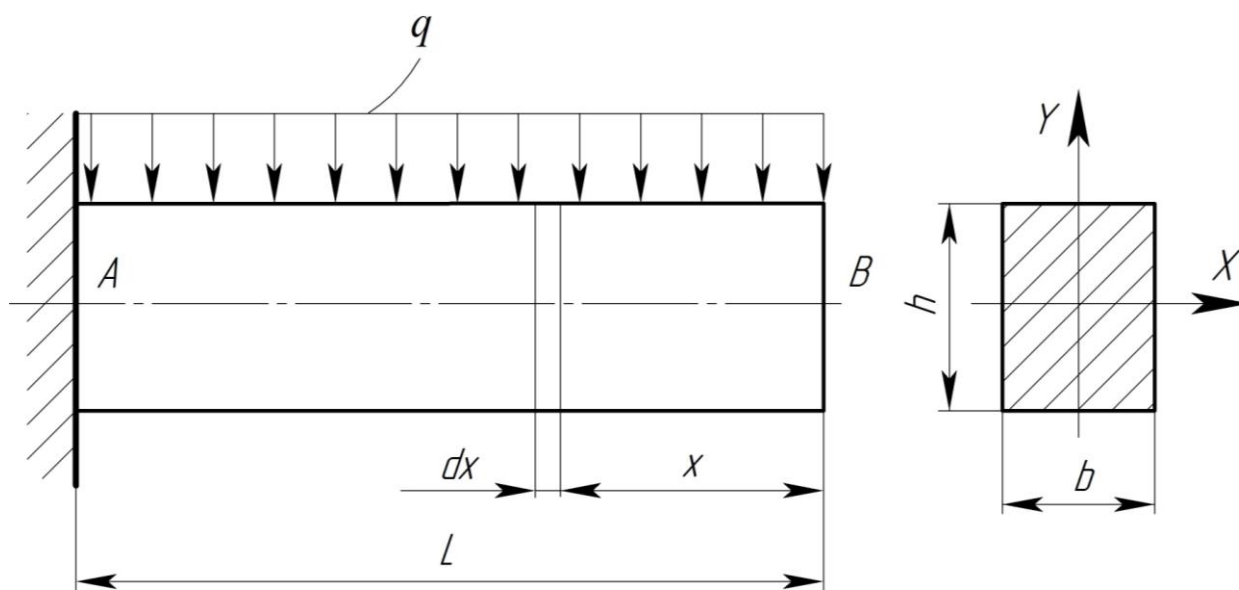


Рисунок 3.11

Розв'язування

Функції згинальних моментів бруса від власної ваги

$$M_{зг}(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2}.$$

Максимальні нормальні напруження виникають на верхніх волокнах бруса і дорівнюють

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{|M_{зг}(x)|}{W_0} = \frac{q \cdot \frac{x^2}{2}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{3q \cdot x^2}{b \cdot h^2},$$

де W_0 – осьовий момент опору прямокутного поперечного перетину

відносно осі X ,
$$W_0 = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Абсолютне видовження елементарної ділянки верхніх волокон бруса KB

$$d(\Delta L_{KB}) = \varepsilon(x) \cdot dx.$$

За законом Гука відносна деформація бруса

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E},$$

відповідно абсолютне видовження буде

$$d(\Delta L_{KB}) = \frac{\sigma(x)}{E} \cdot dx = \frac{3q \cdot x^2}{b \cdot h^2 \cdot E} dx.$$

Загальне видовження верхніх волокон бруса KB

$$\Delta L_{KB} = \int_0^l \frac{3q}{b \cdot h^2 \cdot E} \cdot x^2 dx = \frac{3q}{3b \cdot h^2 \cdot E} \cdot x^3 \Big|_0^l = \frac{q}{b \cdot h^2 \cdot E} \cdot l^3.$$

Приклад 3.5. Балка довжиною l (рис. 3.12а) з постійною висотою поперечного перетину h у кінцевих перетинах BC навантажена парами сил M і $2M$. Матеріал балки має допустиме напруження $[\sigma]$. Визначити закон зміни ширини поперечного перетину $b(x)$ балки при умові забезпечення рівномірності. Власною вагою балки знехтувати. Показати вид балки згори.

Розв'язування

З умови статичної рівноваги опорні реакції балки дорівнюють

$$R_C = -R_B = \frac{M}{l}.$$

Функція згинальних моментів (рис. 3.12а)

$$M_{зг}(x) = M + R_C \cdot x = M + \frac{M}{l} \cdot x.$$

Максимальні нормальні напруження у будь-якому перетині балки

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M(x)}{W_Z(x)} = \frac{\left(M + \frac{M}{l} \cdot x \right)}{\frac{b(x) \cdot h^2}{6}},$$

де $W_Z(x)$ – осьовий момент опору прямокутного поперечного перетину

$$\text{відносно осі } Z, \quad W_Z(x) = \frac{b(x) \cdot h^2}{6}.$$

Прирівнявши напруження

$$\sigma_{\max}(x) = [\sigma]$$

або

$$\frac{\left(M + \frac{M}{l} \cdot x \right)}{\frac{b(x) \cdot h^2}{6}} = [\sigma],$$

отримаємо функцію зміни ширини поперечного перетину балки від координати x

$$b(x) = \frac{\left(M + \frac{M}{l} \cdot x \right)}{\frac{h^2}{6} \cdot [\sigma]}$$

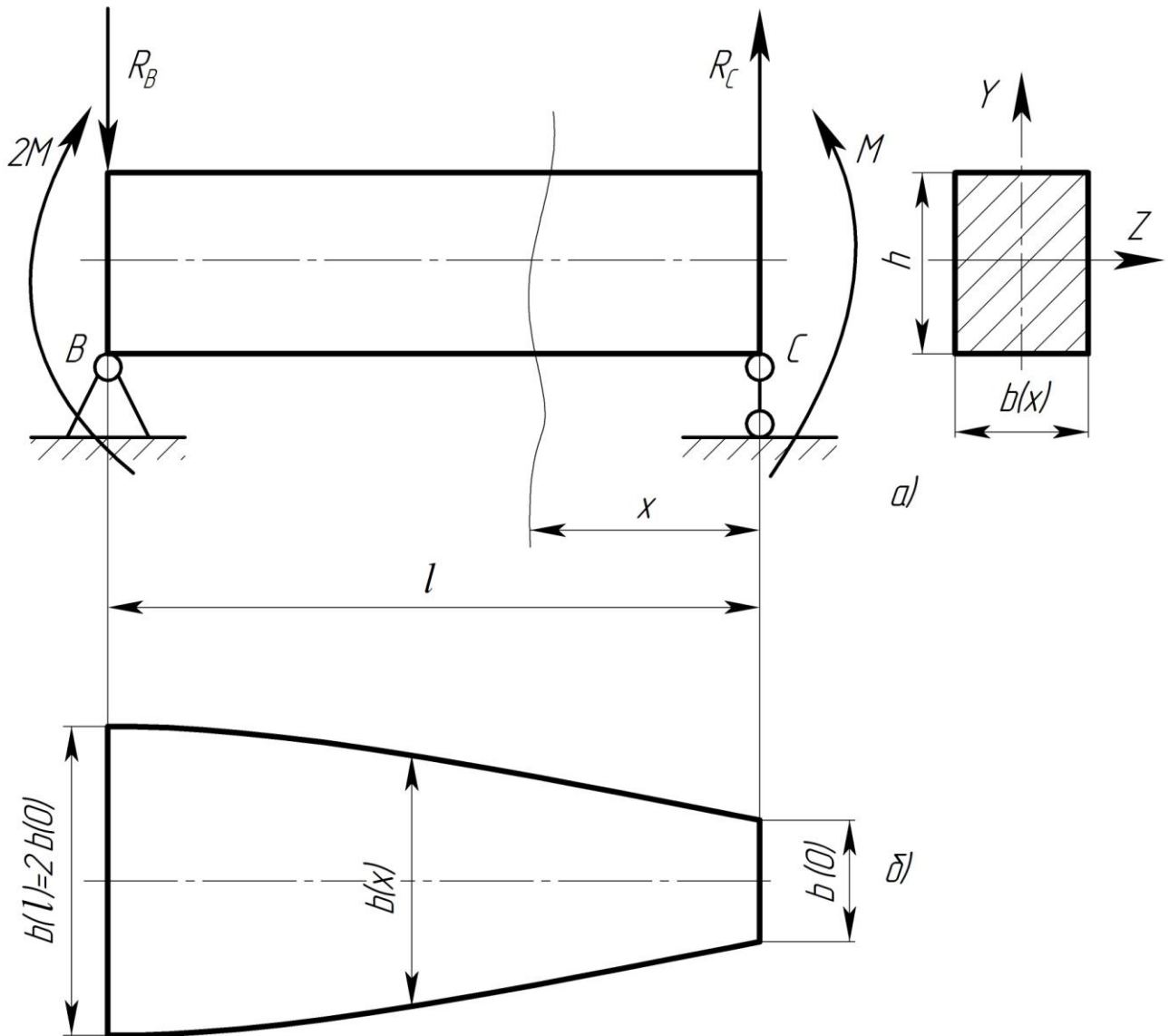


Рисунок 3.12

Визначимо закон зміни ширини поперечного перетину $b(x)$ балки при умові забезпечення рівномірності. Власною вагою балки нехтуємо.

Ширина прямокутного перетину

- в точці C , при $x_C = 0$:

$$b(0) = \frac{\left(M + \frac{M}{l} \cdot 0 \right)}{\frac{h^2}{6} \cdot [\sigma]} = \frac{6 \cdot M}{h^2 \cdot [\sigma]},$$

- в точці B , при $x_B = l$:

$$b(l) = \frac{\left(M + \frac{M}{l} \cdot l \right)}{\frac{h^2}{6} \cdot [\sigma]} = \frac{6 \cdot (2M)}{h^2 \cdot [\sigma]} = \frac{12 M}{h^2 \cdot [\sigma]} = 2b(0).$$

Вид балки згори показаний на рис. 3.12б.

Приклад 3.6. Визначити діаметр балки зображеної на рисунку 3.13а. Допустимі нормальні напруження матеріалу балки $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язування

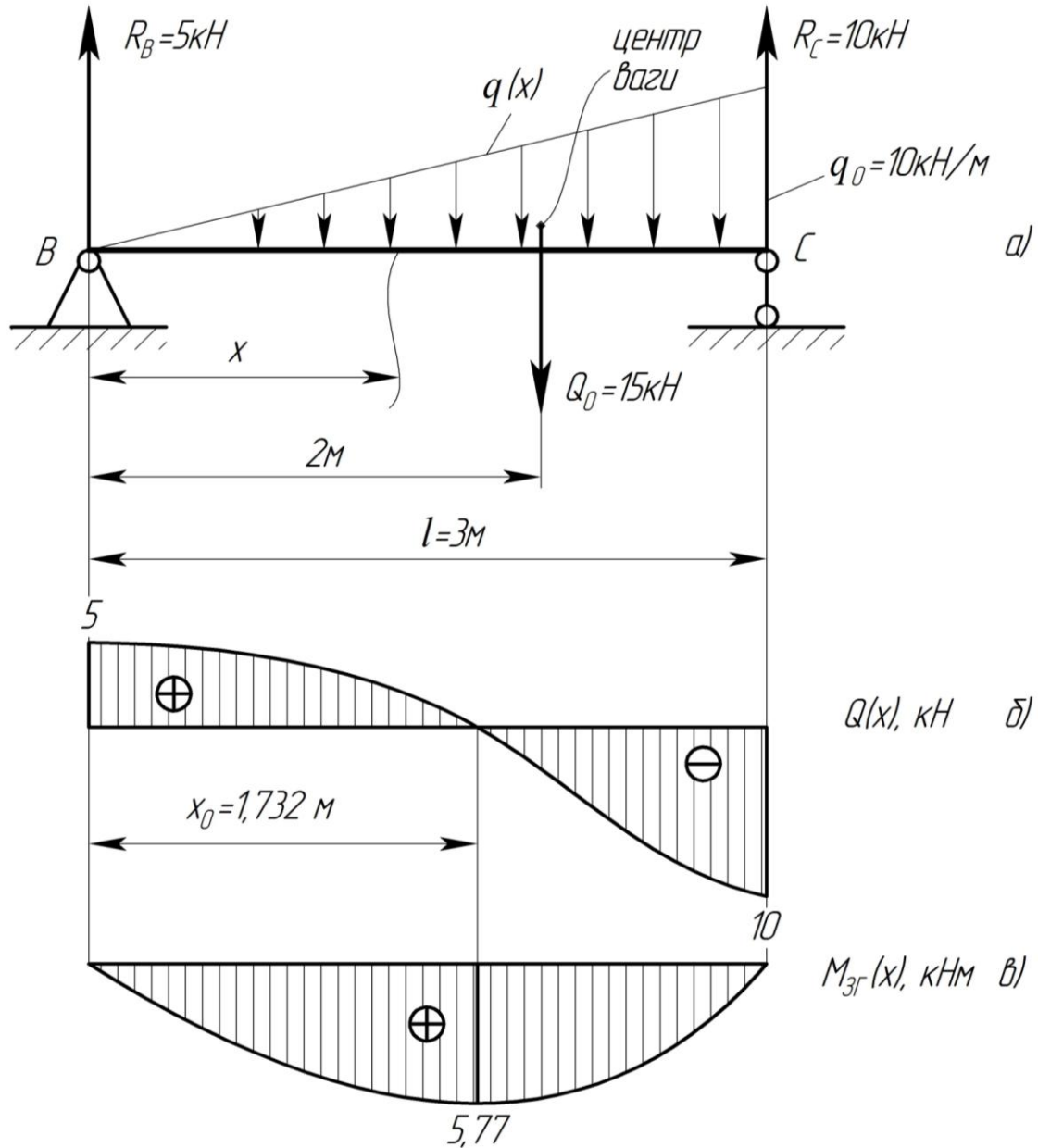


Рисунок 3.13

Визначимо опорні реакції.

Рівнодійну зовнішню силу від заданого нерівномірно розподіленого навантаження визначимо за формулою

$$Q_0 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q_0 = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15 \text{ кН.}$$

Рівнодійна сила прикладена на відстані $\frac{2}{3}l$ від вершини трикутника (рис. 3.13а). З рівнянь статики

$$\sum M_C = 0; \quad R_B \cdot l - Q_0 \cdot \frac{l}{3} = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_C \cdot l - Q_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot l = 0;$$

визначимо опорні реакції:

$$R_B = \frac{Q_0}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ кН};$$

$$R_C = \frac{2}{3} \cdot Q_0 = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10 \text{ кН}.$$

Складаємо перевіряюче рівняння статики

$$\sum Y = 0; \quad R_B - Q_0 + R_C = 5 - 15 + 10 = 15 - 15 = 0.$$

Величини опорних реакцій визначені правильно.

Запишемо аналітично функцію розподіленого навантаження зображеного графічно на рисунку 3.13а

$$q(x) = \frac{q_0}{l} \cdot x.$$

Запишемо функції поперечних сил $Q(x)$ та згинальних моментів $M_{зГ}(x)$:

$$Q(x) = R_B - \int_0^x q(x) dx = R_B - \int_0^x \frac{q_0}{l} \cdot x dx = R_B - \frac{q_0 \cdot x^2}{2l};$$

$$M_{зГ}(x) = \int_0^x \left(R_B - \frac{q_0 \cdot x^2}{2l} \right) dx = R_B \cdot x - \frac{q_0 \cdot x^3}{6l}.$$

Визначимо поперечні сили на границях балки:

- при $x_B = 0$

$$Q(x_B = 0) = R_B - \frac{q_0 \cdot 0^2}{2} = R_B = 5 \text{ кН};$$

- при $x_C = l = 3 \text{ м}$

$$Q(x_C = l = 3 \text{ м}) = R_B - \frac{q_0 \cdot 3^2}{2l} = 5 - \frac{10 \cdot 3^2}{2 \cdot 3} = -10 \text{ кН}.$$

Знайдемо координату точки балки при якій $Q(x) = 0$,

$$R_B - \frac{q_0 \cdot x_0^2}{2l} = 0,$$

звідки

$$x_0 = \sqrt{\frac{R_B \cdot 2l}{q_0}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{10}} = \sqrt{3} = 1,732 \text{ м}.$$

Будуємо епюру поперечних сил (рис. 3.13б).

Визначаємо згинальні моменти в характерних точках балки:

- при $x_B = 0$

$$M_{3Г}(x_B = 0) = R_B \cdot 0 - \frac{q_0 \cdot 0^3}{6l} = 0;$$

- при $x_C = l = 3 \text{ м}$

$$M_{3Г}(x_C = 3 \text{ м}) = R_B \cdot 3 - \frac{q_0 \cdot 3^3}{6l} = 5 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 3^3}{6 \cdot 3} = 0;$$

- при $x_0 = 1,732 \text{ м}$

$$\begin{aligned} M_{3Г}(x_0 = 1,732 \text{ м}) &= R_B \cdot 1,732 - \frac{q_0 \cdot 1,732^3}{6l} = \\ &= 5 \cdot 1,732 - \frac{10 \cdot 1,732^3}{6 \cdot 3} = 5,77 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

За отриманими значеннями будемо епюру $M_{3\Gamma}(x)$. (рис. 3.13в).

Максимальний згинальний момент становить $M_{3\Gamma \cdot \max} = 5,77 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \cdot \max}}{W_0} \leq [\sigma],$$

визначаємо необхідний осьовий момент опору поперечного перетину балки

$$W_0 \geq \frac{M_{3\Gamma \cdot \max}}{[\sigma]} = \frac{5,77 \cdot 10^{-3}}{160} = 0,0361 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Визначаємо діаметр балки

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \geq 0,0361 \cdot 10^{-3},$$

звідки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{0,0361 \cdot 10^{-3} \cdot 32}{\pi}} = 0,02257 \text{ м} = 22,57 \text{ мм},$$

приймаємо $d = 24 \text{ мм}$.

Приклад 3.7. Визначити дотичні напруження в точці C на площадці нормальній до осі бруса (рис. 3.14а) за вимірами деформації ε_K у точці K у заданому напрямку. Характеристики матеріалу відомі: E , μ .

Розв'язування

Визначимо опорні реакції балки з рівняння статyki

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - \frac{q \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{8} = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - \frac{q \cdot l}{4} \cdot \left(l + \frac{l}{8} \right) = 0;$$

звідки

$$R_A = \frac{q \cdot l}{32}; \quad R_B = \frac{9 q \cdot l}{32}.$$

Перевіримо правильність визначення опорних реакцій

$$\sum Y = 0; \quad -R_A + R_B - \frac{q \cdot l}{4} = -\frac{q \cdot l}{32} + \frac{9 q \cdot l}{32} - \frac{q \cdot l}{4} = \frac{9}{32} - \frac{1}{4} = 0.$$

Опорні реакції визначені правильно.

Будуємо епюри перерізуючих сил та згинальних моментів (рис. 3.14б, в).

У точці K виникає плоский напружений стан (рис. 3.14г) по гранях якого діють тільки дотичні напруження. Визначимо їх за формулою Журавського

$$\tau_{\max} = \frac{Q_K \cdot S_{Z \max}}{b \cdot I_Z},$$

де Q_K – перерізуюча сила в перетині K ,

$$Q_K = \frac{q \cdot l}{32};$$

$S_{Z \max}$ – статичний момент половини площі прямокутного поперечного перетину відносно осі Z ,

$$S_{Z \max} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{8};$$

b – ширина поперечного перетину балки;

I_X – осьовий момент інерції площі прямокутного поперечного перетину балки відносно осі Z ,

$$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Після підстановки значень отримаємо величину дотичних напружень

$$\tau_{\max} = \frac{\frac{q \cdot l}{32} \cdot \frac{b \cdot h^2}{8}}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{3 q \cdot l}{64 b \cdot h}.$$

Під кутом 45° до осі балки діють виключно нормальні (головні) напруження (рис. 3.14z). Визначимо величини цих напружень:

$$\sigma_{\max} = \pm \tau ;$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \tau = \frac{3 q \cdot l}{64 b \cdot h} ;$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = -\tau = -\frac{3 q \cdot l}{64 b \cdot h}.$$

Відносна деформація в напрямку одного із головних напружень σ_1

$$\begin{aligned} \varepsilon_K = \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left[\frac{3 q \cdot l}{64 b \cdot h} + \mu \cdot \frac{3 q \cdot l}{64 b \cdot h} \right] = \frac{3 q \cdot l}{64 E \cdot b \cdot h} \cdot (1 + \mu), \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{q \cdot l}{b \cdot h} = \frac{64 E \cdot \varepsilon_K}{3 (1 + \mu)}. \quad (3.3)$$

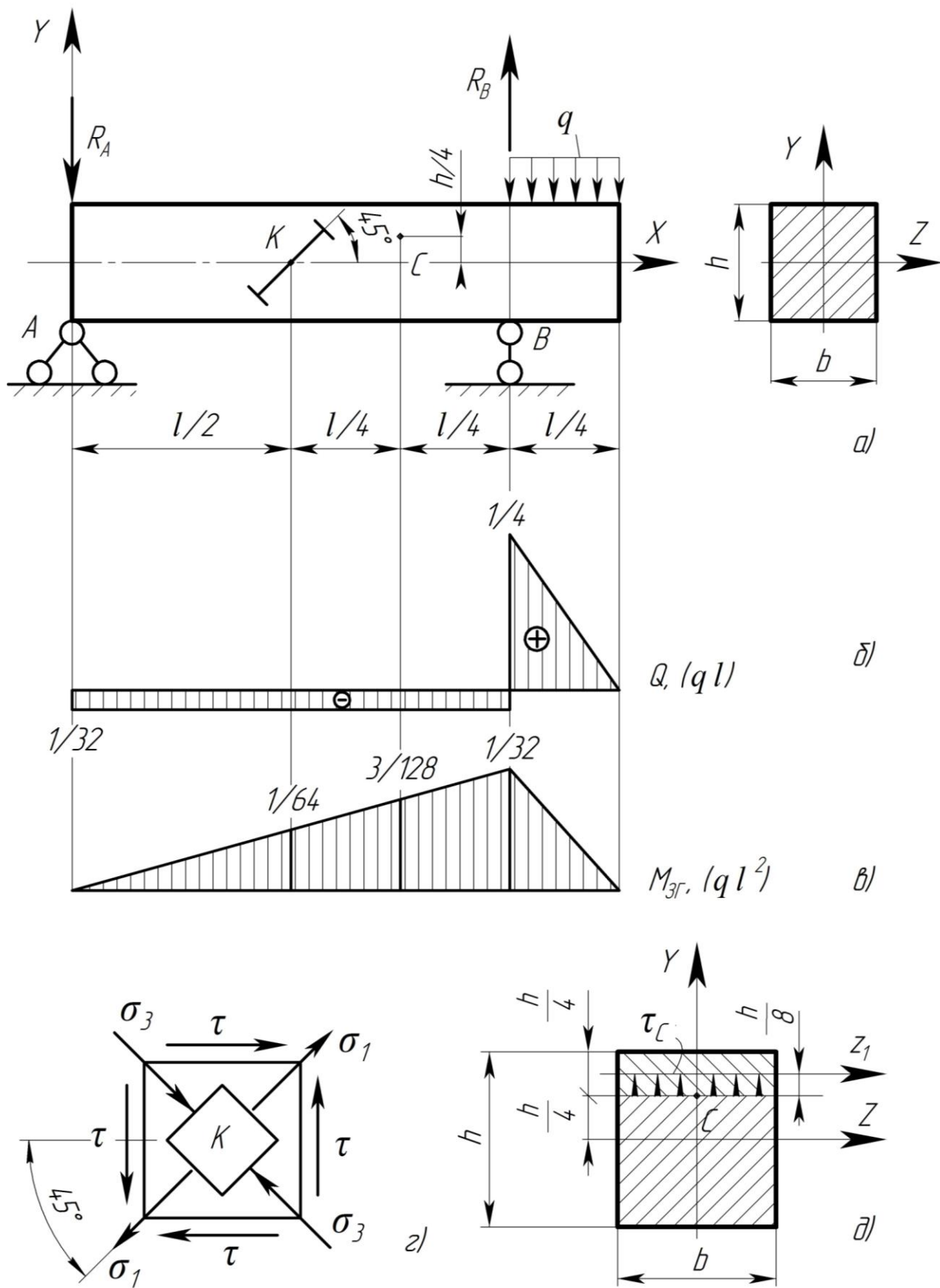


Рисунок 3.14

Дотичні напруження в точці C (рис. 3.14д) визначимо також користуючись формулою Журавського

$$\tau_C = \frac{Q_C \cdot S_z^C}{b \cdot I_Z},$$

де Q_C – перерізуюча сила у точці C ,

$$Q_C = \frac{q \cdot l}{32};$$

S_Z^C – статичний момент площі прямокутного поперечного перетину відносно осі Z ,

$$S_Z^C = \frac{h}{4} \cdot b \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{8} \right) = \frac{3 b \cdot h^2}{32}.$$

Підставивши дані, отримаємо

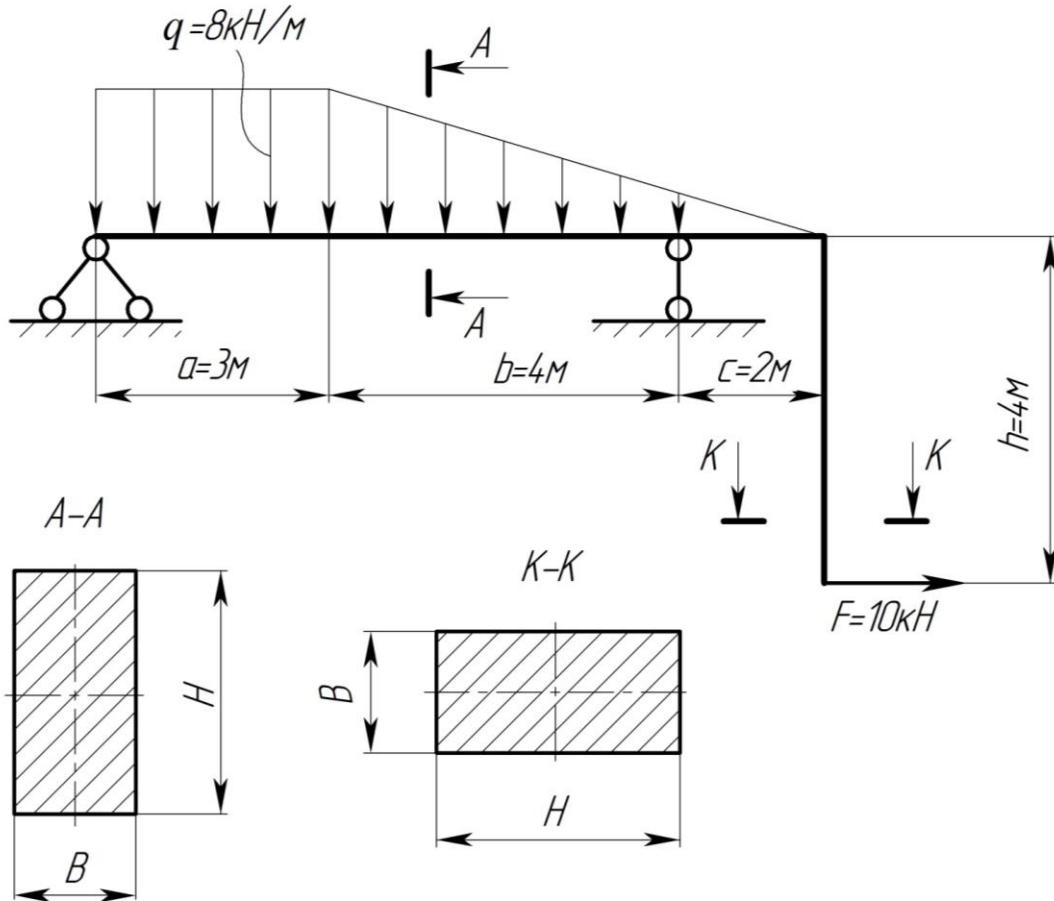
$$\tau_C = \frac{\frac{q \cdot l}{32} \cdot \frac{3 b \cdot h^2}{32}}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{9 q \cdot l}{256 b \cdot h}. \quad (3.4)$$

Після підстановки рівнянь (3.3) в (3.4), отримаємо значення дотичних напружень у точці C залежно від деформації в точці K

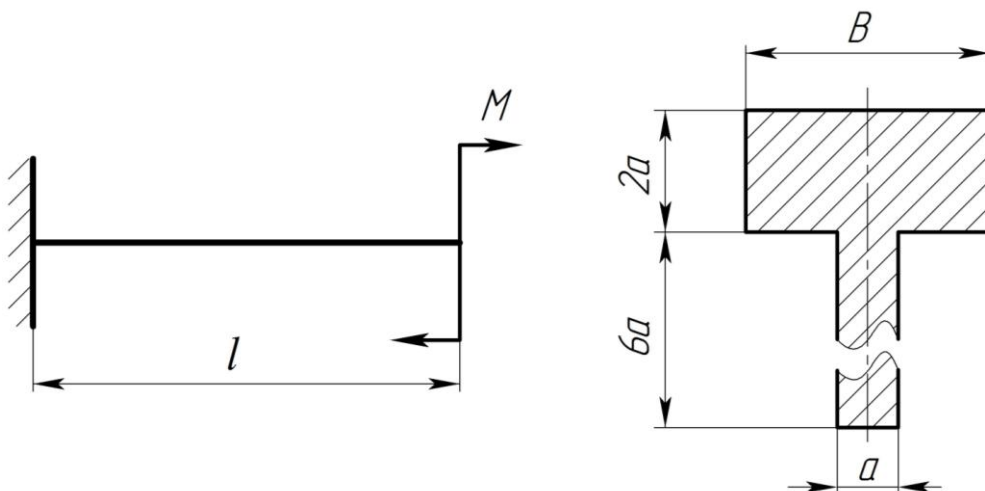
$$\tau_C = \frac{9}{256} \cdot \frac{64 E \cdot \varepsilon_K}{3 (1 + \mu)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{E \cdot \varepsilon_K}{(1 + \mu)}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

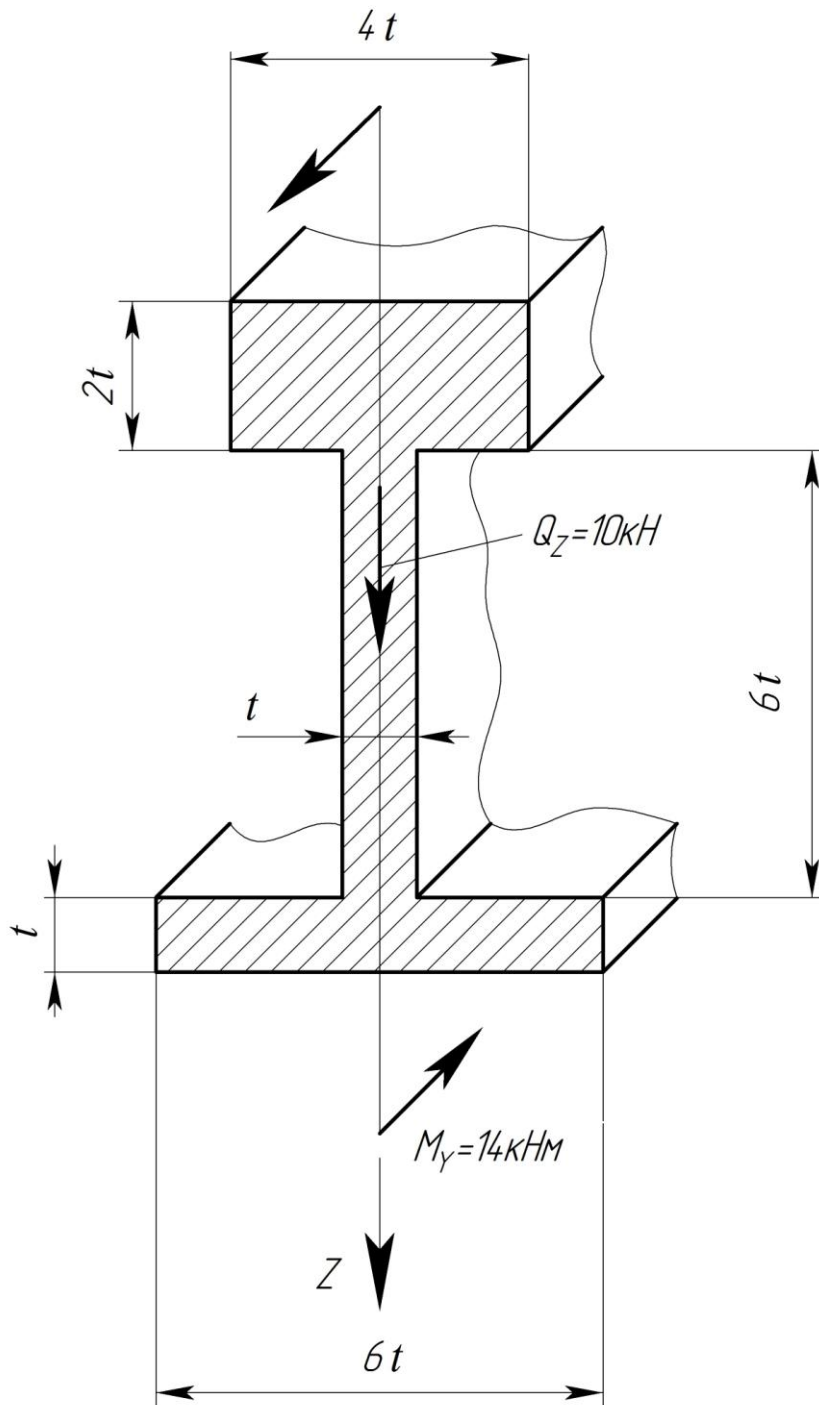
Задача 3.5. Для заданої плоскої рами побудувати епюри внутрішніх зусиль. Визначити необхідні розміри прямокутного поперечного перетину, якщо $H / B = 2$, $[\sigma] = 160$ МПа.



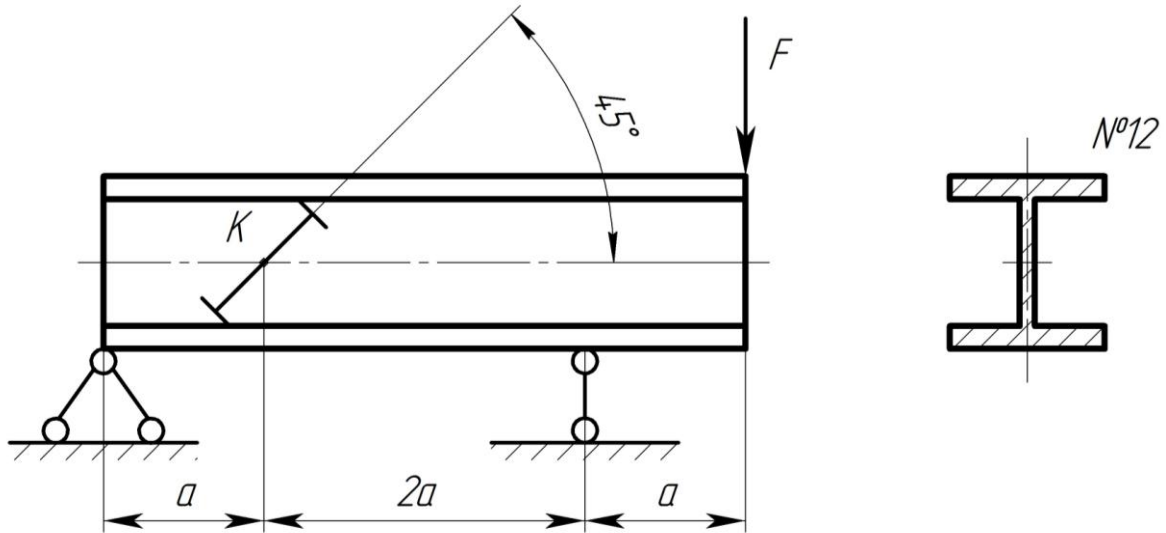
Задача 3.6. Консольна чавунна балка навантажена моментом M . Визначити ширину полиці B , що забезпечує раціональне використання властивостей матеріалу. Границя текучості при стиску у три рази більша за границю текучості при розтягу.



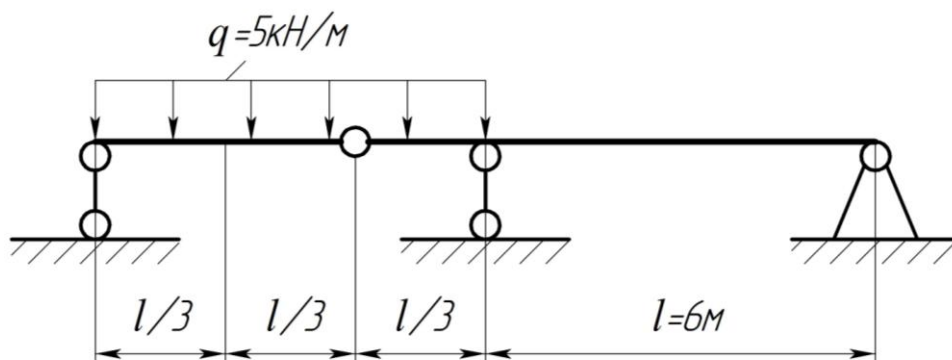
Задача 3.7. Для заданого поперечного перетину визначити розмір t , якщо $[\sigma] = 200$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа. Побудувати епюри розподілу дотичних та нормальних напружень по висоті перетину.



Задача 3.8. Визначити силу F , якщо деформація у точці C у заданому напрямку $\varepsilon_K = 1 \cdot 10^{-5}$; $a = 0,5$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.



Задача 3.9. Для заданої балки підібрати двотавровий поперечний перетин, якщо $[\sigma] = 160$ МПа.



3.3. Визначення переміщень при згині

Стержні, які зазнають деформації згину, повинні мати не тільки відповідну **міцність**, але й **достатню жорсткість**. Під дією зовнішніх навантажень переміщення їх перетинів не повинні перевищувати встановлених нормами допустимих значень.

Для виконання розрахунку на жорсткість на практиці необхідно вміти обчислювати відповідні переміщення перетинів. Розглянемо переміщення перетинів при згині консольної балки (рис. 3.15).

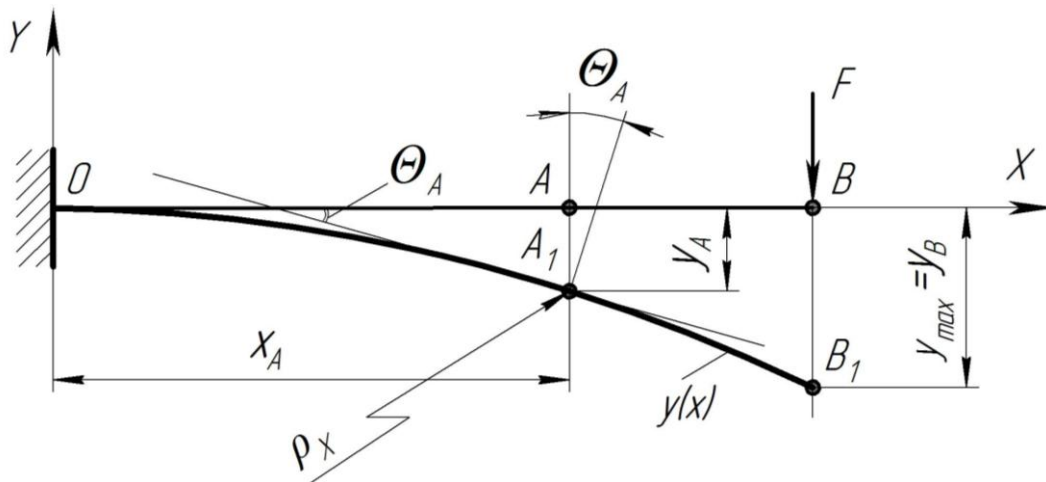


Рисунок 3.15

На рис. 3.15 використані позначення: OB – недеформована вісь балки; OB_1 – зігнута вісь балки; Θ_A – кутове переміщення перетину A ; y_A – лінійне переміщення перетину; ρ_x – кривизна вісі балки.

При плоскому поперечному згині **зігнута вісь** балки лежить у силевій площині і збігається з головною площиною. Викривлену вісь балки називають **зігнутою віссю** або **пружною лінією**.

Положення поперечного перетину балки при згині визначається двома переміщеннями (рис. 3.15):

1. **Лінійне переміщення** $y_A = y(x_A)$ **центра ваги перетину в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, яке називають прогином.**

2. **Кутове переміщення** $\Theta_A = \Theta(x_A)$ – **це кут повороту перетину навколо нейтральної вісі перетину відносно його початкового положення.**

Вважають, що довжина зігнутої поздовжньої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні балки не змінюється.

Прогини і кути поворотів балки зв'язані диференціальною залежністю

$$\Theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x).$$

Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Між кривизною $1/\rho$ зігнутої осі балки (пружної лінії), згинальним моментом $M_{зГ}$, який зумовлює цю кривизну, та жорсткістю балки при згині $E \cdot I_0$ має місце така аналітична залежність

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_{зГ}(x)}{E \cdot I_0}, \quad (3.5)$$

де $\rho(x)$ – радіус кривизни пружної лінії балки в площині на відстані x від початку координат;

$M_{зГ}(x)$ – згинальний момент у тому ж перетині балки.

Кривизну плоскої кривої (відомо з курсу вищої математики) описують залежністю

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}}. \quad (3.6)$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (3.5) і (3.6), отримано **точне диференціальне рівняння зігнутої осі балки**

$$E \cdot I_0 \cdot \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} = \pm M_{зГ}(x). \quad (3.7)$$

Враховуючи, що кути повороту перетинів балки малі, то величиною $y'(x)^2$ порівняно з одиницею можна знехтувати. Тоді із виразу (3.7) при виборі напрямку осі Y вгору, отримують **приблизне диференціальне рівняння пружної лінії балки**

$$E \cdot I_0 \cdot y''(x) \approx M_{зГ}(x).$$

Інтегруючи його двічі або один раз, можна визначити лінійні $y(x)$ та кутові $\Theta(x)$ переміщення перетинів балки за будь-яких умов навантаження.

Відомо декілька методів визначення переміщень при прямому поперечному згині. Розглянемо деякі з них.

Метод безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки

В основу методу покладено наближене *диференціальне рівняння зігнутої осі балки*

$$E \cdot I_0 \cdot y''(x) = M_{3\Gamma}(x), \quad (3.8)$$

де $E \cdot I_0$ – жорсткість поперечного перетину балки при згині;

E – модуль пружності матеріалу, з якого виготовлена балка;

I_0 – осьовий момент інерції поперечного перетину балки, надалі $I_0 = I$;

$M_{3\Gamma}(x)$ – функція згинального моменту від зовнішнього навантаження, що діє на даній ділянці балки, надалі $M_{3\Gamma}(x) = M(x)$.

Для отримання функції зігнутої осі балки $y(x) = f(x)$ проведемо інтегрування рівняння (3.8)

$$E \cdot I \cdot y'(x) = \int M(x) dx + C; \quad (3.9)$$

$$E \cdot I \cdot y(x) = \int dx \int M(x) dx + C \cdot x + D. \quad (3.10)$$

Отже, рівняння зігнутої осі балки

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot I} \int dx \int M(x) dx + C \cdot x + D. \quad (3.11)$$

У рівняння (3.9)-(3.11) входять постійні інтегрування C і D , які визначають з граничних умов, тобто умов закріплення опор балки, прогини і кути повороту яких відомі.

Метод початкових параметрів

Метод початкових параметрів дає можливість записати всього *одне рівняння прогинів або кутів повороту перетинів, яке є придатним для всіх ділянок балки*. Таке рівняння називають **універсальним рівнянням пружної лінії**, яке враховує всі види навантажень: зосереджену силу F , зосереджений момент M , розподілене навантаження $q(x)$.

Метод початкових параметрів отриманий у результаті уніфікації методу безпосереднього інтегрування зігнутої осі балки, прирівнюванням

постійних інтегрування на границях ділянок. Даний метод є універсальним методом визначення переміщень при згині.

Для призматичної балки (рис. 3.16) при вибраній системі координат $X Y$ і різних видах навантаження **рівняння пружної лінії** можна записати у вигляді

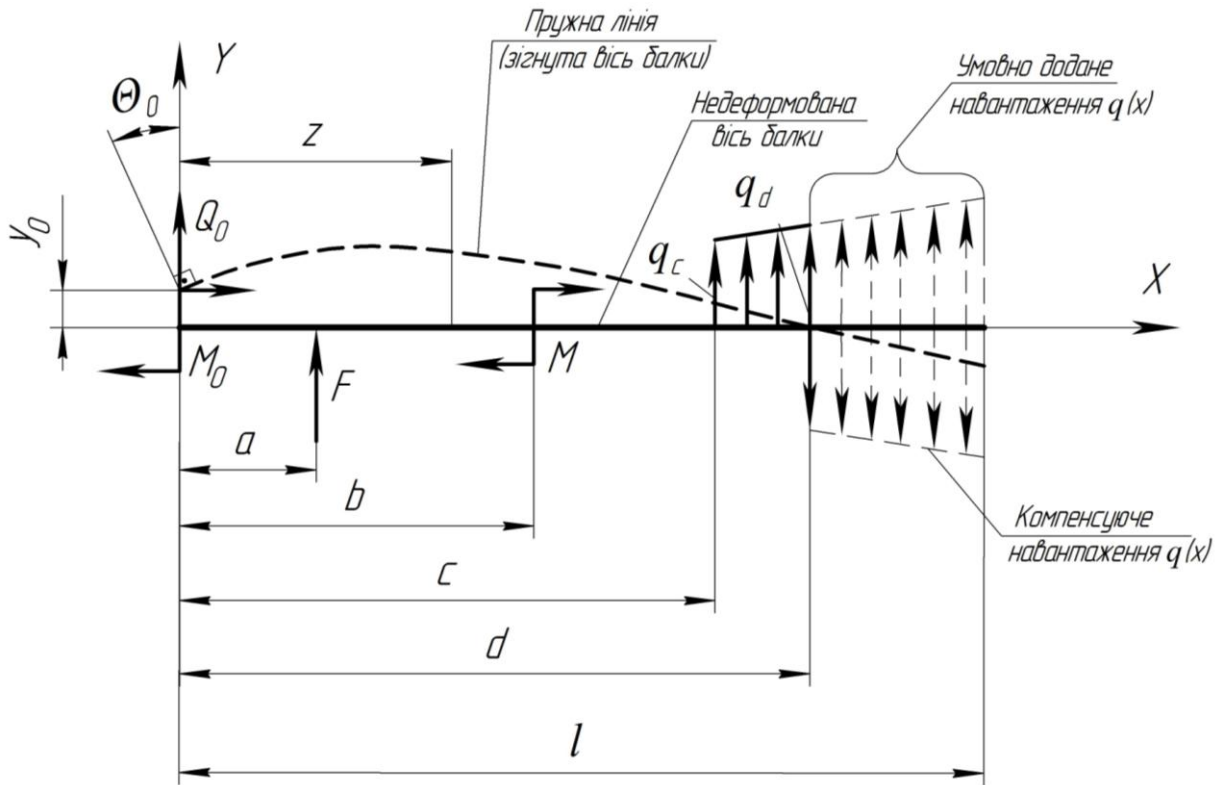


Рисунок 3.16

$$\begin{aligned}
 y(x) = & y_0 + \Theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot I} \left(\frac{M_0 \cdot x^2}{2} + \frac{Q_0 \cdot x^3}{6} + \right. \\
 & + \frac{F (x-a)^3}{6} + \frac{M (x-b)^2}{2} + \frac{q_c (x-c)^4}{24} - \frac{q_d (x-d)^4}{24} + \\
 & \left. + k \cdot \frac{(x-c)^5}{120} - k \cdot \frac{(x-d)^5}{120} \right), \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

де y_0 , Θ_0 , M_0 , Q_0 – початкові параметри, відповідно: прогин, кут повороту поперечного перетину, згинальний момент і поперечна сила на початку координат;

a – відстань від початку координат до перетину, в якому прикладено зосереджену силу F ;

- b – відстань від початку координат до перетину, в якому прикладено зосереджений момент M ;
- c – відстань від початку координат до перетину, в якому починає дію навантаження $q(x)$;
- d – відстань від початку координат до перетину, в якому завершує дію навантаження $q(x)$;
- k – коефіцієнт, для схеми на рис. 3.16

$$k = \frac{q_d - q_c}{d - c}.$$

Прогин y_0 та **кут повороту** Θ_0 – геометричні початкові параметри. **Згинальний момент** M_0 та **поперечна сила** Q_0 у перетині, який збігається з початком координат, – статичні початкові параметри.

Прогин y_0 та кут повороту Θ_0 початкового (лівого кінцевого) перетину балки визначають із умов закріплення балки, згинальний момент M_0 та поперечну силу Q_0 – з епюр $M_{зг}$ і Q .

Якщо розглядають балку на двох опорах, то y_0 і Θ_0 визначають з умов рівності нулю прогинів на опорах.

Якщо розглядають консольну балку, то ці параметри визначають з умов рівності нулю прогину і кута повороту перетину в защемленні.

Початкові параметри y_0 , Θ_0 , M_0 , Q_0 **можуть бути додатними, від’ємними або дорівнювати нулю.**

Знаки доданків у рівнянні визначають знаки відповідних зовнішніх силових факторів.

Правила знаків такі ж, які були прийняті для поперечних сил і згинальних моментів.

Рівняння для визначення кутів повороту призматичної балки (див. рис. 3.16) має вигляд

$$\Theta(x) = \Theta_0 + \frac{1}{EI} \left(M_0 + \frac{Q_0 x^2}{2} + \frac{F(x-a)^2}{2} + \frac{M(x-b)}{1} + \frac{q_c(x-c)^3}{6} - \frac{q_d(x-d)^3}{6} + k \cdot \frac{(x-c)^4}{24} - k \cdot \frac{(x-d)^4}{24} \right). \quad (3.13)$$

При складанні рівняння пружної лінії балки потрібно дотримуватися таких правил:

1. Початок координат вибирають у крайній лівій точці розглядуваної балки та зберігають його загальним для всіх ділянок.

2. У рівняння підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розглядуваного перетину.

3. Якщо розподілене навантаження $q(x)$ обривається на одній із ділянок балки, то його умовно продовжують до правого кінця балки, одночасно вводячи компенсувальне навантаження тієї ж інтенсивності, але зворотного напрямку.

Метод Мора

В основу методу Мора покладено **принцип збереження енергії**, тобто рівність робіт від зовнішніх навантажень та потенціальної енергії деформації.

Переміщення Δ (прогин y або кут повороту Θ) **визначають за інтегралом Мора**, який охоплює всю довжину балки

$$\Delta(y, \Theta) = \sum \int_l \frac{M(x) \cdot \overline{M}(x)}{EI} dx, \quad (3.14)$$

де $M(x)$ – функції згинальних моментів від зовнішніх навантажень для заданої (навантаженої) балки;

$\overline{M}(x)$ – функції згинальних моментів від одиничного навантаження для «допоміжної» (розвантаженої) балки.

«Допоміжна» балка – це задана балка без зовнішніх навантажень.

Фізична суть інтегралу Мора: переміщення довільного перетину балки – це робота одиничної сили, яка затрачена на переміщення точки її прикладання від заданого навантаження.

Порядок визначення переміщень (прогинів чи кутів повороту) з допомогою інтегралу Мора:

1. Складають рівняння згинальних моментів $M(x)$ від заданого навантаження.

2. Звільнивши систему (балку) від заданих навантажень, прикладають до неї силу (пару сил), яка дорівнює одиниці (одиничну силу чи одиничний момент) у тому перетині балки, де визначають переміщення та у напрямі цього переміщення.

3. Складають рівняння згинальних моментів $\overline{M}(x)$ від цієї одиничної сили (пари сил).

4. Обчислюють суму інтегралів (3.14) від добутку обох моментів, розділених на жорсткість перетину.

Графоаналітичний розв'язок інтеграла Мора

Обчислення інтеграла Мора (3.14) у деяких випадках доцільно виконувати графо-аналітичним способом.

Суть: *означений інтеграл від добутку двох функцій, одна з яких лінійна, а друга довільна, дорівнює добутку площі графіка довільної функції на взяту під її центром ваги ординату графіка лінійної функції.*

Графоаналітичний розв'язок інтеграла Мора можна використовувати у випадках, коли одна з епюр окреслюється прямими лініями. Така умова виконується для конструкцій, які складаються з прямолінійних брусів (елементів), тому, що епюри від одиничних навантажень завжди прямолінійні.

Загальна формула для визначення переміщень при згині

$$\Delta(y, \Theta) = \sum \frac{1}{E \cdot I} \int_l M(x) \cdot \bar{M}(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}}{E \cdot I}, \quad (3.15)$$

де ω_i – площа епюри (рис. 3.17а) згинальних моментів $M(F)$ від зовнішніх навантажень i -ої ділянки балки;

\bar{M}_{Ci} – ордината лінійної епюри (рис. 3.17б) згинальних моментів від одиничного навантаження \bar{M}_C i -ої ділянки балки розташована під центром ваги нелінійної епюри.

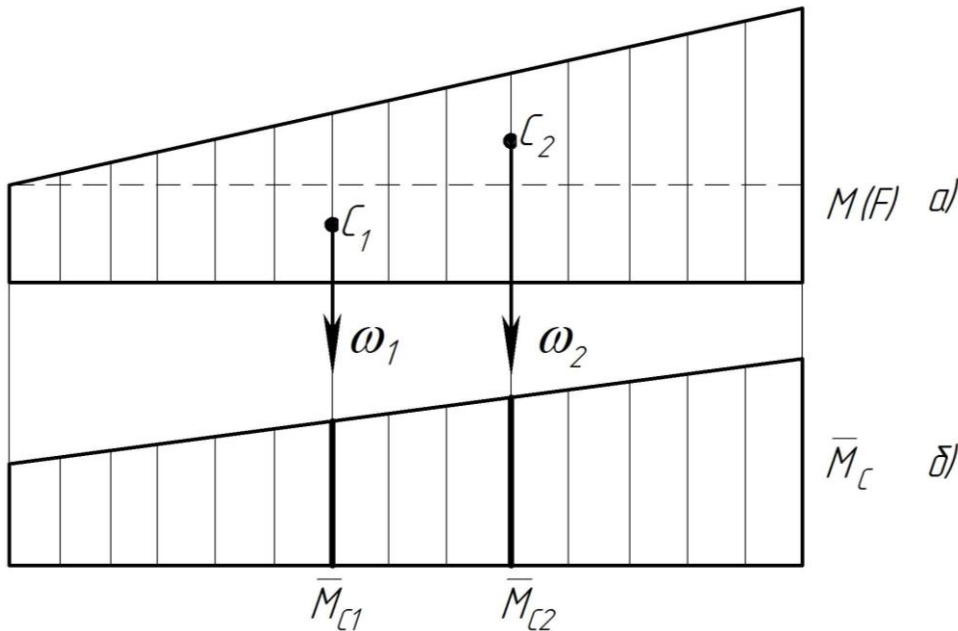


Рисунок 3.17

Обчислення інтеграла Мора графоаналітичним способом називають *способом перемноження епюр*. При цьому епюру $M(F)$ називають *вантажною*, а епюру \overline{M}_C – *одиничною*.

При використанні цього методу потрібно враховувати:

1. Кількість доданків n ($\omega_i \cdot \overline{M}_{Ci}$) повинна бути не менша, ніж кількість сум інтегралів Мора.

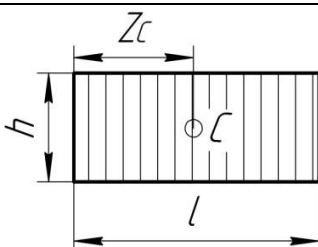
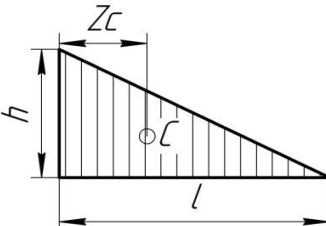
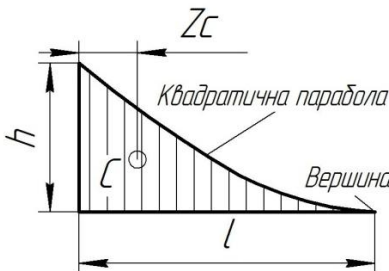
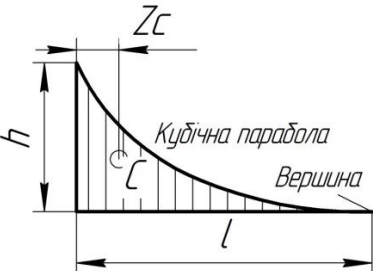
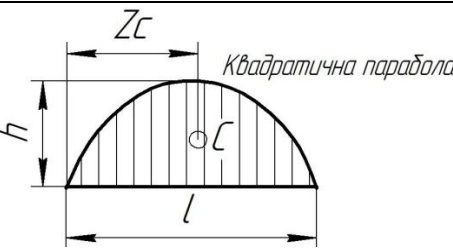
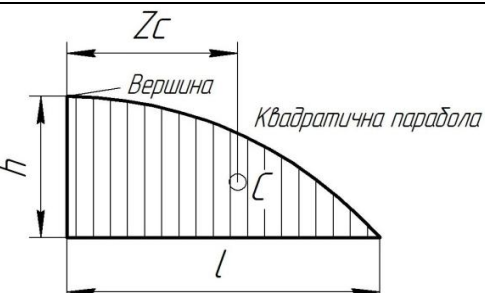
2. Якщо епюри $M(F)$ (зовнішніх навантажень) і \overline{M}_{Ci} (одиничних навантажень) протилежні за знаком (знаходяться по різні сторони від нульової лінії), то результат перемноження епюр має знак «мінус».

3. Якщо рівняння згинальних моментів многочлен, то доцільно будувати вантажну епюру у «розшарованому вигляді», тобто доцільно будувати окремі епюри від зовнішніх навантажень, кожна з яких відповідає одному із доданків. Будують такі епюри підходячи з обох боків балки до місця злому одиничної епюри.

Розмірність одиничних епюр згинальних моментів – одиниці довжини.

Значення площ епюр та координати їх центра ваги, якими можна скористатися при визначенні переміщень наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Площі ω і координати z_C центра тяжіння простих фігур

Фігура	ω	z_C
	$l \cdot h$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{1}{2} l \cdot h$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{1}{3} l \cdot h$	$\frac{1}{4} l$
	$\frac{1}{4} l \cdot h$	$\frac{1}{5} l$
	$\frac{2}{3} l \cdot h$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{2}{3} l \cdot h$	$\frac{3}{8} l$

ПРИКЛАДИ

Приклад 3.8. Кінці стержнів розведені на $l/300$ (рис. 3.18).
Визначити взаємний кут повороту торцевих перетинів, Θ_1 і Θ_2 .

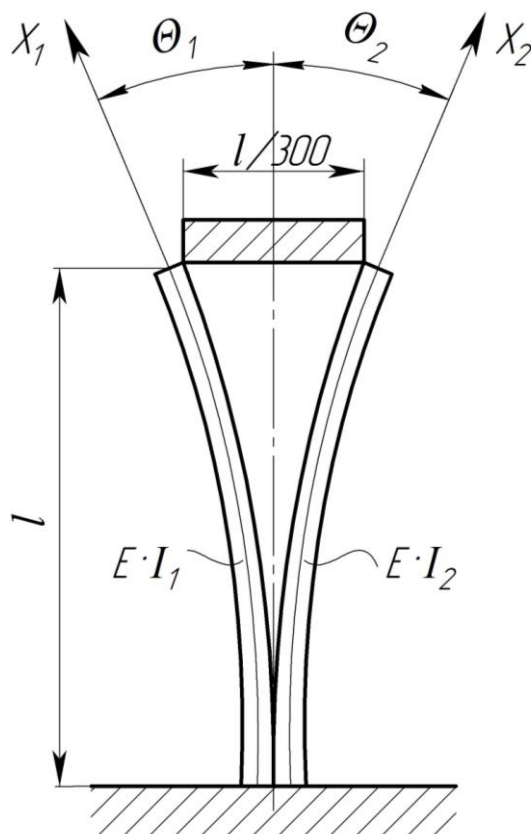


Рисунок 3.18

Розв'язування

Сили F , які діють на стержні, дорівнюють за величиною і протилежні за напрямом дії.

Стержні – це консольні балки завантажені на кінці силою F .

Прогин кінця консолі становить

$$\frac{F \cdot l^3}{3 E \cdot I}$$

У даному випадку сума прогинів крайніх перетинів консольних балок буде

$$\frac{F \cdot l^3}{3 E \cdot I_1} + \frac{F \cdot l^3}{3 E \cdot I_2} = \frac{l}{300},$$

звідки

$$\frac{F \cdot l^2}{E} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) = \frac{1}{100}.$$

Кут повороту торця кінця консольної балки становить

$$\Theta = \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot I}.$$

Для даного випадку

$$\Theta_1 = \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot I_1};$$

$$\Theta_2 = \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot I_2},$$

а взаємний кут повороту крайніх торцевих перетинів буде

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot I_1} + \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot I_2},$$

у числовому вигляді

$$\Theta = \frac{1}{2} \left[\frac{F \cdot l^2}{E} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \right] = \frac{1}{2 \cdot 100} = \frac{1}{200} \text{ рад.}$$

Приклад 3.9. Консоль вильотом l і поперечним перетином $b \times h$ (рис. 3.19а) навантажена на нижній грані рівномірно розподіленим навантаженням t . Визначити горизонтальне переміщення точки B .

Розв'язування

Приводимо рівномірно розподілене навантаження t до центральної осі бруса (рис. 3.19б). В даному випадку матеріал бруса сприймає деформацію розтягу з рівнодійною силою

$$F_0 = t \cdot l,$$

та згину під дією рівномірно розподіленого згинального моменту інтенсивністю

$$m = \frac{t \cdot h}{2}.$$

Горизонтальне переміщення точки B складається з переміщень

$$\Delta B_{\text{гор}} = \Delta(\text{розт}) + \Delta(\text{зг}),$$

де $\Delta(\text{розт})$ – переміщення точки B від деформації розтягу;

$\Delta(\text{зг})$ – переміщення точки B від деформації згину.

Горизонтальне переміщення точки B від деформації розтягу

$$\Delta(\text{розт}) = \frac{F_0 \cdot l}{2 E \cdot A} = \frac{t \cdot l^2}{2 E \cdot b \cdot h},$$

де A – площа поперечного перетину бруса, $A = b \cdot h$;

E – модуль пружності матеріалу бруса.

Горизонтальне переміщення точки B від деформації згину залежить від кута повороту поперечного перетину Θ_B (рис. 3.19в)

$$\Delta(\text{зг}) = \Theta_B \cdot \frac{h}{2}.$$

Кут повороту перетину B визначаємо використовуючи метод Мора,

$$\Theta_B = \int_0^l \frac{M_{3\Gamma}(x) \cdot \overline{M}_{3\Gamma}(x)}{E \cdot I_Z} dx,$$

де $M_{3\Gamma}(x)$ – функція згинального моменту від зовнішнього навантаження (рис. 3.19б),

$$M_{3\Gamma}(x) = m \cdot x = \frac{t \cdot h}{2} \cdot x;$$

$\overline{M}_{3\Gamma}(x)$ – функція згинального моменту від одиничного навантаження (рис. 3.19г), $\overline{M}_{3\Gamma}(x) = 1$;

I_Z – осьовий момент інерції поперечного перетину,

$$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Отже, кут повороту перетину B буде

$$\begin{aligned} \Theta_B &= \frac{1}{E \cdot I_Z} \int_0^l \left(\frac{t \cdot h}{2} \cdot x \cdot 1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} \left(\frac{t \cdot h}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^l = \frac{3 t \cdot l^2}{b \cdot h^2 \cdot E}. \end{aligned}$$

Горизонтальне переміщення точки B

$$\begin{aligned} \Delta B_{гор} &= \frac{t \cdot l^2}{2 b \cdot h \cdot E} + \frac{h}{2} \cdot \frac{3 t \cdot l^2}{b \cdot h^2 \cdot E} = \\ &= \frac{t \cdot l^2}{2 b \cdot h \cdot E} \cdot (1 + 3) = 2 \cdot \frac{t \cdot l^2}{b \cdot h \cdot E}. \end{aligned}$$

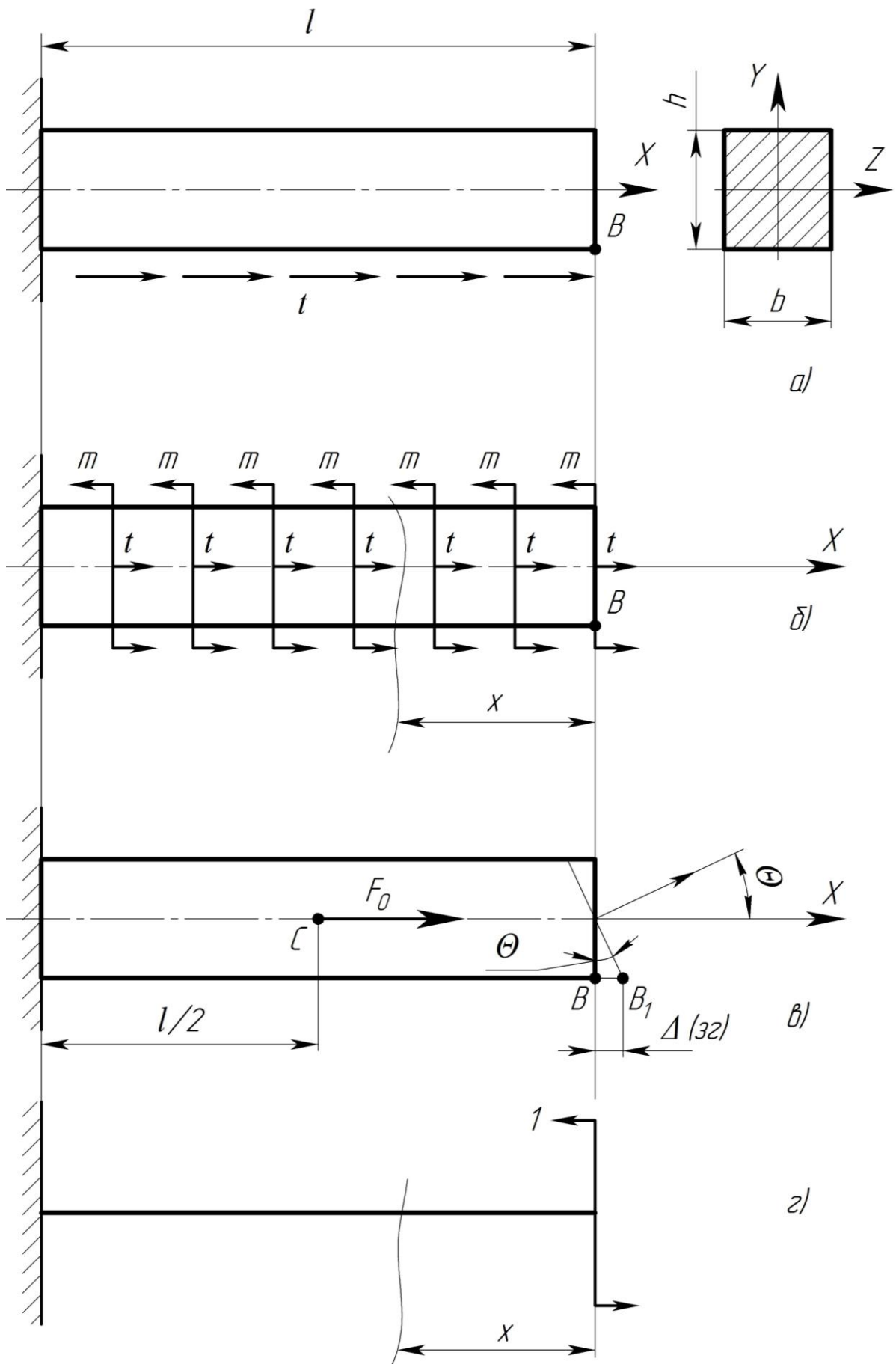


Рисунок 3.19

Приклад 3.10. При навантаженні сталюї балки (рис. 3.20а) двотаврового поперечного перетину № 16 ($I_X = 873 \text{ см}^4$; $W_X = 109 \text{ см}^3$) силою F кут повороту опорного перетину B дорівнює $\Theta_B = 6 \cdot 10^{-3}$ рад. Визначити максимальні нормальні напруження в небезпечному перетині і прогин перетину C .

Розв'язування

Кут повороту перетину B визначаємо графоаналітичним методом Мора.

Будуємо епюри згинальних моментів від зовнішніх навантажень, тобто сили F , (рис. 3.20б), і від одиничного моменту (рис. 3.20в, г).

Кут повороту перетину B визначимо за формулою

$$\Theta_B = \frac{\omega_1 \cdot \overline{M}_1}{E \cdot I_X},$$

де ω_1 – площа епюри (рис. 3.20б) згинальних моментів $M(F)$ від зовнішнього навантаження балки,

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2F \cdot 4 = 4F;$$

\overline{M}_1 – ордината лінійної епюри (рис. 3.20г) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничного моменту) балки, розташована під центром ваги нелінійної епюри

$$\overline{M}_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3};$$

I_X – осьовий момент інерції поперечного перетину, для двотавра № 16

$$I_X = 873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

E – модуль пружності, для сталі

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа.}$$

Отже, кут повороту перетину B у числовому вигляді

$$\Theta_B = \frac{4F \cdot \frac{1}{3}}{E \cdot I_X} = \frac{4F}{3E \cdot I_X} = 6,03 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Визначаємо силу F , від якої опорний перетин B деформується на $\Theta_B = 6,03 \cdot 10^{-3}$ рад

$$F = \frac{6,03 \cdot 10^{-3} \cdot 3 E \cdot I_X}{4} = \frac{6,03 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 873 \cdot 10^{-8}}{4} = 7,896 \text{ кН.}$$

Максимальні нормальні напруження виникають над опорою K (рис. 3.20б), де діє максимальний згинальний момент $M_{3\Gamma \max} = 2F$ і дорівнюють

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W_X} = \frac{2 \cdot F}{W_X} = \frac{2 \cdot 7,896}{109 \cdot 10^{-6}} = 145 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 145 \text{ МПа.}$$

Для визначення прогину т. C будемо епюру згинальних моментів $\overline{\overline{M}}$ від одиничної сили, прикладеної в т. C (рис. 3.20д, е). Епюру від зовнішніх навантажень, тобто від сили F (рис. 3.20б), для зручності, перенесемо нижче епюри $\overline{\overline{M}}$. Це буде рисунок 3.20ж.

Прогин т. C дорівнює:

$$y_C = -\frac{1}{E \cdot I_X} \left(\omega_2 \cdot \overline{\overline{M}}_2 + \omega_3 \cdot \overline{\overline{M}}_3 + \omega_4 \cdot \overline{\overline{M}}_4 \right) = -\frac{1}{E \cdot I_X} \left(F \cdot \frac{2}{3} + 2F \cdot \frac{1}{2} + F \cdot \frac{1}{3} \right),$$

де $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ – площі епюри (рис. 3.20ж) згинальних моментів $M(F)$ від зовнішнього навантаження балки,

$$\omega_2 = \omega_4 = \frac{1}{2} \cdot F \cdot 2 = F; \quad \omega_3 = 2F;$$

$\overline{\overline{M}}_2, \overline{\overline{M}}_3, \overline{\overline{M}}_4$ – ординати лінійної епюри (рис. 3.20е) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничного моменту) балки, розташовані під центром ваги нелінійної епюри,

$$\overline{\overline{M}}_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}; \quad \overline{\overline{M}}_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2};$$

$$\overline{\overline{M}}_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Отже, прогин т. C дорівнює

$$y_C = -\frac{2F}{E \cdot I_X} = -\frac{2 \cdot 7,896}{2 \cdot 10^8 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -9,045 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -9,045 \text{ мм.}$$

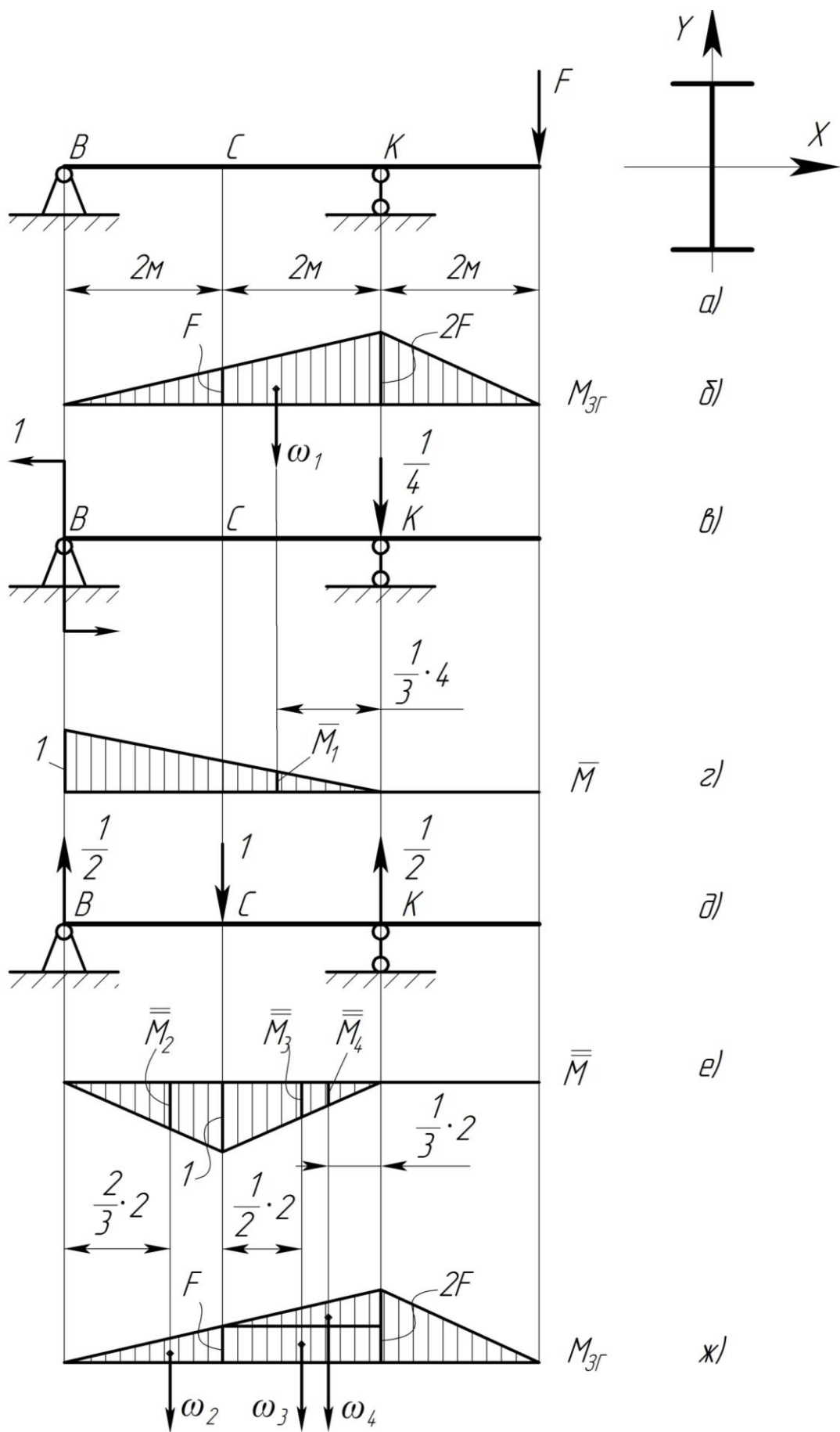


Рисунок 3.20

Приклад 3.11. Задана консольна балка (рис. 3.21) постійної жорсткості $E \cdot I$, навантажено силою F і розподіленим за лінійним законом навантаженням $q(x)$. Визначити при якому значенні сили F прогин точки B буде дорівнювати нулю.

Розв'язування

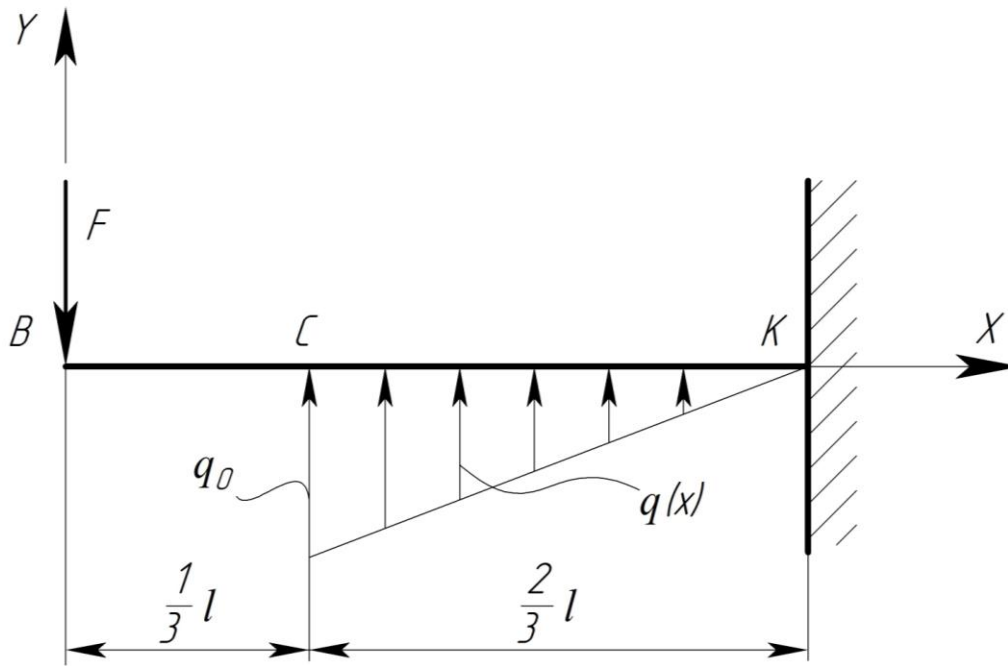


Рисунок 3.21

Запишемо рівняння зігнутої осі балки та кутів повороту використовуючи метод початкових параметрів. Початок координат вибираємо у точці B :

$$E \cdot I \cdot y(x) = E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot x - \frac{F \cdot x^3}{6} + k \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^5}{120};$$

$$E \cdot I \cdot \Theta(x) = E \cdot I \cdot \Theta_0 - \frac{F \cdot x^2}{2} + k \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^4}{24},$$

де y_0, Θ_0 – прогин та кут повороту поперечного перетину на початку координат балки;

k – коефіцієнт,

$$k = \frac{q}{l - \frac{l}{3}} = \frac{3q}{2l}.$$

Враховуючи величину коефіцієнта k , отримаємо рівня у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 E \cdot I \cdot y(x) &= E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot x - \frac{F \cdot x^3}{6} + \frac{3q}{2l} \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^5}{120} = \\
 &= E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot x - \frac{F \cdot x^3}{6} + \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{3}\right)^5}{80}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot I \cdot \Theta(x) &= E \cdot I \cdot \Theta_0 - \frac{F \cdot x^2}{2} + \frac{3q}{2l} \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^4}{24} = \\
 &= E \cdot I \cdot \theta_0 - \frac{F \cdot x^2}{2} + \frac{q}{l} \cdot \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^4}{16}.
 \end{aligned}$$

Визначаємо початкові параметри з граничних умов:

$$E \cdot I \cdot y(x=l) = 0; \quad E \cdot I \cdot \Theta(x=l) = 0.$$

З врахуванням початкових параметрів рівняння зігнутої осі балки (3.16) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot l - \frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{q}{l} \cdot \frac{\left(l - \frac{l}{3}\right)^5}{80} &= \\
 = E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot l - \frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{q}{l} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}l\right)^5}{80} &= \\
 = E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \Theta_0 \cdot l - \frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{q \cdot l^4}{607,5} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
E \cdot I \cdot \Theta_0 - \frac{F \cdot l^2}{2} + \frac{q}{l} \cdot \frac{\left(l - \frac{l}{3}\right)^4}{16} &= E \cdot I \cdot \Theta_0 - \frac{F \cdot l^2}{2} + \frac{q}{l} \cdot \frac{\left(\frac{2l}{3}\right)^4}{16} = \\
&= E \cdot I \cdot \Theta_0 - \frac{F \cdot l^2}{2} + \frac{q \cdot l^4 \cdot 16}{l \cdot 81 \cdot 16} = E \cdot I \cdot \Theta_0 - \frac{F \cdot l^2}{2} + \frac{q \cdot l^3}{81} = 0. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

З рівняння (3.18) визначимо

$$E \cdot I \cdot \Theta_0 = \frac{F \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{81}. \quad (3.19)$$

Підставивши (3.19) у рівняння (3.17), отримаємо

$$E \cdot I \cdot y_0 + \left(\frac{F \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{81}\right) \cdot l - \frac{F \cdot l^3}{6} + \frac{q \cdot l^4}{607,5} = 0. \quad (3.20)$$

З (3.20) визначимо

$$\begin{aligned}
E \cdot I \cdot y_0 &= -\left(\frac{F \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{81}\right) \cdot l + \frac{F \cdot l^3}{6} - \frac{q \cdot l^4}{607,5} = -\frac{F \cdot l^3}{2} + \frac{q \cdot l^4}{81} + \frac{F \cdot l^3}{6} - \frac{q \cdot l^4}{607,5} = \\
&= -\frac{2F \cdot l^3}{6} + 0,012345 \left(q \cdot l^4\right) - 0,0016460 \left(q \cdot l^4\right) = \\
&= -\frac{2F \cdot l^3}{6} + 0,010698 \left(q \cdot l^4\right). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Підставимо (3.19) і (3.21) у (3.16). Отримаємо рівняння зігнутої осі балки

$$EIy(x) = \left(-\frac{2F \cdot l^3}{6} + 0,010698 \left(q \cdot l^4\right)\right) + \left(\frac{F \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{81}\right) \cdot x - \frac{F \cdot x^3}{6} + k \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^5}{120}.$$

Визначимо значення сили F при якому прогин точки B , $x_B = 0$, дорівнює нулю

$$-\frac{2F \cdot l^3}{6} + 0,010698 \left(q \cdot l^4\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$F = \frac{6 \cdot 0,010698 \left(q \cdot l^4\right)}{l^3 \cdot 2} = 0,0321 \ q \cdot l.$$

Приклад 3.12. Дві полоси (рис. 3.22а, б, в) з'єднані накладкою (зварка). Порівняти вертикальні переміщення перетину C для двох варіантів навантаження (рис. 3.22а, б).

Розв'язування

Для першого варіанту навантаження (рис. 3.22а), стик з'єднання закритий і на проміжку, де змонтовано накладку, згинальна жорсткість полоси становить $E \cdot I_2$, решту довжини має жорсткість $E \cdot I_1$ (рис. 3.22г).

Для другого варіанту навантаження (рис. 3.22б) стик з'єднання розкритий і згинальна жорсткість полоси по всій довжині становитиме $E \cdot I_1$ (рис. 3.22е).

Прогин перетину C визначаємо, використовуючи графоаналітичний метод Мора.

Для першої схеми навантаження (див. рис. 3.22а) і для другої схеми навантаження див. рис. 3.22б) будуємо епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження (рис. 3.22д) і (рис. 3.22ж) відповідно.

Перетин C навантажимо одиничною силою (рис. 3.22з). побудуємо епюри згинальних моментів від одиничної сили (рис. 3.22к).

Для першого варіанту навантаження (див. рис. 3.22а) використаємо схеми, зображені на рисунку 3.22г, д, з, к. Прогин перетину C_1

$$y_{C_1} = \frac{\omega_1 \cdot \overline{M_1}}{E \cdot I_1} + \frac{\omega_2 \cdot \overline{M_2}}{E \cdot I_2} + \frac{\omega_3 \cdot \overline{M_3}}{E \cdot I_3}. \quad (3.22)$$

Для другого варіанту навантаження (див. рис. 3.22б) використаємо схеми, зображені на рисунку 3. 22б, е, ж, з, к. Прогин перетину C_2

$$y_{C_2} = - \frac{\omega_0 \cdot \overline{M_0}}{E \cdot I_1}. \quad (3.23)$$

Визначаємо величини, які входять у формули (3.22) і (3.23):

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – площі епюри (див. рис. 3.22д) згинальних моментів M (M) від зовнішнього навантаження балки (див. рис. 3.22а),

$$\omega_1 = M \cdot 2,5a; \quad \omega_2 = M \cdot a; \quad \omega_3 = M \cdot 2,5a;$$

ω_0 – площа епюри (див. рис. 3.22ж) згинальних моментів M (M) від зовнішнього навантаження балки (див. рис. 3.22б),

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 6Ma ;$$

$\overline{M_1}, \overline{M_2}, \overline{M_3}, \overline{M_0}$ – ординати лінійної епюри (рис. 3.22к) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничної сили) балки (див. рис. 3.22з), розташовані під центром ваги нелінійної епюри

$$\overline{M_1} = 1,25 a ; \quad \overline{M_2} = 3 a ; \quad \overline{M_3} = 4,75 a ; \quad \overline{M_0} = 3 a ;$$

I_1, I_2 – осьові моменти інерції поперечних перетинів полоси для різних ділянок зварного з'єднання (рис. 3.22а, б);

$$I_1 = \frac{b \cdot h^3}{12} ; \quad I_2 = \frac{b (2h)^3}{12} = \frac{b \cdot 8h^3}{12} = \frac{b \cdot 2h^3}{3} .$$

E – модуль пружності, для сталі

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа} .$$

Підставляємо отримані результати у формули (3.22) і (3.23)

$$\begin{aligned} y_{C_1} &= \frac{1,25 M \cdot a \cdot 2,5 a}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} + \frac{M \cdot a \cdot 3 a}{4 E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} + \frac{2,5 M \cdot a \cdot 4,75 a}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \\ &= \frac{M \cdot a^2}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} (3,125 + 0,75 + 11,875) = \frac{15,75 M \cdot a^2}{E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} ; \end{aligned}$$

$$y_{C_2} = - \frac{6 M \cdot a \cdot 3 a}{E \cdot I_1} = - \frac{18 M \cdot a^2}{E \cdot I_1} .$$

Прогин за модулем для другому варіанту з'єднання (див. рис. 3.22б); більший за прогин для першого варіанту з'єднання (див. рис. 3.22а).

$$\frac{[y_{C_2}]}{[y_{C_1}]} = \frac{18}{15,75} = 1,143 \text{ рази} .$$

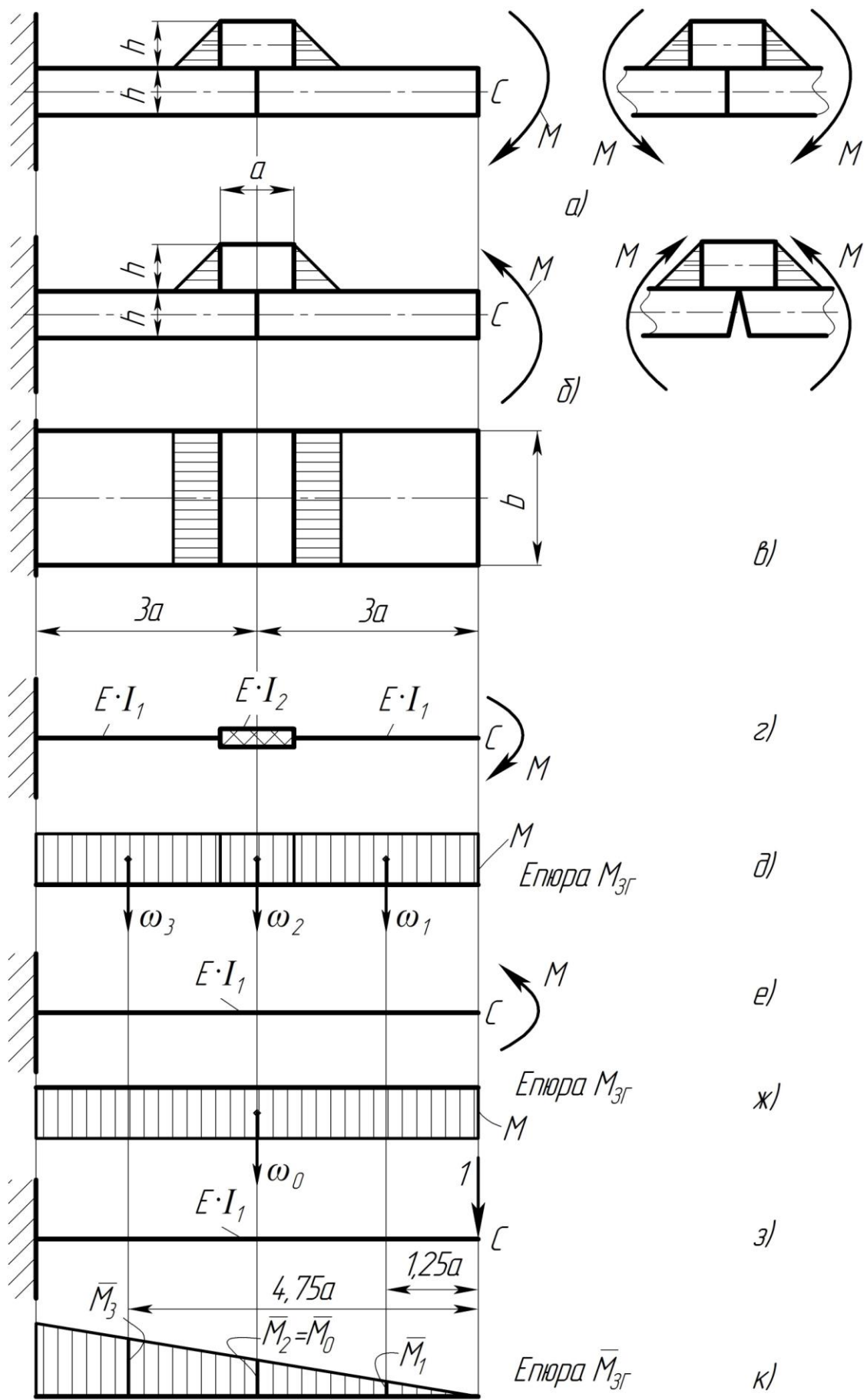


Рисунок 3.22

Приклад 3.13. Ламаний стержень (рис. 3.23а) навантажений у перетині B силою F , розташованою під кутом α до вертикалі. Визначити під яким кутом необхідно розташувати лінію дії сили, щоб перетин C не повертався і горизонтально не переміщався.

Розв'язування

Для визначення переміщень при згині використаємо графоаналітичний метод Мора. Будуємо епюри згинальних моментів (рис. 3.23б, в) від вертикальної та горизонтальної складових зовнішньої сили F прикладених у перетині B .

Щоб визначити кут повороту в перетині C прикладаємо одиничний момент і будуємо епюру згинальних моментів від нього (рис. 3.23г).

Визначаємо кут повороту перетину C

$$\Theta_C = -\frac{1}{E \cdot I_0} (\omega_1 \cdot \overline{M}_1 + \omega_2 \cdot \overline{M}_2),$$

де ω_1, ω_2 – площі епюр (див. рис. 3.23б, в) згинальних моментів $M(F)$ від зовнішнього навантаження балки (див. рис. 3.23а),

$$\omega_1 = F \cdot a \cdot \cos \alpha \cdot 2a = 2a^2 \cdot F \cdot \cos \alpha;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} F \cdot a \cdot \sin \alpha \cdot 2a = 2a^2 \cdot F \cdot \sin \alpha;$$

$\overline{M}_1, \overline{M}_2$ – ординати лінійної епюри (рис. 3.23г) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничного моменту) рами (див. рис. 3.23г), розташовані під центром ваги нелінійних епюр

$$\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = 1;$$

I_0 – осьовий моменти інерції поперечних перетинів рами (рис. 3.23а).

Підставивши значення, отримаємо

$$\Theta_C = -\frac{2a^2 \cdot F}{E \cdot I_0} (\cos \alpha + \sin \alpha).$$

Кут α визначимо з рівняння $\Theta_C = 0$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = 0 ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 ;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} (-1) = -45^\circ + \pi .$$

Для визначення горизонтального переміщення перетину C будемо епюру згинальних моментів від одиничної сили, горизонтально прикладеної в точці C (рис. 3.23д).

$$f_C^{zop} = -\frac{1}{EI_0} (\omega_1 \cdot \overline{M}_{11} + \omega_2 \cdot \overline{M}_{22}) ,$$

де \overline{M}_{11} , \overline{M}_{22} – ординати лінійної епюри (рис. 3.23д) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничної сили) рами (див. рис. 3.23д), розташовані під центром ваги нелінійних епюр

$$\overline{M}_{11} = a ; \quad \overline{M}_{22} = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4}{3} a .$$

$$f_C^{zop} = -\frac{2a^3 \cdot F}{E \cdot I_0} \left(\cos \alpha + \frac{4}{3} \sin \alpha \right) .$$

Кут α знаходимо з рівності $f_C^{zop} = 0$

$$\cos \alpha + \frac{4}{3} \sin \alpha = 0 ;$$

$$\frac{4}{3} \operatorname{tg} \alpha = -1, \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} ;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) = -37^\circ + \pi .$$

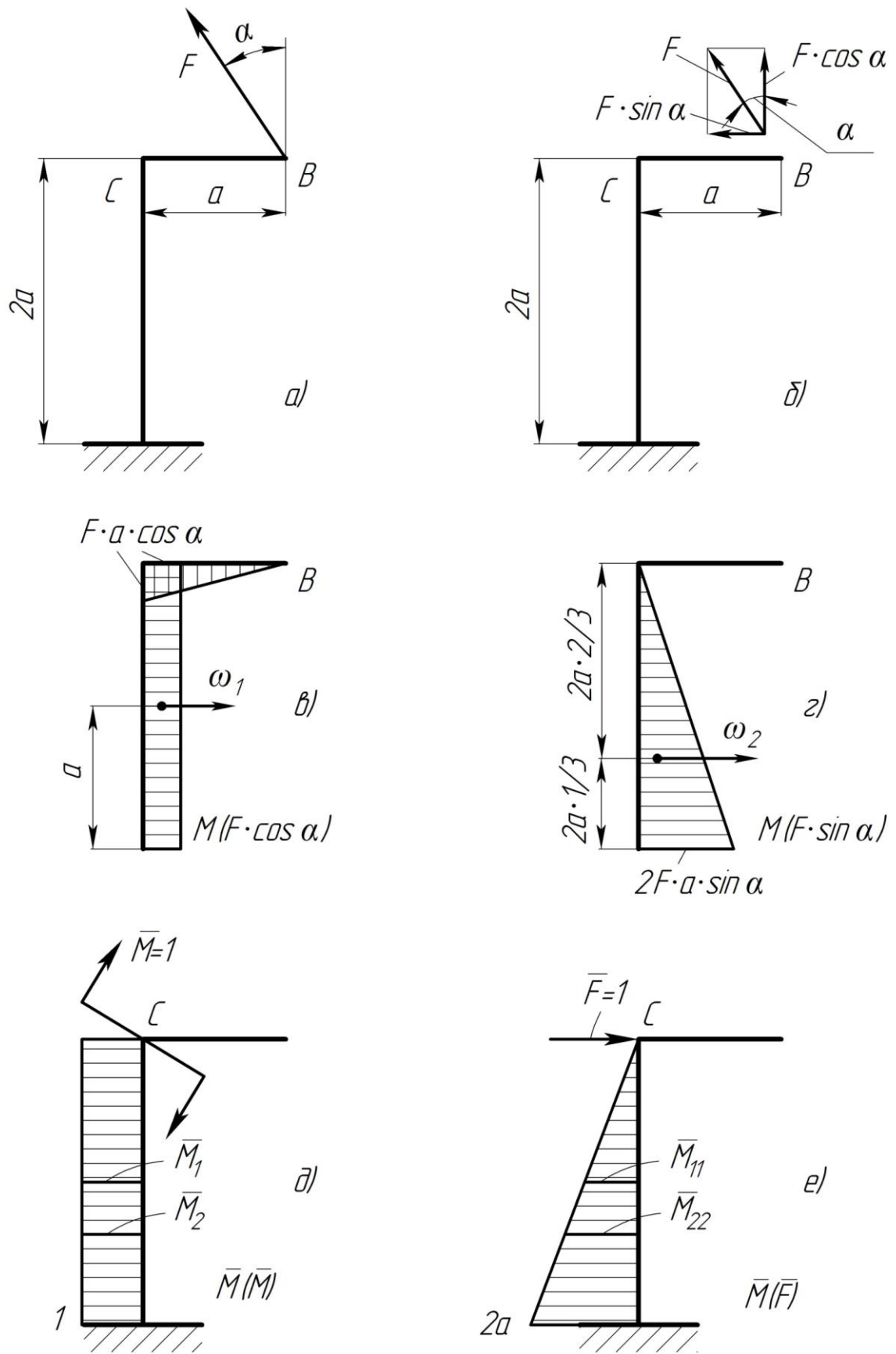


Рисунок 3.23

Приклад 3.14. Раму (рис. 3.24а) з рівномірно розподіленим навантаженням q довантажують зосередженою парою сил M так, що опора B повністю розвантажується. Визначити, на яку відстань зміститься опора B після прикладання зосередженої пари сил.

Розв'язування

Визначимо, використовуючи графоаналітичний метод Мора, вертикальні переміщення перетину B від:

- розподіленого навантаження q (рис. 3.24б, з)

$$f_B^{верт}(q) = -\frac{\omega_1 \cdot \overline{M_1}}{E \cdot I} - \frac{\omega_2 \cdot \overline{M_2}}{4 E \cdot I} = -\frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 2}{4} \right) = -\frac{3 q \cdot l^4}{E \cdot I},$$

ω_1, ω_2 – площі епюри (див. рис. 3.24б) згинальних моментів $M(q)$ рами від зовнішнього розподіленого навантаження q (рис. 3.24а),

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 l \cdot 2 q \cdot l^2 = \frac{4}{3} q \cdot l^3;$$

$$\omega_2 = 2 q \cdot l^2 \cdot l = 2 q \cdot l^3;$$

$\overline{M_1}, \overline{M_2}$ – ординати лінійної епюри (рис. 3.24з) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничної сили) прикладеної до рами у перетині B , розташованій під центром ваги нелінійної епюри (див. рис. 3.24б),

$$\overline{M_1} = \frac{3}{4} \cdot 2 l \cdot 1 = \frac{3}{2} l; \quad \overline{M_2} = 2 l;$$

I – осьовий момент інерції поперечного перетину ділянок рами;

E – модуль пружності матеріалу рами (сталь)

- зосередженої пари сил M (рис. 3.24в, з)

$$f_B^{верт}(M) = \frac{\omega_3 \cdot \overline{M_3}}{E \cdot I} + \frac{\omega_4 \cdot \overline{M_4}}{4 E \cdot I} = \frac{M \cdot l^2}{E \cdot I} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} \right) = \frac{2 M \cdot l^2}{E \cdot I},$$

ω_3, ω_4 – площі епюри (див. рис. 3.24в) згинальних моментів M (М) рами від зовнішнього навантаження – зосередженої пари сил M (див. рис. 3.24а),

$$\omega_3 = M \cdot l; \quad \omega_4 = M \cdot l;$$

$\overline{M}_3, \overline{M}_4$ – ординати лінійної епюри (рис. 3.24г) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничної сили) прикладеної до рами у перетині B розташованій під центром ваги нелінійної епюри (див. рис. 3.24в)

$$\overline{M}_3 = \left(l + \frac{l}{2} \right) \cdot 1 = \frac{3}{2} l; \quad \overline{M}_4 = 2 l.$$

З умови задачі

$$f_B^{верт} (q) + f_B^{верт} (M) = 0,$$

або

$$3 q \cdot l^4 + 2 M \cdot l^2 = 0.$$

Визначимо значення зосередженої пари сил

$$M = \frac{3}{2} q \cdot l^2.$$

Опора B переміщається лише в горизонтальному напрямку. Визначимо переміщення опори B від зосередженої пари сил (рис. 3.24в, д)

$$f_B^{гор} (M) = \frac{\omega_4 \cdot \overline{M}_5}{E \cdot I} = \frac{M \cdot l \cdot l}{2 E \cdot I} = \frac{M \cdot l^2}{2 E \cdot I},$$

\overline{M}_5 – ордината лінійної епюри (рис. 3.24д) згинальних моментів від одиничного навантаження (одиничної сили) прикладеної до рами у перетині B розташованій під центром ваги нелінійної епюри (див. рис. 3.24в).

$$\overline{M}_5 = \frac{l}{2}.$$

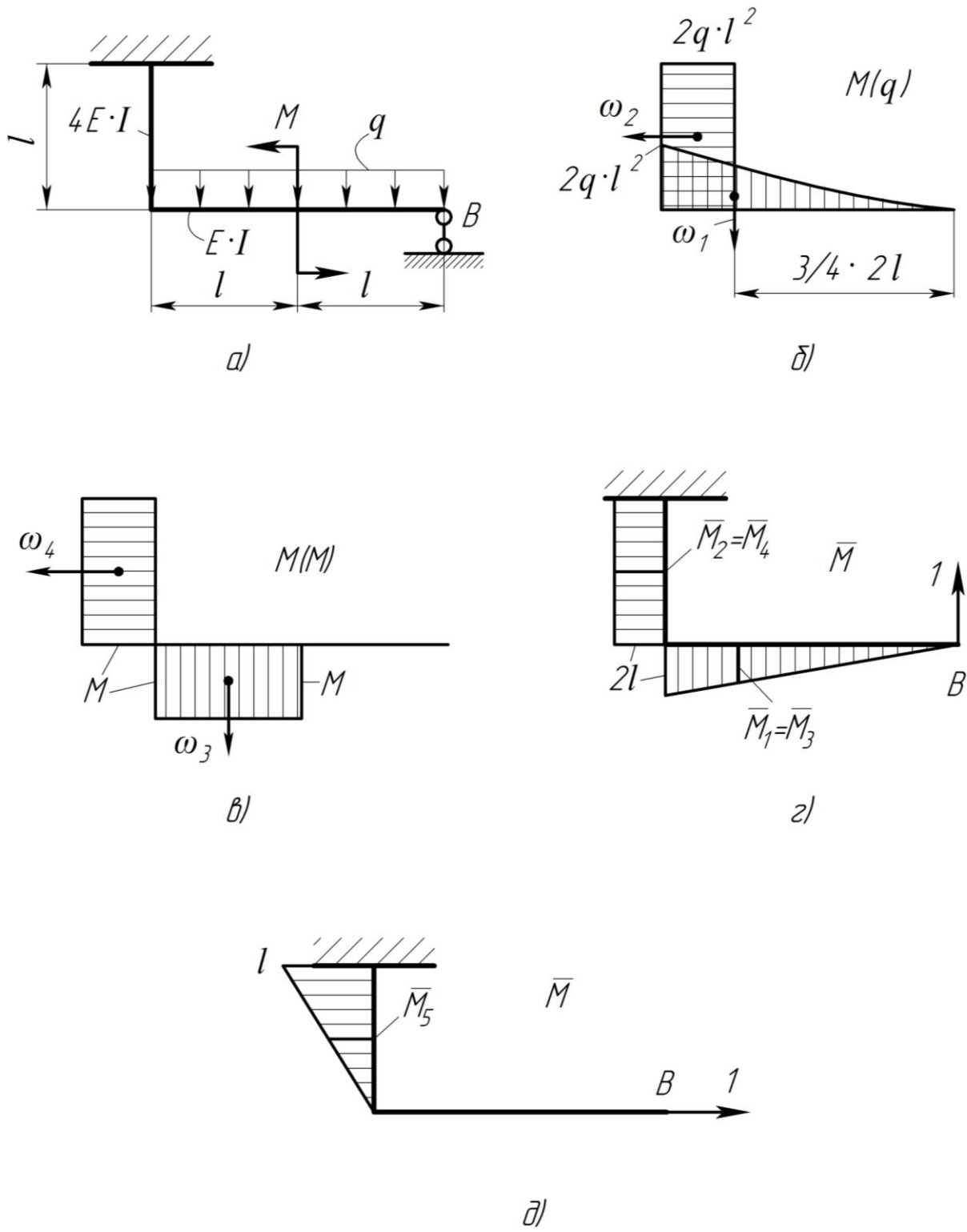


Рисунок 3.24

Приклад 3.15. Шарнірно закріплена балка (рис. 3.25) довжиною l квадратного поперечного перетину зі стороною a з'єднана у середині прольоту з тягою довжиною l квадратного поперечного перетину зі стороною $2a$. Яку осадку має отримати опора C , щоб точка B опустилась на величину Δ , якщо балка та тяга виготовленні з однакового матеріалу з модулем пружності E . Довжина балки та тяги $l = 10a$.

Розв'язування

Стержень 1 (див. рис. 3.25) сприймає деформацію згину.
Вертикальне переміщення балки в точці B дорівнює

$$\Delta = \frac{F \cdot l^3}{48 E \cdot I_1} = \frac{F \cdot l^3}{4 \cdot E \cdot a^4},$$

де I_1 – осьовий момент інерції поперечного перетину стержня 1 , $I_1 = \frac{a^4}{12}$.

Визначимо силу F прикладену в точці B , яка спричинить переміщення Δ :

$$F = \frac{4 E \cdot a^4 \cdot \Delta}{l^3} = \frac{4 E \cdot a^4 \cdot \Delta}{(10 a)^3} = \frac{E \cdot a \cdot \Delta}{250}.$$

Тяга 2 (див. рис. 3.25) сприймає деформацію розтягу від дії сили F .
Визначимо видовження стержня 2

$$\Delta_F = \frac{F \cdot l}{E \cdot A_2} = \frac{E \cdot a \cdot \Delta \cdot 10 a}{250 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot E \cdot a} = \Delta,$$

де A_2 – площа поперечного перетину стержня 2 ,

$$A_2 = (0,2 a)^2 = 4 \cdot 10^{-2} \cdot a^2.$$

Осадка опори C дорівнює

$$\Delta_C = \Delta + \Delta_F = \Delta + \Delta = 2\Delta.$$

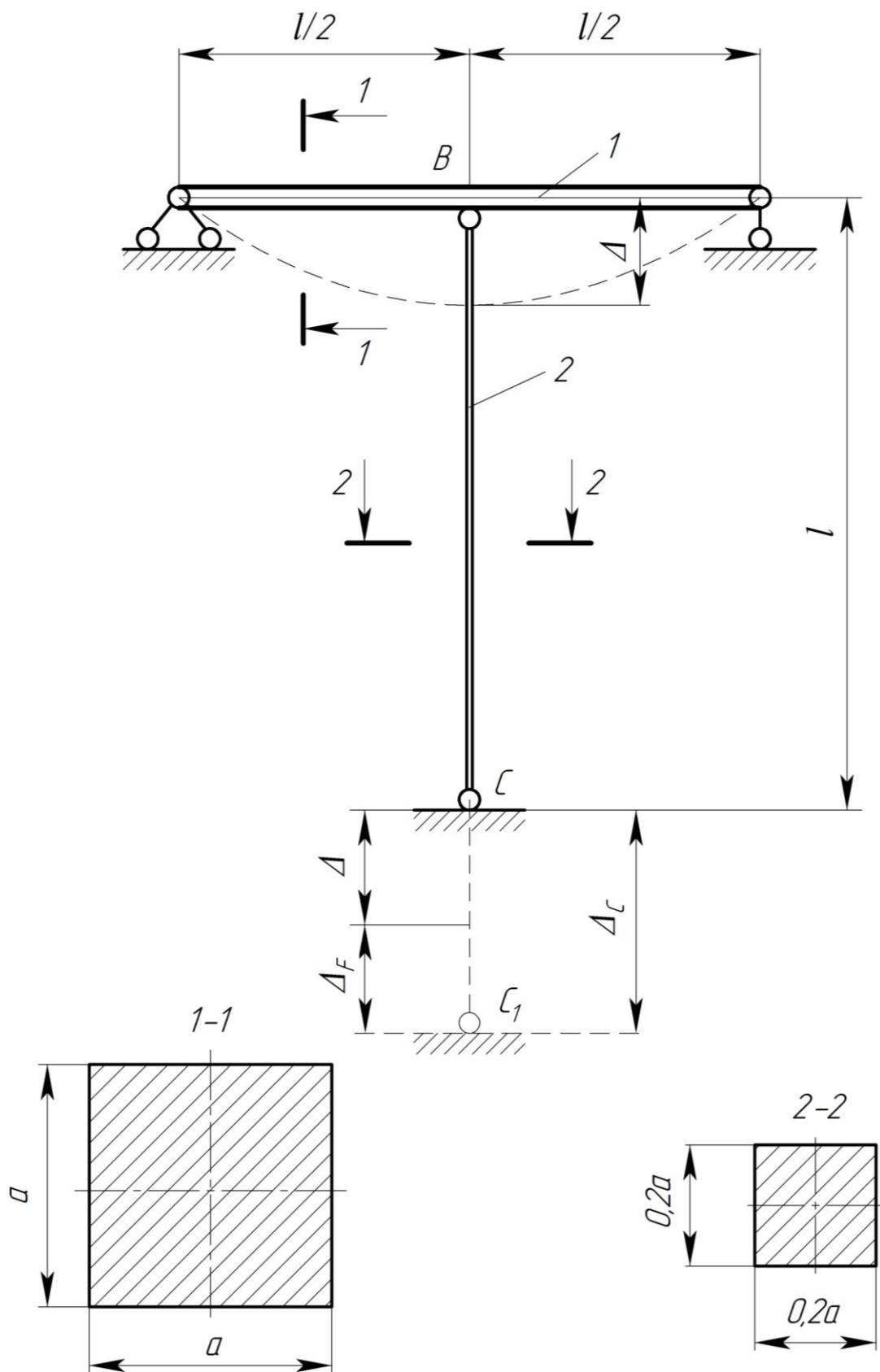
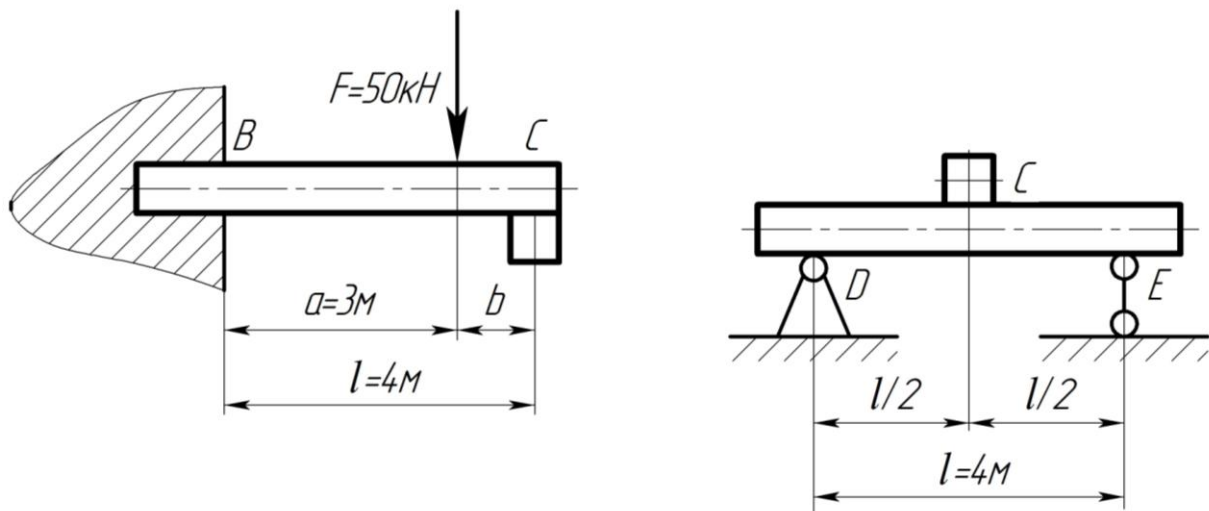


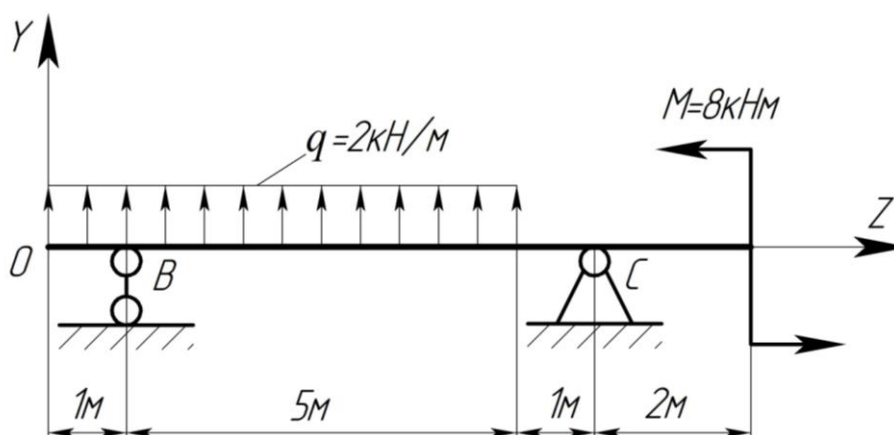
Рисунок 3.25

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

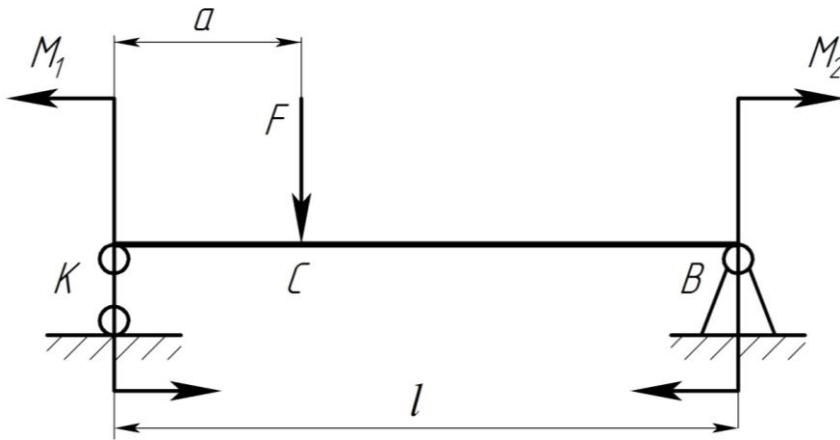
Задача 3.10. Балка BC кінцем B защемлена, а кінцем C опирається на середину прольоту шарнірно-закріпленої на кінцях балки DE , яка має такий же поперечний перетин, як балка BC . Визначити реакції опор балки DE .



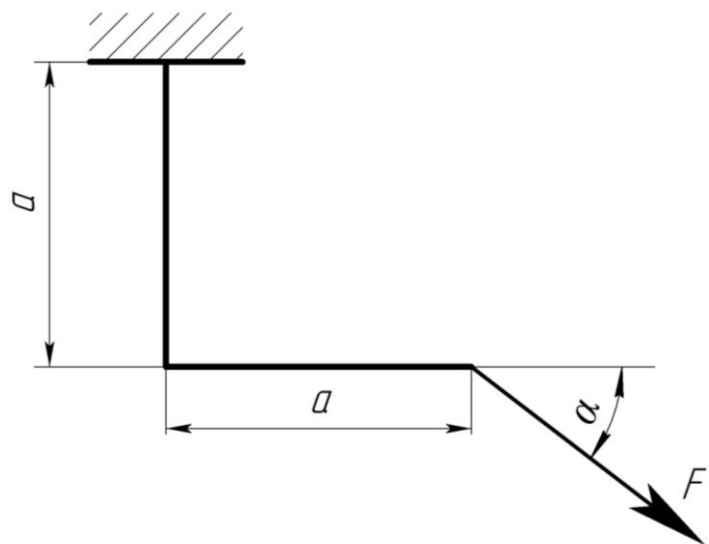
Задача 3.11. Для заданої балки підібрати круглий поперечний перетин, якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити прогин у перетинах з координатами $z=0$, $z=6$ м, $z=9$ м. Побудувати зігнуту вісь балки.



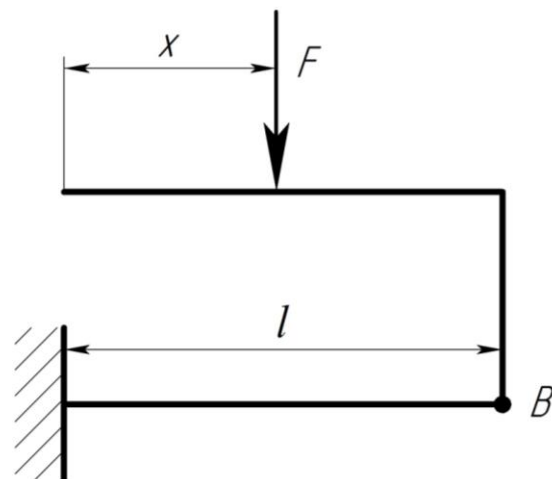
Задача 3.12. Для заданої балки знайти такі моменти M_1 і M_2 при яких прогин і кут повороту поперечного перетину у точці C дорівнюватимуть нулю. Жорсткість балки $E \cdot I = const$, сила F та розміри a, l - відомі.



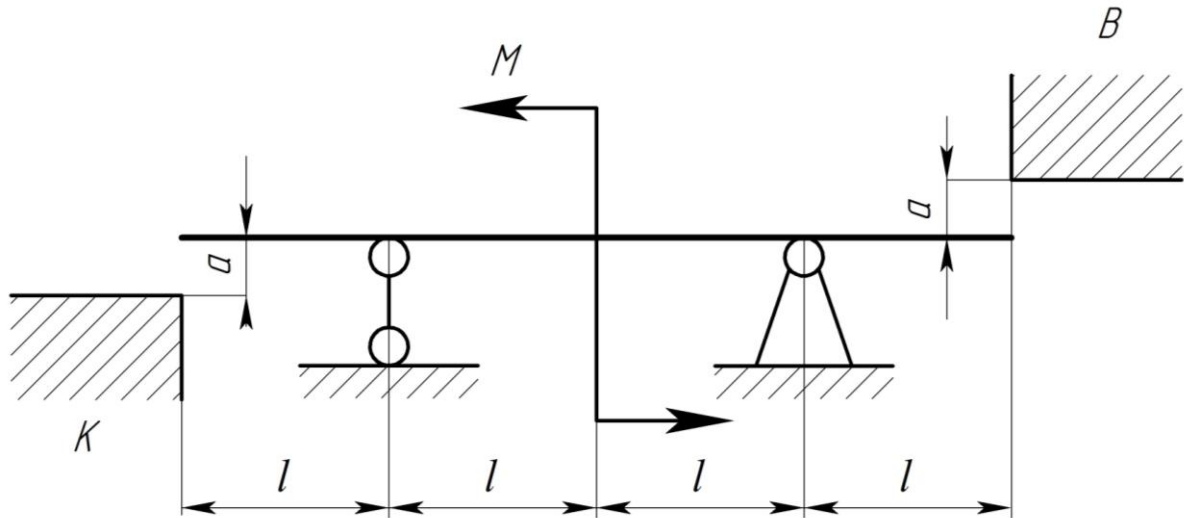
Задача 3.13. При якому куті α вільний кінець стержня буде переміщатися тільки вертикально? При якому куті α нормальні напруження в стержні будуть максимальними?



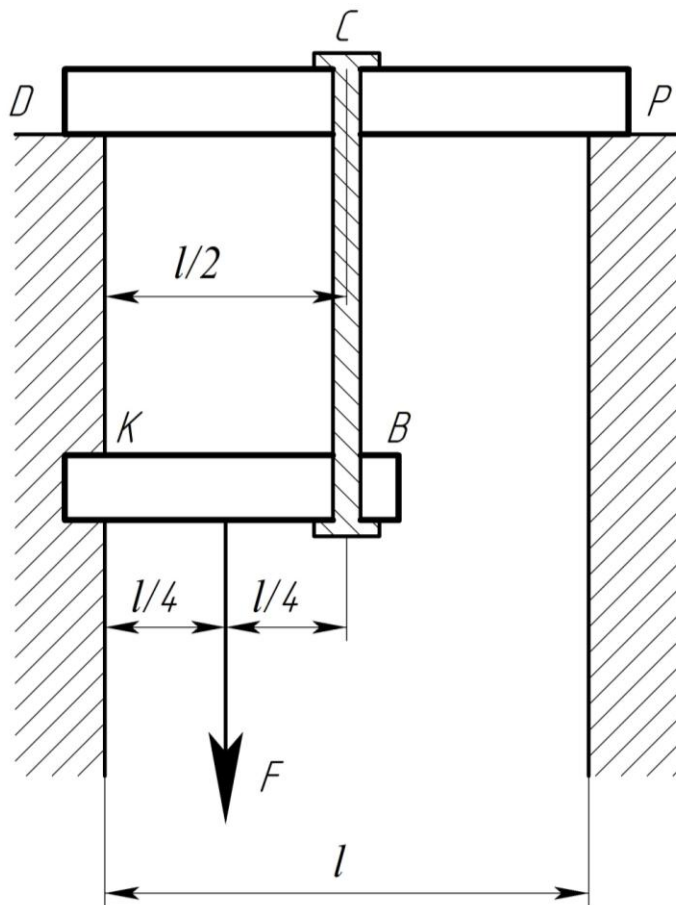
Задача 3.14. На якій відстані x від торця стержня слід прикласти силу F , щоб переміщення точки B дорівнювало нулю.



Задача 3.15. Задана балка на шарнірних опорах. Довжина $l=400$ мм, осьовий момент інерції поперечного перетину $I_X = 20 \cdot 10^{-8}$ м⁴, модуль пружності матеріалу $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Балка навантажена згинальним моментом M . При якому значенні M кінці балки будуть торкатися опор B і K , якщо початковий зазор $a=10$ мм.



Задача 3.16. Балка KB кінцем K защемлена у стіну, а другим кінцем B тягою BC прикріплена до балки DP , яка вільно лежить на двох опорах. Знайти силу у стержні BC , якщо жорсткості балок рівні, стержень BC вважати абсолютно жорстким.



4. КРИВІ БРУСИ

Криві бруси – це бруси, які мають криволінійну вісь. У поперечному перетині кривого бруса виникають три внутрішніх силових фактори:

M – згинальний момент;

N – нормальна сила;

Q – поперечна сила.

Для запису загальних виразів внутрішніх силових факторів і побудови епюр існує таке **правило знаків**: додатні напрямки вибираємо, залежно від запису виразів зліва чи справа (рис. 4.1).

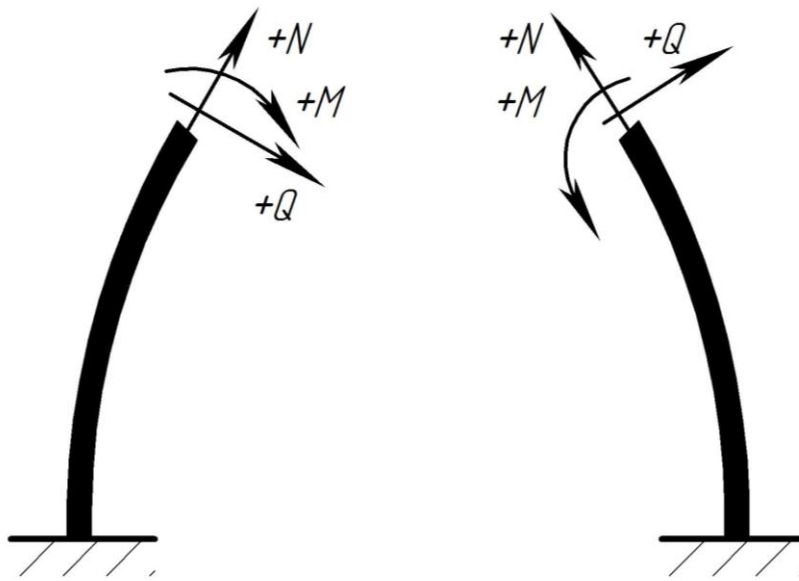


Рисунок 4.1

Криві бруси поділяють на криві бруси великої і малої кривизни. Цей поділ має суттєве значення для визначення нормальних напружень від згинального моменту.

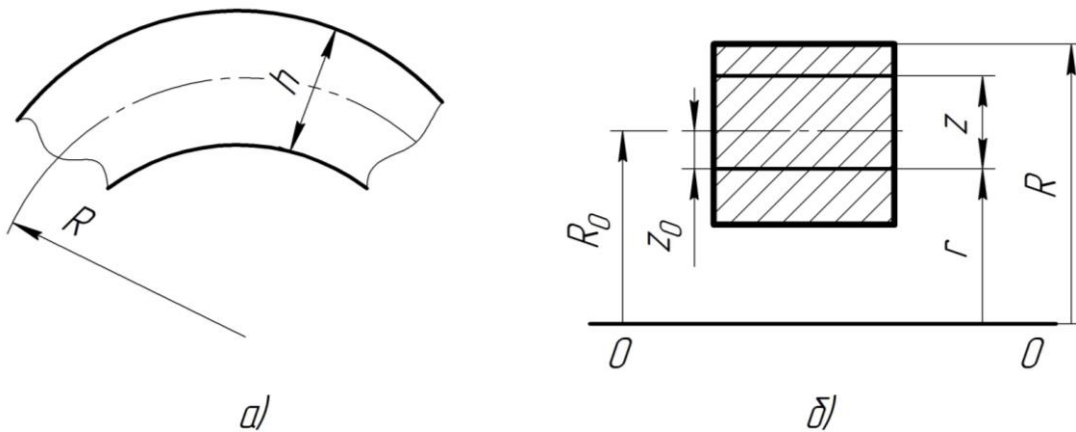


Рисунок 4.2

При відношенні $\frac{R_0}{h} \geq 5$ (рис. 4.2а), вважають, що *брус малої кривизни* і для *визначення нормальних напружень* використовують формулу, що і для балок при прямому поперечному згині з прямою віссю, тобто

$$\sigma = \frac{M}{I_0} \cdot y. \quad (4.1)$$

Для *брусів великої кривизни* $\frac{R_0}{h} < 5$ (рис. 4.2б) *нормальні напруження* від згинального моменту визначають за формулою

$$\sigma(M) = \frac{M}{S} \cdot \frac{Z}{R}, \quad (4.2)$$

де M – згинальний момент;

R – радіус шару, в якому визначають напруження;

Z – відстань від нейтрального шару до шару, в якому визначають напруження;

S – статичний момент площі поперечного перетину відносно нейтрального шару, $S = F \cdot Z_0$; $Z_0 = R_0 - r$;

R_0 – радіус кривизни центрального шару;

A – площа поперечного перетину стержня;

r – радіус нейтрального шару, який визначають за формулою

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}. \quad (4.3)$$

Відстань між центральним і нейтральним шарами приблизно можна визначити за формулою Давиденкова-Янушевича

$$Z_0 \approx \frac{I_0}{R_0 \cdot A}, \quad (4.4)$$

де I_0 – осьовий момент інерції поперечного перетину стержня відносно головної осі, перпендикулярної силовій площині.

Напруження від нормальної сили визначають за формулою

$$\sigma(N) = \frac{N}{A}. \quad (4.5)$$

Сумарні нормальні напруження визначають алгебраїчним додаванням

$$\sigma = \sigma(M) + \sigma(N). \quad (4.6)$$

Дотичні напруження, що виникають від поперечних сил, визначають за формулою Журавського

$$\tau = \frac{Q \cdot S_0}{b \cdot I_0}. \quad (4.7)$$

При визначенні переміщень у кривих брусах використовують тільки метод Мора.

Функції згинальних моментів для кривих брусів необхідно записувати в полярних координатах.

ПРИКЛАДИ

Приклад 4.1. Для заданого криволінійного бруса (рис. 4.3а) побудувати епюри поперечних і осьових сил, згинальних моментів, якщо $R_0 = 3$ м, $F_1 = 20$ кН, $F_2 = 40$ кН, $M = 60$ кНм. Підібрати розміри поперечного перетину стержня, а саме, діаметр. Матеріал бруса – сталь, $[\sigma] = 160$ МПа ; $E \cdot I = \text{const}$.

Розв'язування

Розбиваємо брус на дві ділянки (рис. 4.3б,в).

Для кожної ділянки записуємо вирази функцій осьових сил $N(\varphi)$, поперечних сил $Q(\varphi)$ та згинальних моментів $M_{3\Gamma}(\varphi)$ у загальному вигляді, використовуючи полярні координати.

При запису функцій внутрішніх силових факторів $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M_{3\Gamma}(\varphi)$ використовуємо відповідне «правило знаків» (див. рис. 4.1). Функції внутрішніх силових факторів записуємо йдучи з вільного кінця бруса.

Перша ділянка (рис. 4.3б): $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

$$N(\varphi) = F_2 \cdot \sin \varphi = 40 \cdot \sin \varphi ;$$

$$Q(\varphi) = -F_2 \cdot \cos \varphi = -40 \cdot \cos \varphi ;$$

$$M_{3\Gamma}(\varphi) = -F_2 \cdot h_1 = -F_2 \cdot R_0 \cdot \sin \varphi = -40 \cdot 3 \cdot \sin \varphi = -120 \cdot \sin \varphi ,$$

де $h_1 = R_0 \cdot \sin \varphi$.

Друга ділянка (рис. 4.3в): $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$, $\Theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Вирази внутрішніх силових факторів від зовнішньої сили F_2 без жодних змін входять у вирази $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M_{3\Gamma}(\varphi)$ цієї ділянки:

$$N(\varphi) = F_2 \cdot \sin \varphi + F_1 \cdot \cos \Theta = 40 \cdot \sin \varphi + 20 \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$Q(\varphi) = -F_2 \cdot \cos \varphi + F_1 \cdot \sin \Theta = -40 \cdot \cos \varphi + 20 \cdot \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} M_{3\Gamma}(\varphi) &= -F_2 \cdot R_0 \cdot \sin \varphi + F_1 \cdot h_2 + M = \\ &= -40 \cdot 3 \cdot \sin \varphi + 20 \cdot 3 \cdot \left[1 - \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 60 = \\ &= -120 \cdot \sin \varphi + 60 \left[1 - \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 60, \end{aligned}$$

$$\text{де } h_2 = R_0 - R_0 \cdot \cos \Theta = R \left[1 - \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Визначаємо значення внутрішніх силових факторів через кожні 30°. Результати вносимо у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1 – Значення внутрішніх силових факторів

Функція	Перша ділянка				Друга ділянка			
φ , град	0	30	60	90	90	120	150	180
$N(\varphi)$, кН	0	20	34,6	40	60	52	30	20
$Q(\varphi)$, кН	-40	-34,6	-20	0	0	30	52	60
$M_{3\Gamma}(\varphi)$, кНм	0	-60	-104	-120	-60	-35,9	30	120

За отриманими результатами будуюмо епюри $N(\varphi)$ (рис. 4.4з), $Q(\varphi)$ (рис. 4.4д), $M_{3\Gamma}(\varphi)$ (рис. 4.4е).

Визначаємо небезпечний перетин бруса – це перетин, де діє $M_{3\Gamma \max} = 120$ кНм.

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{W_0} = \frac{32 M_{3\Gamma \max}}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

визначаємо діаметр бруса

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 120 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 160}} = 0,197 \text{ м} = 197 \text{ мм},$$

приймаємо $d=200$ мм.

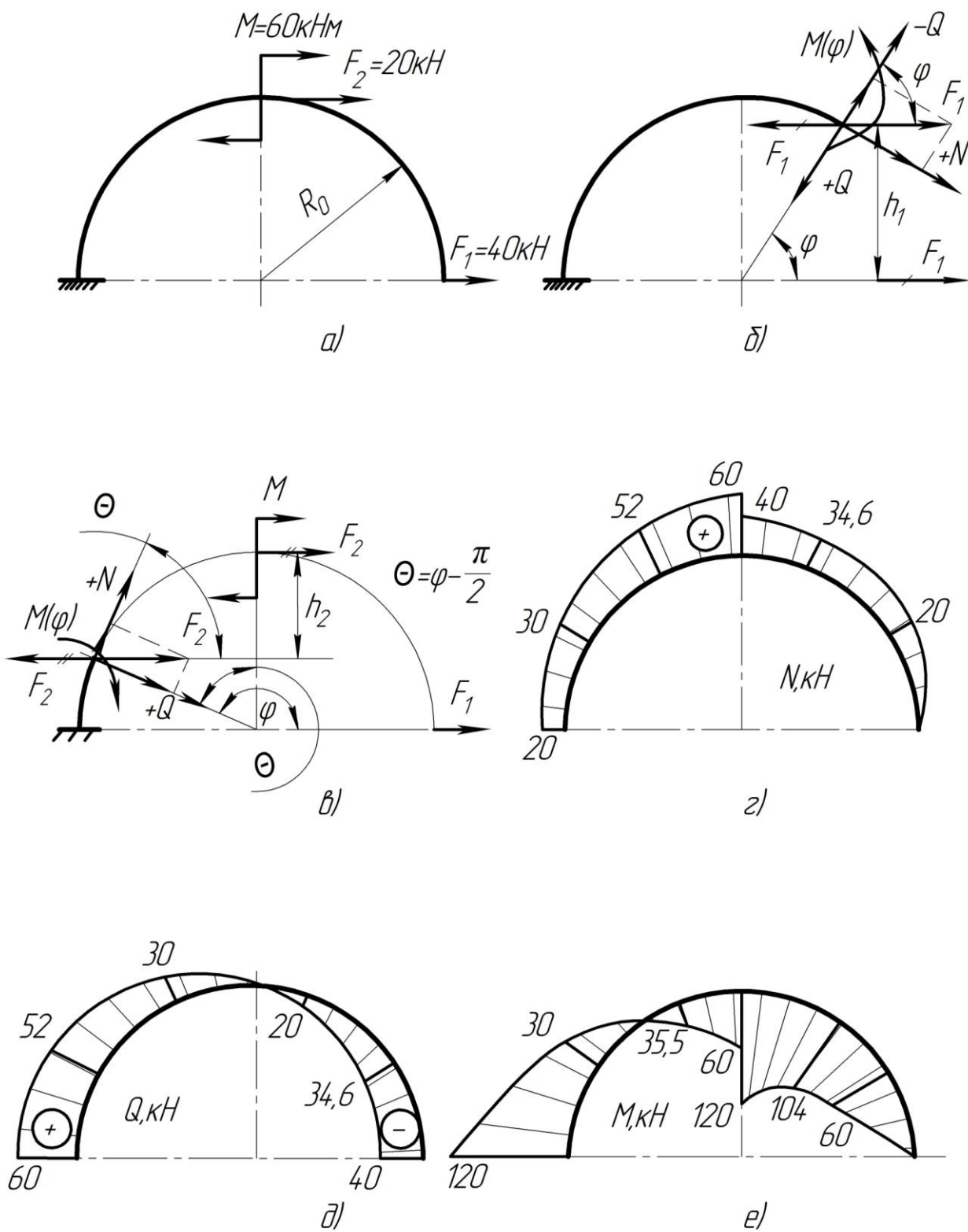


Рисунок 4.3

Приклад 4.2. Визначити вертикальний прогин точки K кривого бруса великої кривизни зображеного на рис. 4.4.

Розв'язування

Записуємо інтеграл Мора переходячи в полярні координати:

$$f_K^{верт} = \int_S \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I_0} dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\varphi) \cdot \bar{M}(\varphi)}{E \cdot I} \cdot R_0 \cdot d\varphi, \quad (4.8)$$

де $M(\varphi)$ – функція згинального моменту від зовнішнього навантаження в довільному перетині з координатою φ , $M(\varphi) = M_{3\Gamma}(\varphi)$

$$M(\varphi) = F \cdot h_1 = F \cdot R_0 (1 - \cos \varphi),$$

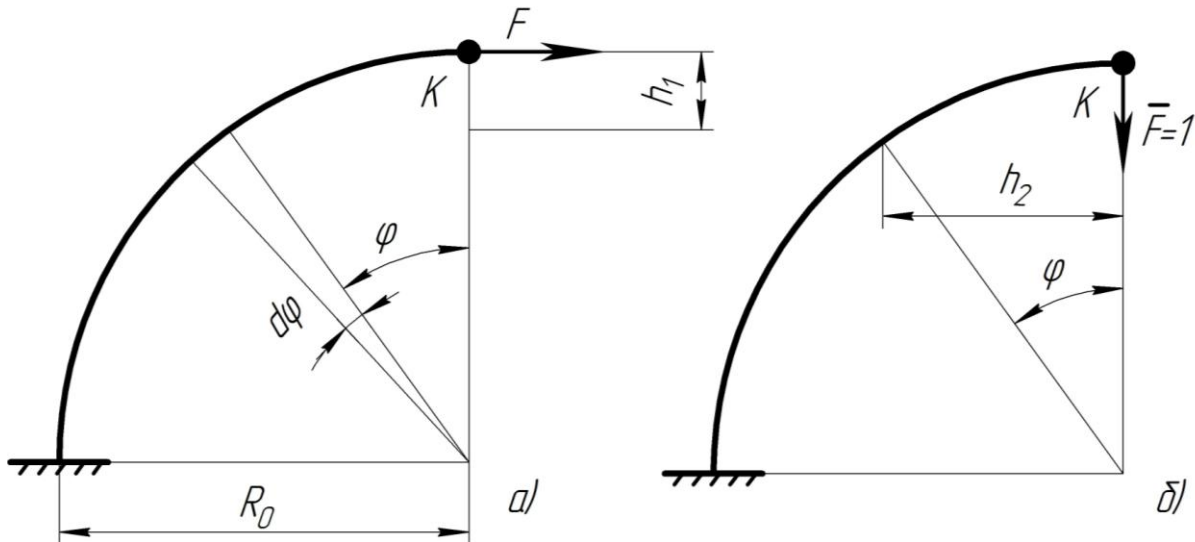


Рисунок 4.4

тут h_1 – плече сили F , для кривого бруса

$$h_1 = R_0 - R_0 \cdot \cos \varphi = R_0 (1 - \cos \varphi);$$

$\bar{M}(\varphi)$ – функція згинального моменту від одиничного навантаження $F = 1$ спрямованого в напрямку, в якому визначаємо прогин,

$$\bar{M}(\varphi) = \bar{F} \cdot \bar{h}_2 = 1 \cdot R_0 \cdot \sin \varphi;$$

тут \bar{h} – плече сили $\bar{F} = 1$, для кривого бруса

$$\bar{h}_2 = R_0 \cdot \sin \varphi; \quad dS = R_0 d\varphi.$$

Підставивши отримані значення в інтеграл Мора (4.8) визначимо прогин у перетині K

$$\begin{aligned}
 f_K^{верт} &= \frac{1}{E \cdot I_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot R_0 (1 - \cos \varphi) \cdot R_0 \cdot \sin \varphi \cdot R_0 d\varphi = \\
 &= \frac{F \cdot R_0^3}{E \cdot I_0} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \right] = \\
 &= \frac{F \cdot R_0^3}{E \cdot I_0} \left[-\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \\
 &= \frac{F \cdot R_0^3}{E \cdot I_0} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{F \cdot R_0^3}{2E \cdot I_0}.
 \end{aligned}$$

Приклад. 4.3. Кінцевий перетин B з'єднаний з нерухожим шарніром C (рис. 4.5а). Визначити величини згинаючих моментів у перетинах D і K , якщо відома згинальна жорсткість EI , радіус кривизни R та величини зазору Δ .

Розв'язування

Для закриття зазору Δ в точці B криволінійного бруса необхідно прикласти силу F (рис. 4.5б).

Для визначення переміщення використаємо метод Мора:

$$EI \cdot \Delta = \int_0^{\pi} M(\varphi) \cdot \overline{M}(\varphi) \cdot R d\varphi,$$

де $M(\varphi)$ – функція згинальних моментів від сили F , (рис. 4.5б)

$$M(\varphi) = -F \cdot R \cdot \sin \varphi ;$$

$\overline{M}(\varphi)$ – функція згинальних моментів від одиничної сили прикладеної в точці B , горизонтально (рис. 4.5в)

$$\overline{M}(\varphi) = -1 \cdot \varphi .$$

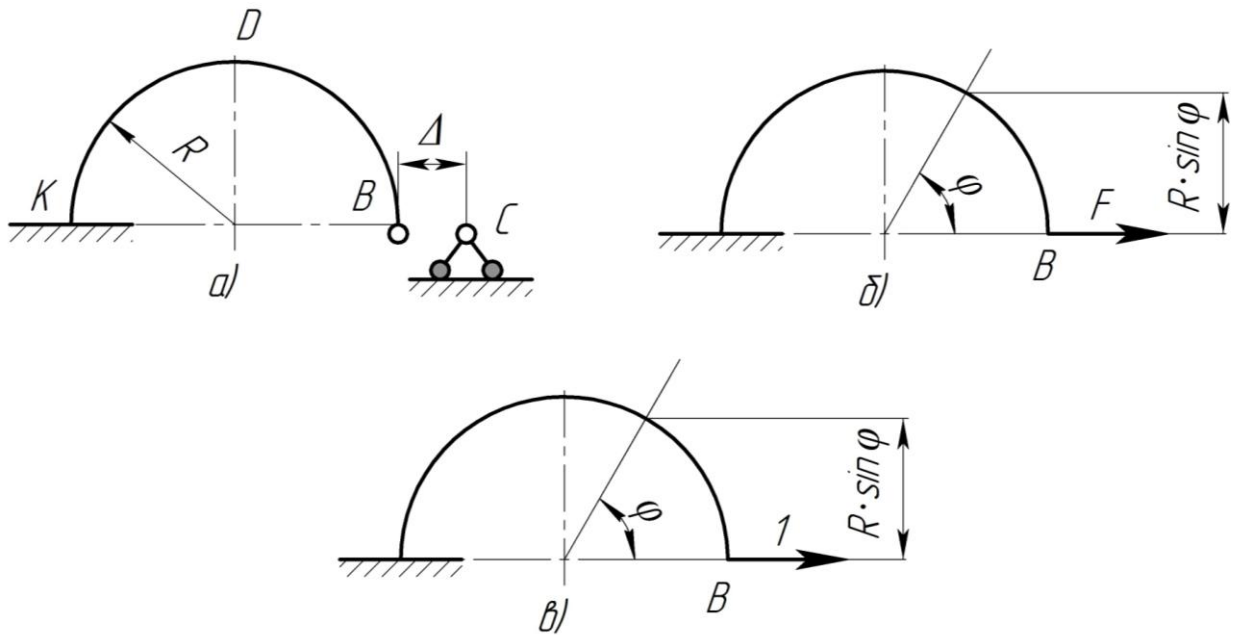


Рисунок 4.5

Визначаємо горизонтальне переміщення точки B :

$$\begin{aligned}
 E \cdot I \cdot \Delta &= \int_0^{\pi} -F \cdot R \cdot \sin \varphi - \varphi \cdot R d\varphi = \\
 &= F \cdot R^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -F \cdot R^2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = \\
 &= -F \cdot R^2 (-1 - 1) = -2 F \cdot R^2.
 \end{aligned}$$

Для закриття зазору Δ необхідно прикласти силу

$$F = -\frac{E \cdot I \cdot \Delta}{2 R^2}.$$

Визначимо згинальний момент у перетинах D і K :

$$M_{3\Gamma.D} = -F \cdot R = -\frac{EI \cdot \Delta}{2R};$$

$$M_{3\Gamma.K} = 0.$$

Приклад 4.4. Для криволінійного стержня (рис. 4.6а) побудувати епюри N , Q та M . Задано R – радіус кривизни стержня; q – розподілене навантаження.

Розв’язування

Елементарна сила dF , що діє на ділянку ds криволінійного стержня (рис. 4.6а)

$$dF = q \cdot ds = q \cdot R \cdot d\alpha .$$

Елементарні внутрішні силові фактори у довільному перетині φ від дії елементарної сили dF прикладеної у перетині α (рис. 4.6б):

$$dN(\varphi) = dF \cdot \sin \varphi = -q \cdot R \sin \varphi d\alpha ;$$

$$dQ(\varphi) = dF \cdot \cos \varphi = q \cdot R \cos \varphi d\alpha ;$$

$$dM(\varphi) = dF \cdot h = dF (R \sin \varphi - R \sin \alpha) = q \cdot R^2 (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha .$$

Визначимо внутрішні силові фактори перетину φ від зовнішнього навантаження відділеної частини бруса:

$$N(\varphi) = -q \cdot R \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\alpha = -q \cdot R \cdot \varphi \cdot \sin \varphi ;$$

$$Q(\varphi) = -q \cdot R \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\alpha = q \cdot R \cdot \varphi \cdot \cos \varphi ;$$

$$M_{3\Gamma}(\varphi) = q \cdot R^2 \int_0^{\varphi} (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha = q \cdot R^2 \left[\int_0^{\varphi} \sin \varphi d\alpha - \int_0^{\varphi} \sin \alpha d\alpha \right] =$$

$$= q \cdot R^2 \left[\varphi \cdot \sin \varphi + \cos \alpha \Big|_0^{\varphi} \right] = q \cdot R^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1).$$

Для побудови епюр визначимо N , Q та M через кожні 30° (таблиця 4.2). Будуємо епюри N , Q та M (рис. 4.6в, г, д).

Таблиця 4.2 – Величини внутрішніх силових факторів

Силові фактори	φ , рад			
	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$N \times q \cdot R$	0	-0,262	-906	-1,57
$Q \times q \cdot R$	0	0,453	0,523	0
$M \times q \cdot R^2$	0	0,128	0,406	0,57

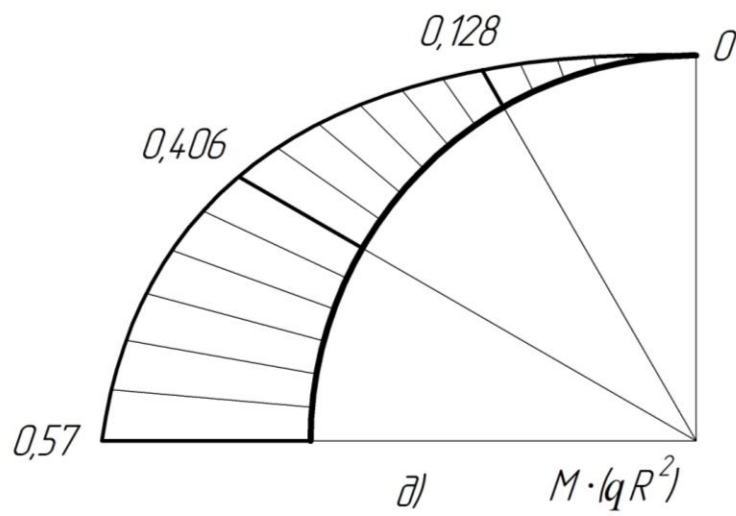
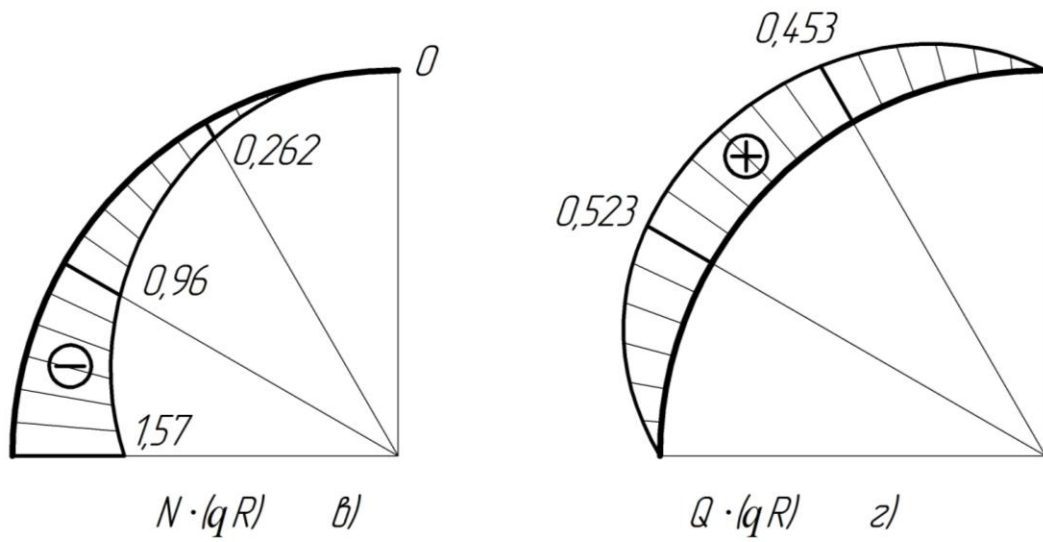
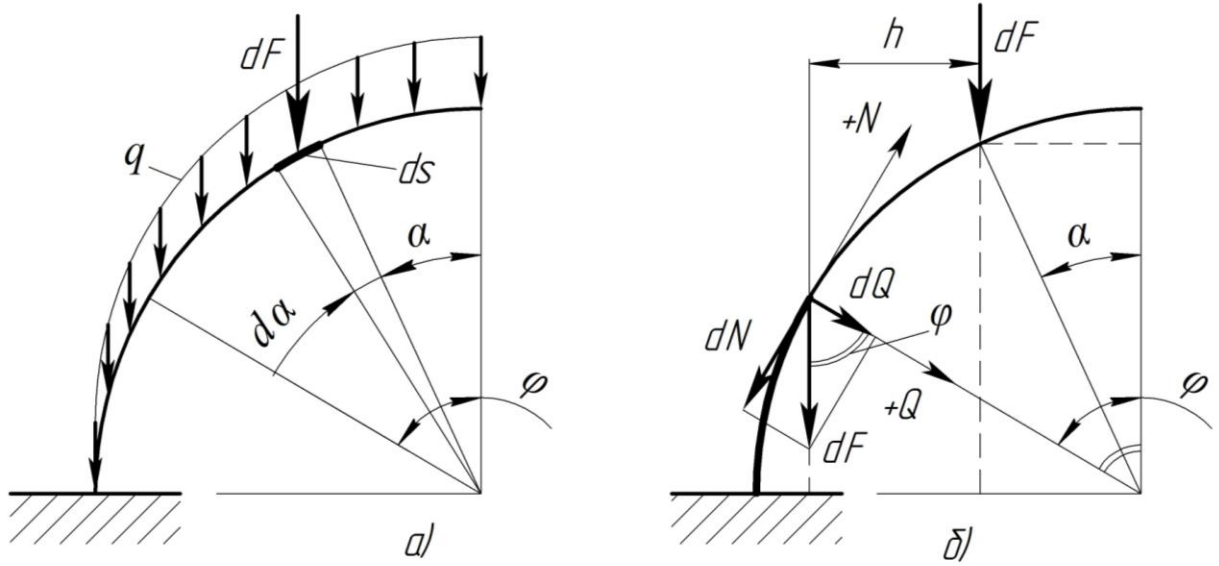


Рисунок. 4.6

Приклад 4.5. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для криволінійного стержня (рис. 4.7а). Задано R – радіус кривизни стержня; q – розподілене навантаження.

Розв’язування

Елементарна сила, що діє в перетині стержня під кутом α (рис. 4.7а)

$$dF = q \cdot ds = q \cdot R \cdot d\alpha.$$

Елементарні внутрішні силові фактори від дії сили dF прикладеної під кутом α у довільному перетині φ (рис. 4.7б):

$$dN(\varphi) = dF \cdot \cos(\varphi - \alpha) = q \cdot R \cos(\varphi - \alpha) d\alpha;$$

$$dQ(\varphi) = dF \cdot \sin(\varphi - \alpha) = q \cdot R \sin(\varphi - \alpha) d\alpha;$$

$$dM(\varphi) = dF \cdot h = dF \left[R - R \cos(\varphi - \alpha) \right] = q \cdot R^2 \left[1 - \cos(\varphi - \alpha) \right] d\alpha.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо повні внутрішні силові фактори у довільному перетині φ :

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= q \cdot R \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = q \cdot R \int_0^\varphi [\cos \varphi \cdot \cos \alpha + \sin \varphi \cdot \sin \alpha] d\alpha = \\ &= q \cdot R \left[\cos \varphi \int_0^\varphi \cos \alpha d\alpha + \sin \varphi \int_0^\varphi \sin \alpha d\alpha \right] = \\ &= q \cdot R \left(\cos \varphi \cdot \sin \alpha \Big|_0^\varphi + \sin \varphi \cdot (-\cos \alpha) \Big|_0^\varphi \right) = q \cdot R (\cos \varphi \cdot \sin \varphi - \sin \varphi \cdot (\cos \varphi - 1)) = \\ &= q \cdot R \sin \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(\varphi) &= q \cdot R \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = q \cdot R \int_0^{\varphi} [\sin \varphi \cdot \cos \alpha + \cos \varphi \cdot \sin \alpha] d\alpha = \\
&= q \cdot R \left[\sin \varphi \cdot \int_0^{\varphi} \cos \alpha d\alpha + \cos \varphi \cdot \int_0^{\varphi} \sin \alpha d\alpha \right] = \\
&= q \cdot R \left[\sin \varphi \cdot \sin \alpha \Big|_0^{\varphi} + \cos \varphi (-\cos \alpha) \Big|_0^{\varphi} \right] = q \cdot R \left[\sin \varphi^2 + \cos \varphi (\cos \varphi - 1) \right] = \\
&= q \cdot R (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 - \cos \varphi) = q \cdot R (1 - \cos \varphi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(\varphi) &= q \cdot R^2 \int_0^{\varphi} \left[1 - \cos(\varphi - \alpha) \right] d\alpha = q \cdot R^2 \left[\int_0^{\varphi} d\alpha - \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = \\
&= q \cdot R^2 (\varphi - \sin \varphi).
\end{aligned}$$

Для побудови епюр визначимо N , Q та M через кожні 45° . Результати внесемо у таблицю 4.3.

Таблиця 4.3 – Величини внутрішніх силових факторів

Силові фактори	φ , рад				
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	π
$N \times q \cdot R$	0	0,707	1	0,707	0
$Q \times q \cdot R$	0	0,293	1	1,707	2
$M \times q \cdot R^2$	0	0,078	0,57	1,65	3,14

Будуємо епюри N , Q та M (рис. 4.7в, г, д).

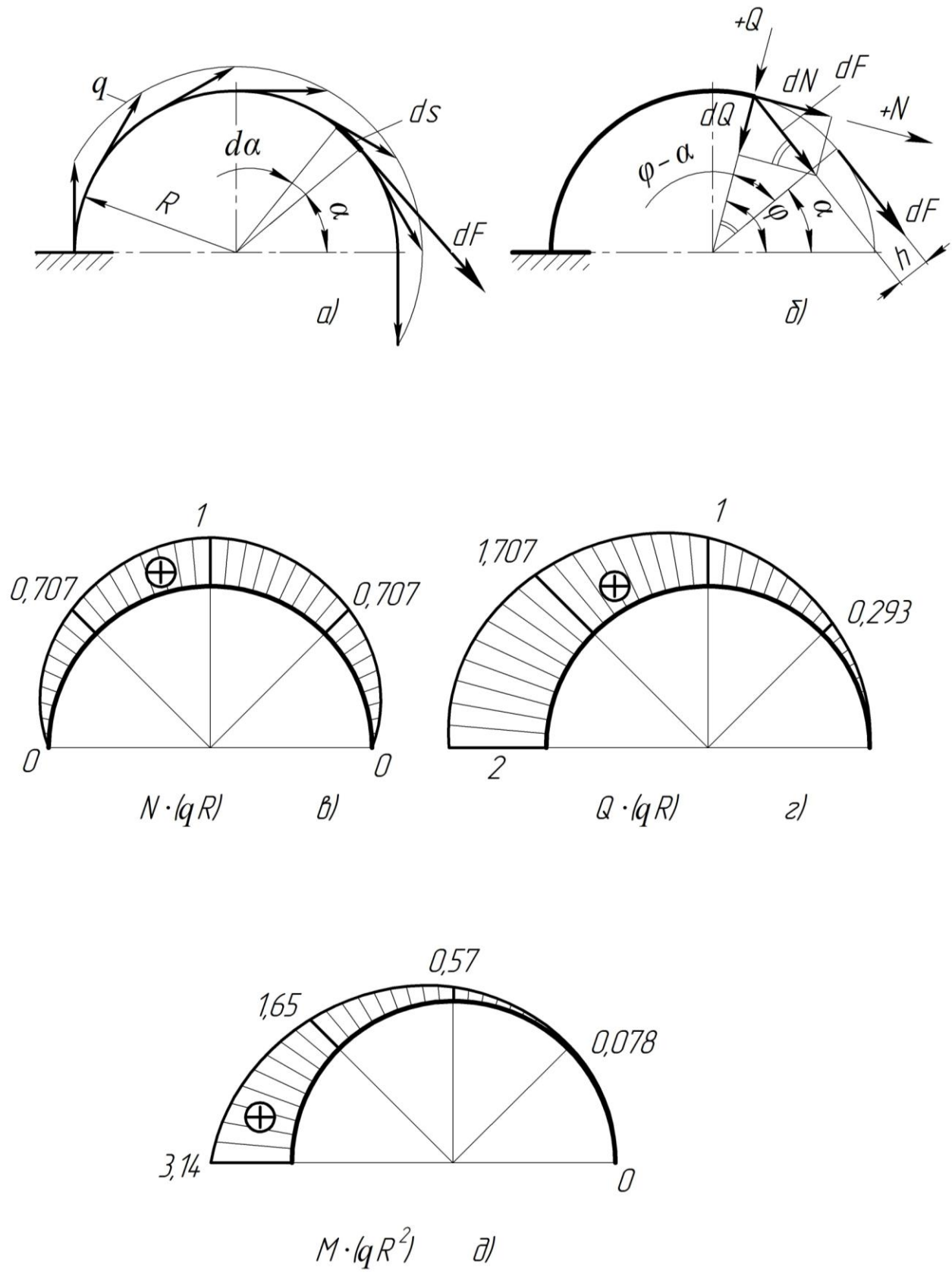


Рисунок 4.7

Приклад 4.6. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для криволінійного стержня (рис. 4.8а). Задано R – радіус кривизни стержня; q – розподілене навантаження.

Розв’язування

На проміжку стержня (рис. 4.8а) від 0 до φ градусів виділяємо елементарну ділянку $ds = R d\alpha$, на яку діє елементарна сила

$$dF = q ds = q \cdot R d\alpha$$

Від цієї елементарної сили у перетині φ виникають елементарні внутрішні силові фактори (рис. 4.8а, б).

$$dN(\varphi) = -dF \cdot \sin(\varphi - \alpha) = -q \cdot R \cdot \sin(\varphi - \alpha) d\alpha ;$$

$$dQ(\varphi) = -dF \cdot \cos(\varphi - \alpha) = -q \cdot R \cdot \cos(\varphi - \alpha) d\alpha ;$$

$$dM(\varphi) = dF \cdot h = dF \cdot R \sin(\varphi - \alpha) = q \cdot R^2 \cdot \sin(\varphi - \alpha) d\alpha .$$

Використовуючи розв’язки інтегралів прикладу 4.5, запишемо функції внутрішніх силових факторів для перетину φ :

$$N(\varphi) = -q \cdot R (1 - \cos \varphi) ;$$

$$Q(\varphi) = -q \cdot R \cdot \sin \varphi ;$$

$$M_{3Г}(\varphi) = q \cdot R^2 (1 - \cos \varphi) .$$

Для побудови епюр визначимо N , Q та M через кожні 45° . Результати внесемо у таблицю 4.4.

Таблиця 4.4 – Величини внутрішніх силових факторів

Силові фактори	φ , рад				
	0	$\pi / 4$	$\pi / 2$	$3\pi / 2$	π
$N \times q \cdot R$	0	-0,293	-1	-1,707	-2
$Q \times q \cdot R$	0	-0,707	-1	-0,707	0
$M \times q \cdot R^2$	0	0,293	1	1,707	2

Будуємо епюри N , Q та M (рис. 4.8в, г, д).

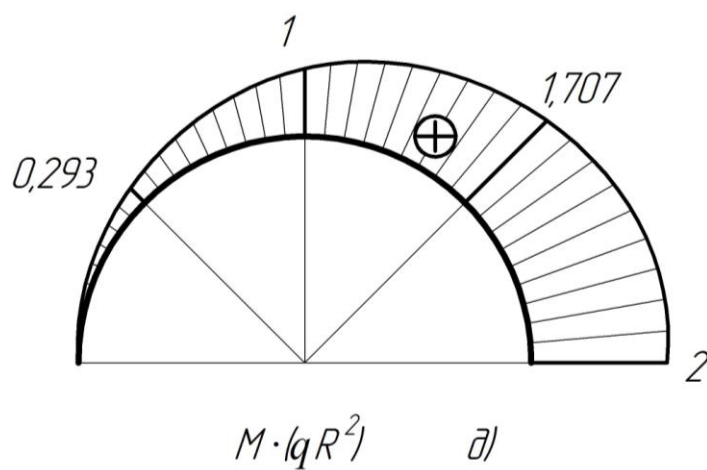
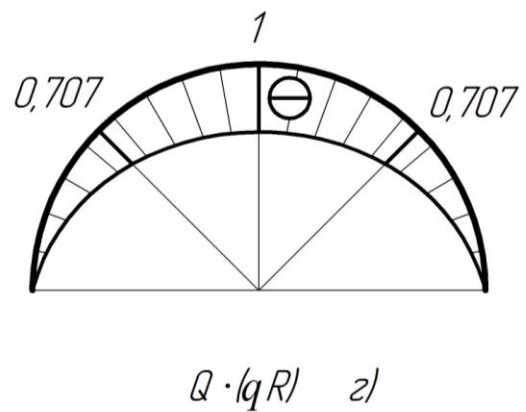
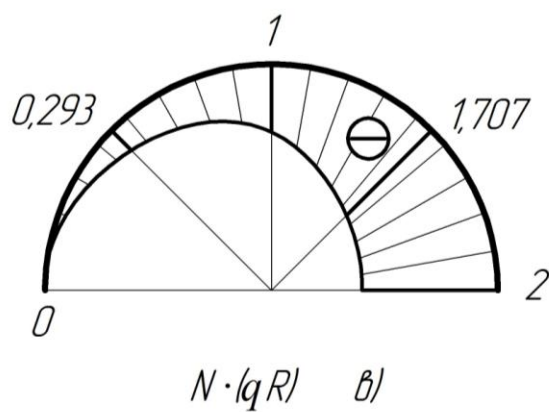
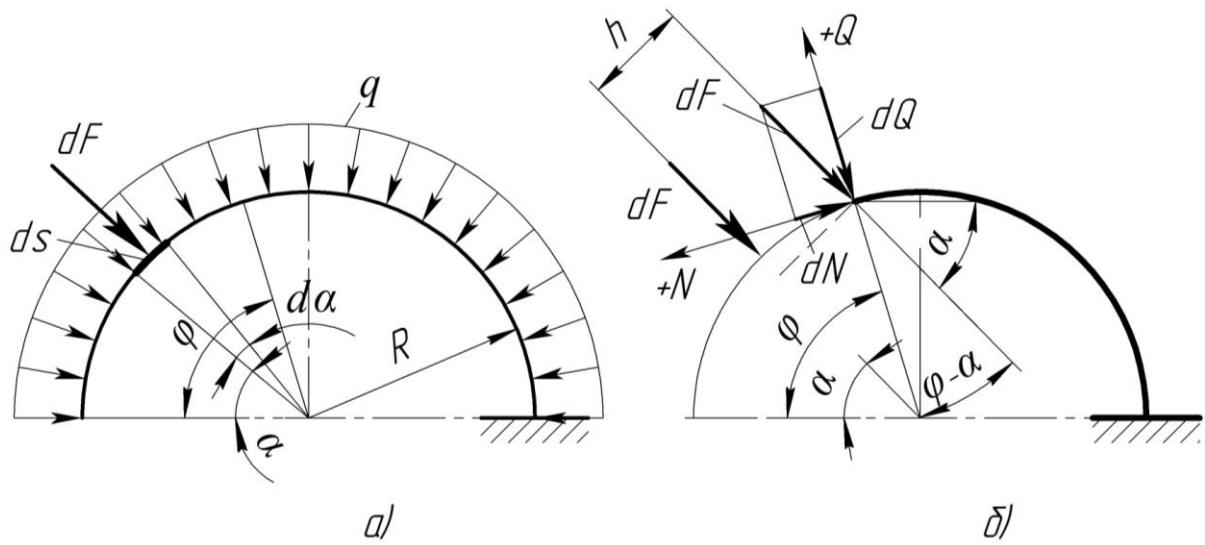


Рисунок 4.8

Приклад 4.7. Для заданого статично невизначуваного криволінійного бруса малої кривизни (рис. 4.9а) розкрити статичну невизначеність, побудувати епюри поперечних і нормальних сил та згинальних моментів, підібрати круглий поперечний перетин, якщо $R_0 = 3$ м, $F = 10$ кН, $M = 24$ кНм. Підібрати розміри поперечного перетину стержня, а саме, діаметр. Матеріал бруса – сталь, $[\sigma] = 160$ МПа ; $E \cdot I = \text{const}$.

Розв'язування

У заданій системі (рис. 4.9а) виникає чотири невідомих зусилля X_1, X_2, X_3, X_4 . Оскільки для плоскої системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, то система $4 - 3 = 1$ раз статично невизначувана.

Статичну невизначеність розкриваємо методом сил.

Вибираємо основну систему (рис. 4.9б) прийнявши X_1 як «зайву» невідому.

Записуємо канонічне рівняння методу сил

$$X_1 \cdot \delta_{11} = -\Delta_1(F). \quad (4.10)$$

Переміщення (коефіцієнт) δ_{11} і вільний член рівняння $\Delta_1(F)$ визначаємо графоаналітичним способом розв'язку інтегралу Мора.

Завантажуємо основну систему одиничною силою (рис. 4.9з) і зовнішнім навантаженням (рис. 4.9в).

Коефіцієнт δ_{11} канонічного рівняння визначаємо методом Мора:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = \int_0^{\pi} (\overline{M}_1)^2 R_0 d\varphi, \quad (4.11)$$

де \overline{M}_1 – вираз функції для визначення згинального моменту від одиничної сили

$$\overline{M}_1 = 1 \cdot R_0 (1 - \cos \varphi). \quad (4.12)$$

Перепишемо вираз (4.11) з врахуванням (4.12)

$$\begin{aligned}
E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} &= \int_0^{\pi} R_0^3 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \\
&= R_0^3 \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \pi \cdot R_0^3.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Вільний член рівняння також визначаємо методом Мора:

$$E \cdot I_0 \cdot \Delta_1(F) = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} M_1 \cdot \overline{M}_1 \cdot R_0 d\varphi + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} M_2 \cdot \overline{M}_2 \cdot R_0 d\varphi = D_1 + D_2, \tag{4.14}$$

де M_1 – згинальний момент від зовнішнього навантаження на першій ділянці бруса, $M = -24$ кН м;

M_2 – вираз функції згинального моменту від зовнішнього навантаження на другій ділянці бруса

$$\begin{aligned}
M_2 &= -M + F_1 \cdot R_0 [1 - \cos(\varphi - 135^\circ)] = \\
&= -24 + 10 \cdot 3 [1 - \cos(\varphi - 135^\circ)] = \\
&= 6 + 21,2 \cos \varphi - 21,2 \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$\overline{M}_1, \overline{M}_2$ – вираз функції для визначення згинального моменту від одиничної сили на першій і другій ділянках бруса, відповідно,

$$\begin{aligned}
\overline{M}_1 &= \overline{M}_2 = 1 \cdot R_0 (1 - \cos \varphi) = \\
&= 1 \cdot 3 (1 - \cos \varphi) = 3 (1 - \cos \varphi).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Підставивши отримані вирази (7.6) і (7.7) у відповідні інтеграли залежності (7.5), отримаємо:

$$D_1 = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} M_1 \cdot \overline{M}_1 \cdot R_0 d\varphi = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (-24) \cdot 3 (1 - \cos \varphi) \cdot 3 d\varphi = -356 ;$$

$$D_2 = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} M_2 \overline{M}_2 R_0 d\varphi = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (6 + 21,2 \cos \varphi - 21,2 \sin \varphi) \cdot 3(1 - \cos \varphi) \cdot 3 d\varphi = 424 .$$

Отже,

$$E \cdot I_0 \cdot \Delta_1(F) = D_1 + D_2 = -356 - 424 = -780 .$$

Розв'язуємо канонічне рівняння

$$X_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_{11}} = -\frac{(-780) \cdot 2}{3 \cdot \pi \cdot 3^3} = 6,13 \text{ кН.}$$

Будуємо еквівалентну систему (рис. 4.9д).

Розбиваємо брус на дві ділянки (рис. 4.9д).

Для кожної ділянки записуємо вирази функцій осьових сил $N(\varphi)$, поперечних сил $Q(\varphi)$ та згинальних моментів $M_{3\Gamma}(\varphi)$ у загальному вигляді, використовуючи полярні координати.

При запису виразів внутрішніх силових факторів $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M_{3\Gamma}(\varphi)$ використовуємо відповідне «правило знаків» (див. рис. 4.1). Вирази функцій записуємо йдучи з вільного кінця бруса.

Перша ділянка $0 \leq \varphi \leq 135^\circ$;

$$N(\varphi) = X_1 \cdot \cos \varphi = 6,13 \cos \varphi ;$$

$$Q(\varphi) = X_1 \cdot \sin \varphi = 6,13 \sin \varphi ;$$

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= -M_1 + X_1 \cdot R_0 (1 - \cos \varphi) = -24 + 6,13 \cdot 3 (1 - \cos \varphi) = \\ &= -24 + 18,4 (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Друга ділянка $135^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$;

$$N(\varphi) = X_1 \cdot \cos \varphi + F \cdot \cos (\varphi - 135^\circ) = 6,13 \cos \varphi + 10 \cos (\varphi - 135^\circ) ;$$

$$Q(\varphi) = X_1 \cdot \sin \varphi + F \cdot \sin (\varphi - 135^\circ) = 6,13 \sin \varphi + 10 \sin (\varphi - 135^\circ) ;$$

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &= -M_1 + X_1 \cdot R_0 (1 - \cos \varphi) + F_1 \cdot R_0 [1 - \cos (\varphi - 135^\circ)] = \\
 &= -24 + 6,13 \cdot 3 (1 - \cos \varphi) + 10 \cdot 3 [1 - \cos (\varphi - 135^\circ)] = \\
 &= -24 + 18,4 (1 - \cos \varphi) + 30 [1 - \cos (\varphi - 135^\circ)].
 \end{aligned}$$

Визначаємо значення внутрішніх силових факторів через кожні 45°. Результати внесемо у таблицю 4.5.

Таблиця 4.5 – Значення внутрішніх силових факторів

Функція	Перша ділянка				Друга ділянка	
	0	45°	90°	135°	135°	180°
$N(\varphi)$, кН	6,13	4,33	0	-4,33	5,67	0,94
$Q(\varphi)$, кН	0	4,33	6,13	4,33	4,33	7,07
$M_{зГ}(\varphi)$, кНм	-24,0	-18,6	-5,6	7,41	7,41	21,6

За отриманими результатами будуюмо епюри $N(\varphi)$ (рис. 4.9з), $Q(\varphi)$ (рис. 4.9ж), $M_{зГ}(\varphi)$ (рис. 4.9е).

Визначаємо небезпечний перетин бруса – це перетин, де діє $M_{зГ \max} = 24$ кНм.

З умови міцності на згин за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зГ \max}}{W_0} = \frac{32 M_{зГ \max}}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma],$$

визначаємо діаметр бруса:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 24 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 160}} = 0,115 \text{ м} = 115 \text{ мм},$$

приймаємо $d=120$ мм.

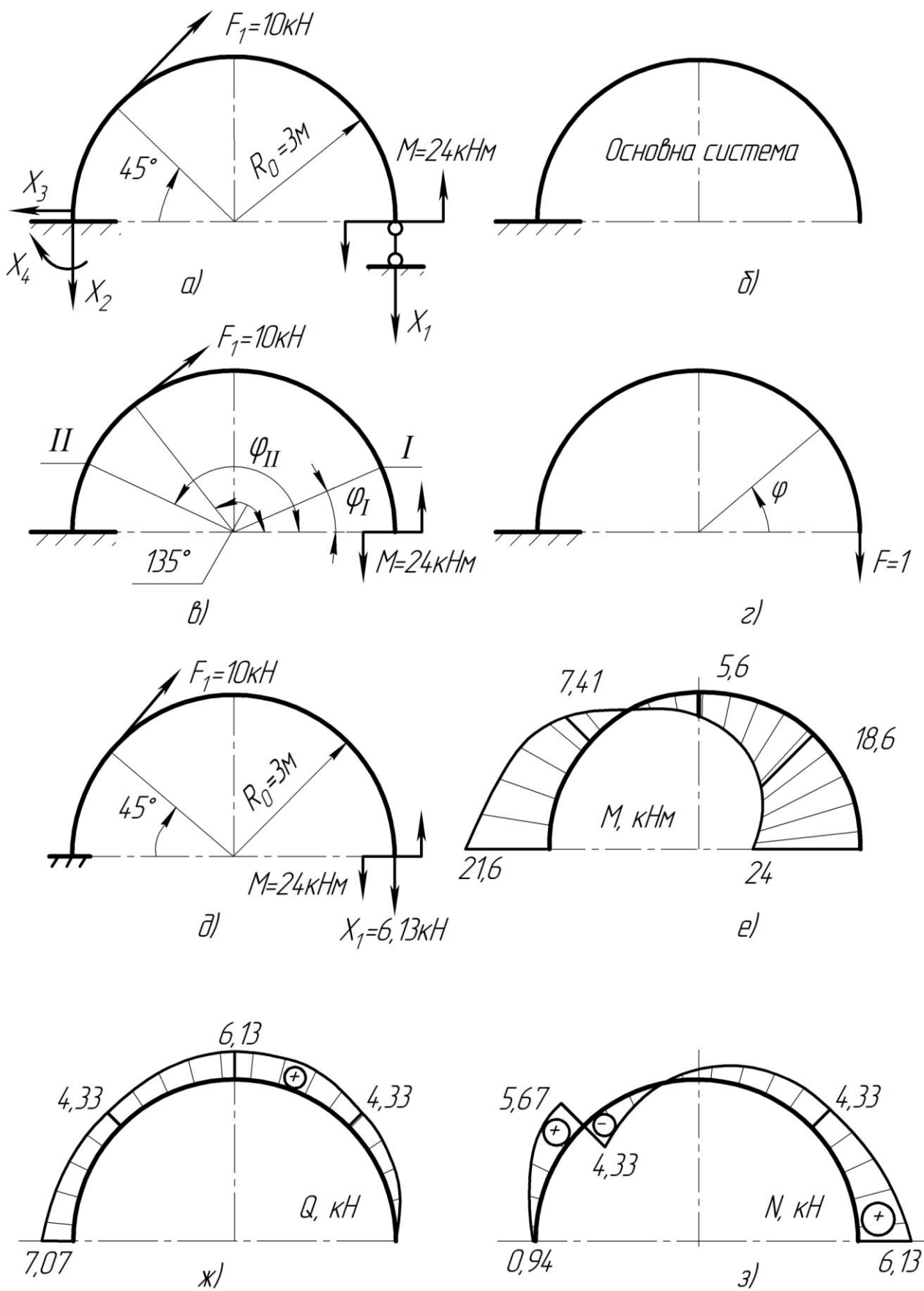
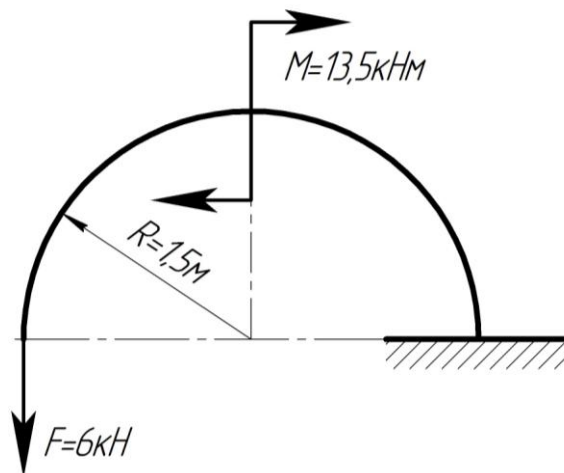


Рисунок 4.9

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

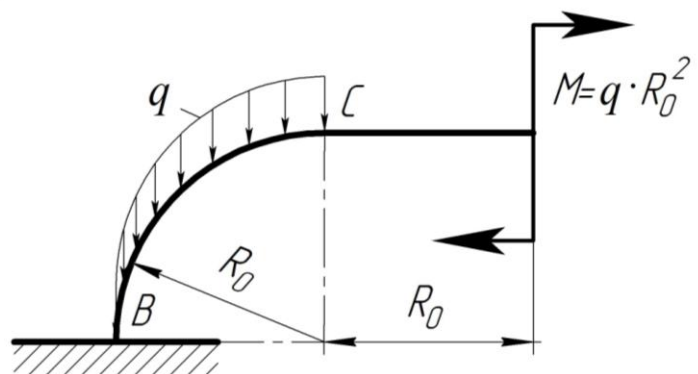
Задача 4.1.

Заданий плоский криволінійний стержень, вісь якого проходить по осі кола. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів N , Q та M .



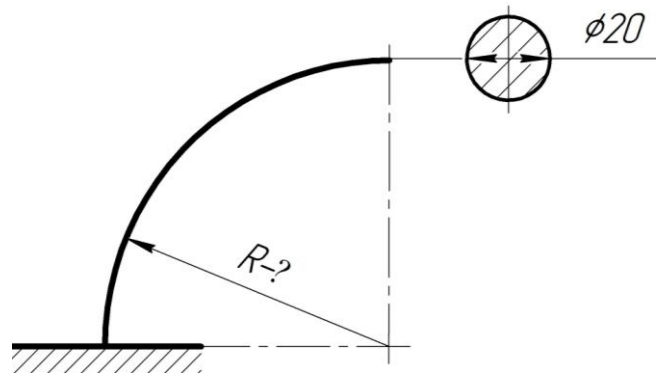
Задача 4.2.

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів N , Q та M для криволінійного бруса.



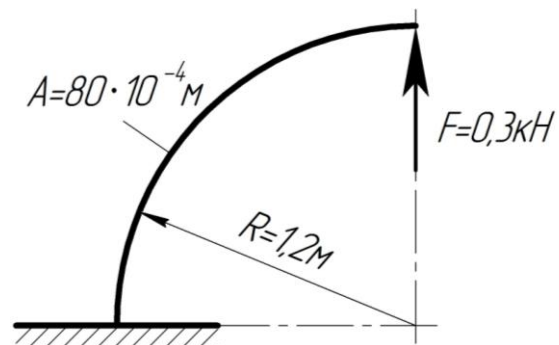
Задача 4.3. Визначити з умови міцності за нормальними напруженнями від власної ваги максимально допустиму величину радіусу криволінійного сталюго стержня діаметром 2 см, закріпленого, як показано на рисунку, $[\sigma] = 160$ МПа

$$\gamma_{стали} = 78 \text{ кН/м}^3.$$



Задача 4.4.

Для криволінійного стержня з врахуванням власної ваги побудувати епюри внутрішніх силових факторів N , Q та M , якщо $\gamma_{стали} = 78$ кН/м³.



5. БРУСИ, ВИГОТОВЛЕНІ З РІЗНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

Більшість машинобудівних та будівельних конструкцій, обладнання різних галузей виробництва та сфери послуг виготовляють поєднанням матеріалів не тільки з різними механічними характеристиками, типу сталей різних марок, кольорових металів чи їх сплавів, а й різними за структурою, наприклад, сталь і дерево, сталь і пластмаси, сталь і гума та ін.

Металічні та неметалічні матеріали по-різному сприймають одні і ті ж навантаження. Поєднання різнорідних матеріалів в одній і ті ж конструкції є не тільки доцільним, а й у багатьох випадках необхідним (захист від корозії, зменшення пошкоджень при транспортуванні, зменшення чи збільшення тертя між контактуючими поверхнями, здешевлення конструкції, довговічність, ергономічність та ін.)..

Конструкції виготовлені із різнорідних матеріалів при дії навантаження піддаються одним і тим же видам деформації, однак розрахунок їх на міцність має свої особливості.

Бруси, виготовлені поєднанням різнорідних матеріалів, працюють на всі види простих деформацій, а саме; розтяг-стиск, зсув, кручення та прямий поперечний згин.

Кожний вид деформації має свою специфіку визначення внутрішніх силових факторів. При поєднанні різнорідних матеріалів всі вони сприймають один і той же вид деформації при однаковому навантаженні.

У машинобудуванні часто застосовують конструкції брусів, які складаються з двох або більше матеріалів, тобто модулі пружності та зсуву у них різні. Поперечні перетини таких елементів зображені на (рис. 5.1а, б). Розглянемо розрахунок таких брусів залежно від виду деформації, на який вони працюють.

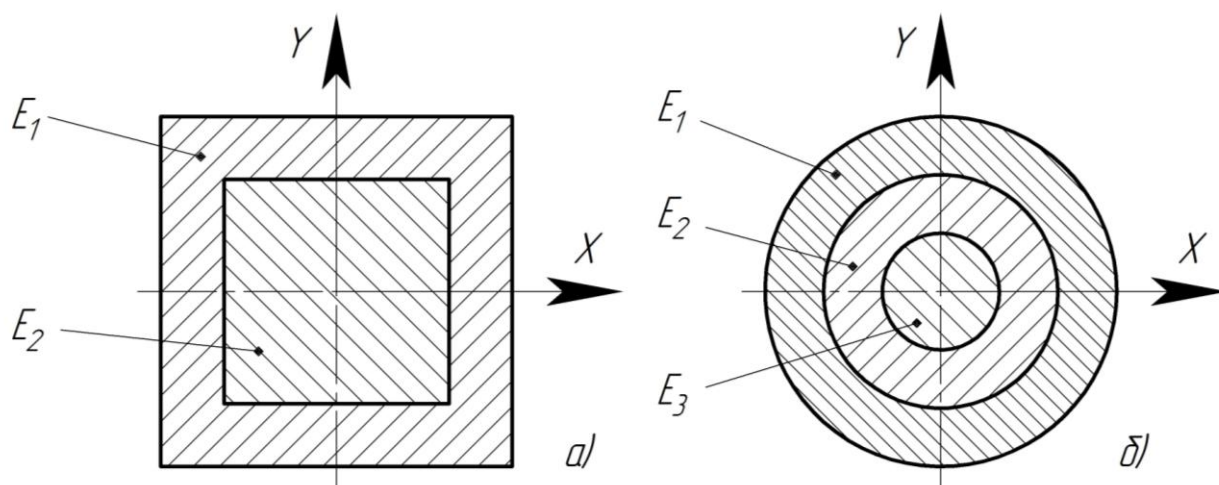


Рисунок 5.1

5.1. Розтяг-стиск

При розтягу-стиску в поперечних перетинах бруса (стержня) виникає внутрішній силовий фактор – нормальна сила, позначають N . Деформація розтягу-стиску характеризується абсолютним та відносним видовженням (вкороченням) стержня. Повне видовження стержня визначають за законом Гука

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де l – довжина стержня;
 A – площа поперечного перетину;
 E – модуль пружності першого роду.

Відносну поздовжню деформацію визначають так:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E \cdot A} = \frac{\sigma}{E},$$

де σ – нормальне напруження, $\sigma = \frac{N}{A}$.

Визначимо, як розподіляться нормальні напруження для стержня показаного на рисунку 5.2а. Він виготовлений поєднанням трьох матеріалів, які мають різні модулі пружності E_1, E_2, E_3 .

Розглядаємо рівновагу диска (рис. 5.2б).

$$F = N_1 + N_2 + N_3, \quad (5.1)$$

де N_1, N_2, N_3 – сили, що виникають, відповідно в першому, другому та третьому елементах стержня.

Розглядувана система 3-1=2 рази статично невизначена.

Для визначення нормальних сил у поперечному перетині стержня складаємо рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$$

або

$$\frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3 \cdot l}{E_3 \cdot A_3}. \quad (5.2)$$

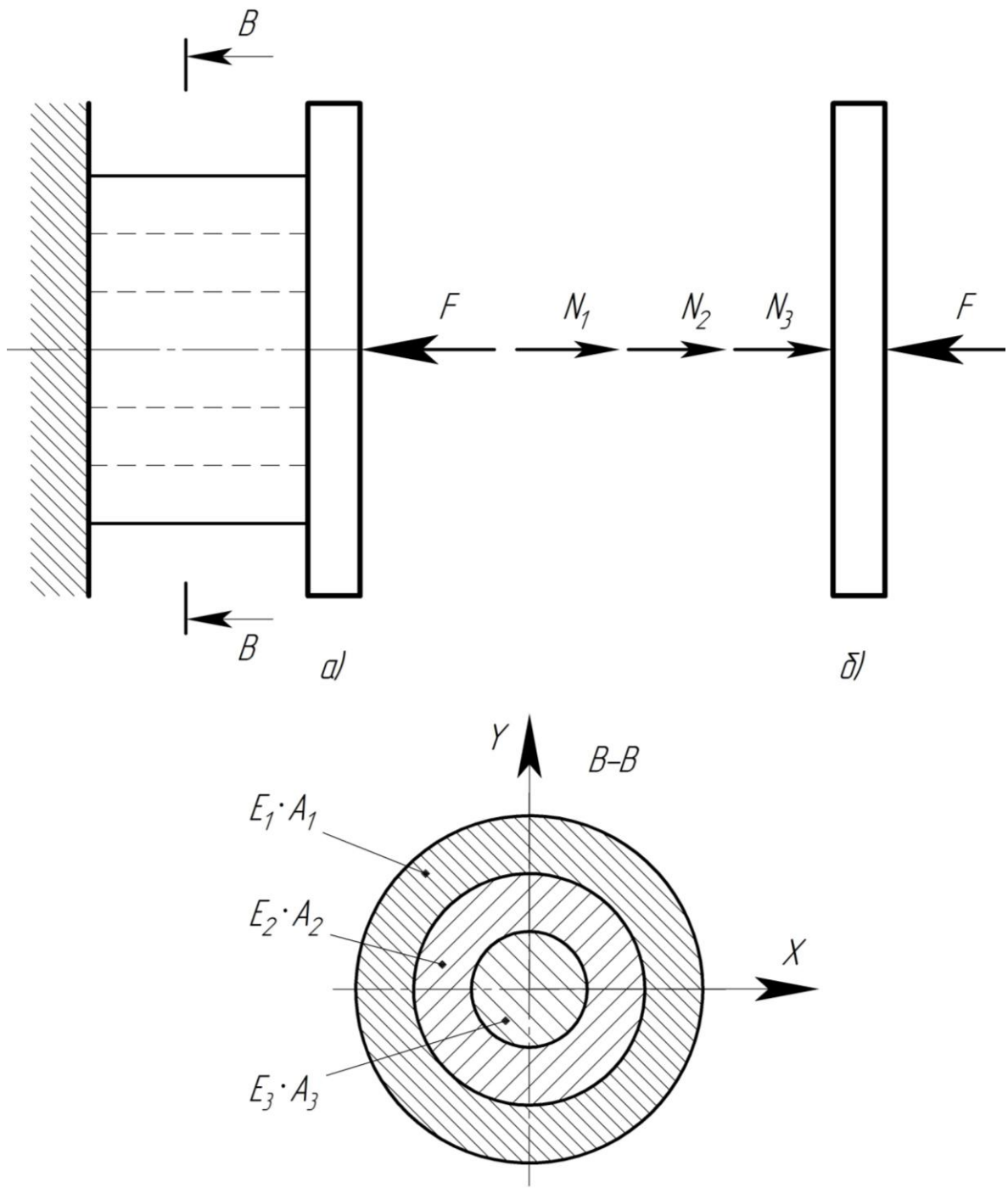


Рисунок 5.2

З рівняння (5.2) визначимо:

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1}; \quad (5.3)$$

$$N_3 = N_1 \cdot \frac{E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1}. \quad (5.4)$$

Підставивши (5.3) і (5.4) у рівняння (5.1) отримаємо

$$F = N_1 + N_1 \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1} + N_1 \cdot \frac{E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1}.$$

Визначимо нормальні сили, що виникають у кожному з елементів стержня, при умові, що жорсткості їх поперечних перетинів на розтяг-стиск $E_1 \cdot A_1$, $E_2 \cdot A_2$, $E_3 \cdot A_3$, – відомі:

$$N_1 = \frac{F}{1 + \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1} + \frac{E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1}} = F \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3};$$

$$N_2 = F \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3} \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1} = F \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3};$$

$$N_3 = F \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3} \cdot \frac{E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1} = F \cdot \frac{E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3}.$$

Нормальні напруження, що виникають в кожному з елементів стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = F \cdot \frac{E_1}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = F \cdot \frac{E_2}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = F \cdot \frac{E_3}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3}.$$

5.2. Кручення

Кручення – це вид деформації, при якому у поперечних перетинах діє внутрішній силовий фактор – крутний момент M_{KP} .

Брус круглого поперечного перетину, що сприймає деформацію кручення в механіці називають валом.

У поперечних перетинах валів діють дотичні напруження, які визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho ,$$

де ρ – відстань від полюса до точки, в якій визначають дотичні напруження;

I_P – полярний момент інерції поперечного перетину вала.

Максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} ,$$

де ρ_{\max} – відстань від полюса до найбільш віддаленої точки поперечного перетину;

W_P – полярний момент опору поперечного перетину вала,

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\max}} .$$

Деформація кручення характеризується відносним кутом закручування.

Відносний кут закручування визначають за формулами:

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180}{\pi} \left[\frac{\text{град}}{\text{м}} \right].$$

Повне кутове переміщення вала довжиною l визначають так

$$\theta = \frac{\Delta \varphi}{l}; \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \text{ [рад]} .$$

де G – модуль зсуву матеріалу вала.

Визначимо внутрішні силові фактори (крутні моменти) та дотичні напруження для кожного елемента вала, навантажено зовнішнім моментом M (рис. 5.3).

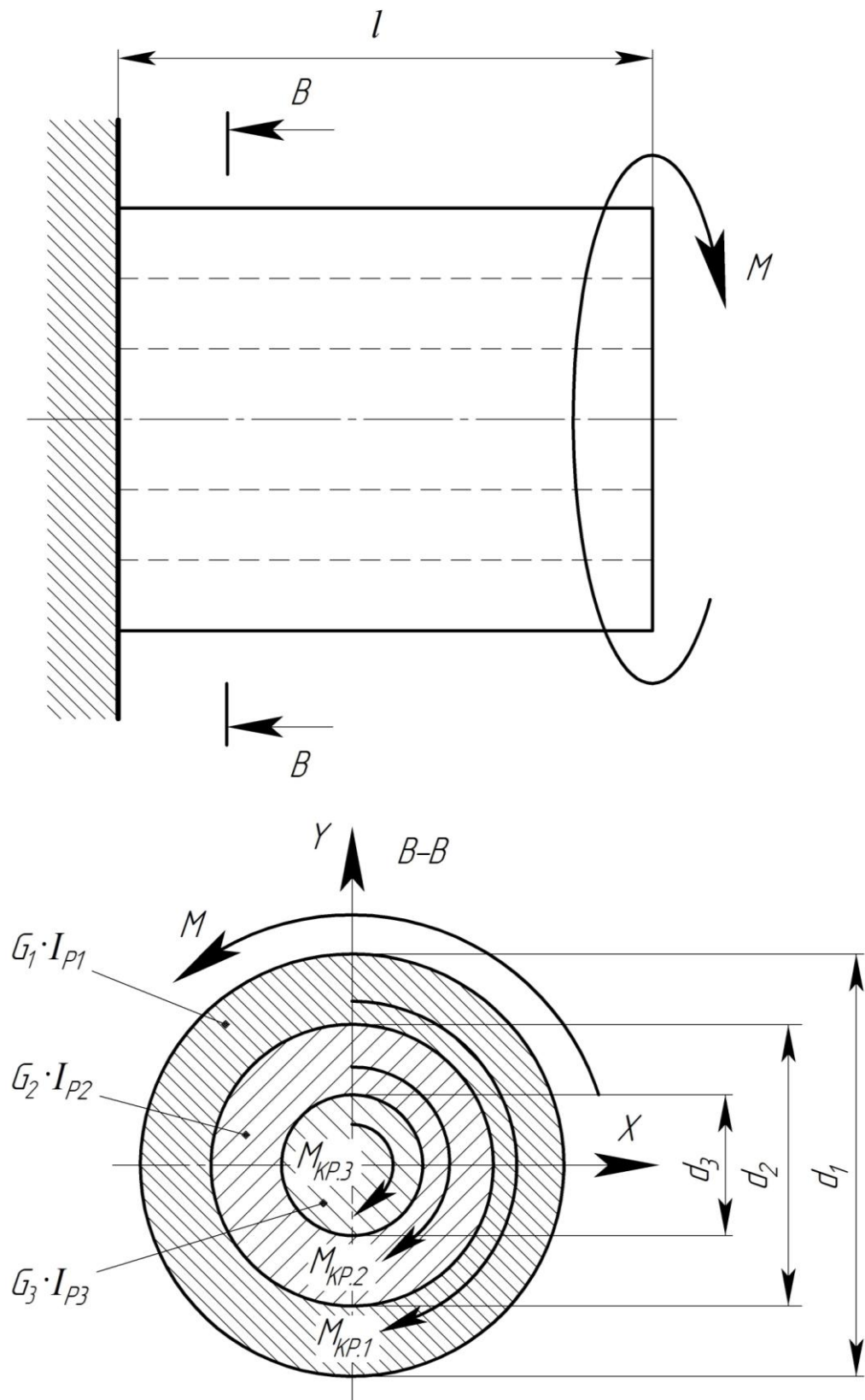


Рисунок 5.3

Складаємо рівняння статички

$$M = M_{KP.1} + M_{KP.2} + M_{KP.3}, \quad (5.5)$$

де $M_{KP.1}, M_{KP.2}, M_{KP.3}$ – крутні моменти, що виникають у кожному з елементів вала.

Система 3-1=2 рази статично невизначена. Для визначення крутних моментів запишемо рівняння сумісності деформацій:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3,$$

або

$$\frac{M_{KP.1}}{G_1 \cdot I_{P1}} = \frac{M_{KP.2}}{G_2 \cdot I_{P2}} = \frac{M_{KP.3}}{G_3 \cdot I_{P3}};$$

звідки

$$M_{KP.2} = M_{KP.1} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1}}; \quad (5.6)$$

$$M_{KP.3} = M_{KP.1} \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1}}, \quad (5.7)$$

де I_{P1}, I_{P2}, I_{P3} – полярні моменти інерції поперечних перетинів кожного з елементів вала.

Підставимо величини з рівнянь (5.6)-(5.7) у рівняння (5.5) і отримаємо

$$M = M_{KP.1} + M_{KP.1} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1}} + M_{KP.1} \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1}}.$$

Визначимо крутні моменти, що діють у кожному з елементів вала

$$M_{KP.1} = M \cdot \frac{G_1 \cdot I_{P1}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}};$$

$$M_{KP.2} = M \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}};$$

$$M_{KP.3} = M \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}}.$$

Дотичні напруження для кожного з елементів вала визначаємо за формулами:

- перший елемент

$$\tau_1(\rho_1) = \frac{M_{KP.1}}{I_{P1}} \cdot \rho_1 = M \cdot \frac{G_1}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \rho_1,$$

$$\text{де } \frac{d_1}{2} \geq \rho_1 \geq \frac{d_2}{2};$$

- другий елемент

$$\tau_2(\rho_2) = \frac{M_{KP.2}}{I_{P2}} \cdot \rho_2 = M \cdot \frac{G_2}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \rho_2,$$

$$\text{де } \frac{d_2}{2} \geq \rho_2 \geq \frac{d_3}{2};$$

- третій елемент

$$\tau_3(\rho_3) = \frac{M_{KP.3}}{I_{P3}} \cdot \rho_3 = M \cdot \frac{G_3}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \rho_3,$$

$$\text{де } \frac{d_3}{2} \geq \rho_3 \geq 0.$$

Для розглядуваного поперечного перетину вала (див рис. 5.3) полярні моменти інерції кожної із його складових

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} (1 - \alpha_1^4);$$

$$I_{P2} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} (1 - \alpha_2^4);$$

$$I_{P3} = \frac{\pi \cdot d_3^4}{32},$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{d_2}{d_1}; \quad \alpha_2 = \frac{d_3}{d_2}.$$

5.3. Прямий поперечний згин

Прямий поперечний згин - це такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діють поперечна сила Q та згинальний момент $M_{зГ}$. Брус, що працює на згин, називають балкою.

Руйнівним внутрішнім силовим фактором при згині, у більшості випадків, є згинальний момент. Від дії згинального моменту в матеріалі поперечного перетину балки виникають нормальні напруження, які визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{M_{зГ}}{I_X} \cdot y ,$$

де y – відстань від осі X до точки, в якій визначають нормальні напруження;

I_X – осьовий момент інерції поперечного перетину балки.

Максимальні нормальні напруження при згині за нормальними напруженнями дорівнюють

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{зГ \max}}{I_X} \cdot y_{\max} = \frac{M_{зГ}}{W_0} ,$$

де y_{\max} – координата точки поперечного перетину балки максимально віддаленої від осі X .

W_0 – осьовий момент опору поперечного перетину балки,

$$W_0 = \frac{I_X}{y_{\max}} .$$

Для балки, виготовленої з різнорідних матеріалів (рис. 5.4) і навантаженої зовнішнім моментом M , визначимо розподіл внутрішніх силових факторів (згинальних моментів) та нормальних напружень.

Рівняння статки

$$M = M_{зГ.1} + M_{зГ.2} + M_{зГ.3} , \quad (5.8)$$

де $M_{зГ.1}$, $M_{зГ.2}$, $M_{зГ.3}$ – згинальні моменти, що виникають у кожному з елементів балки.

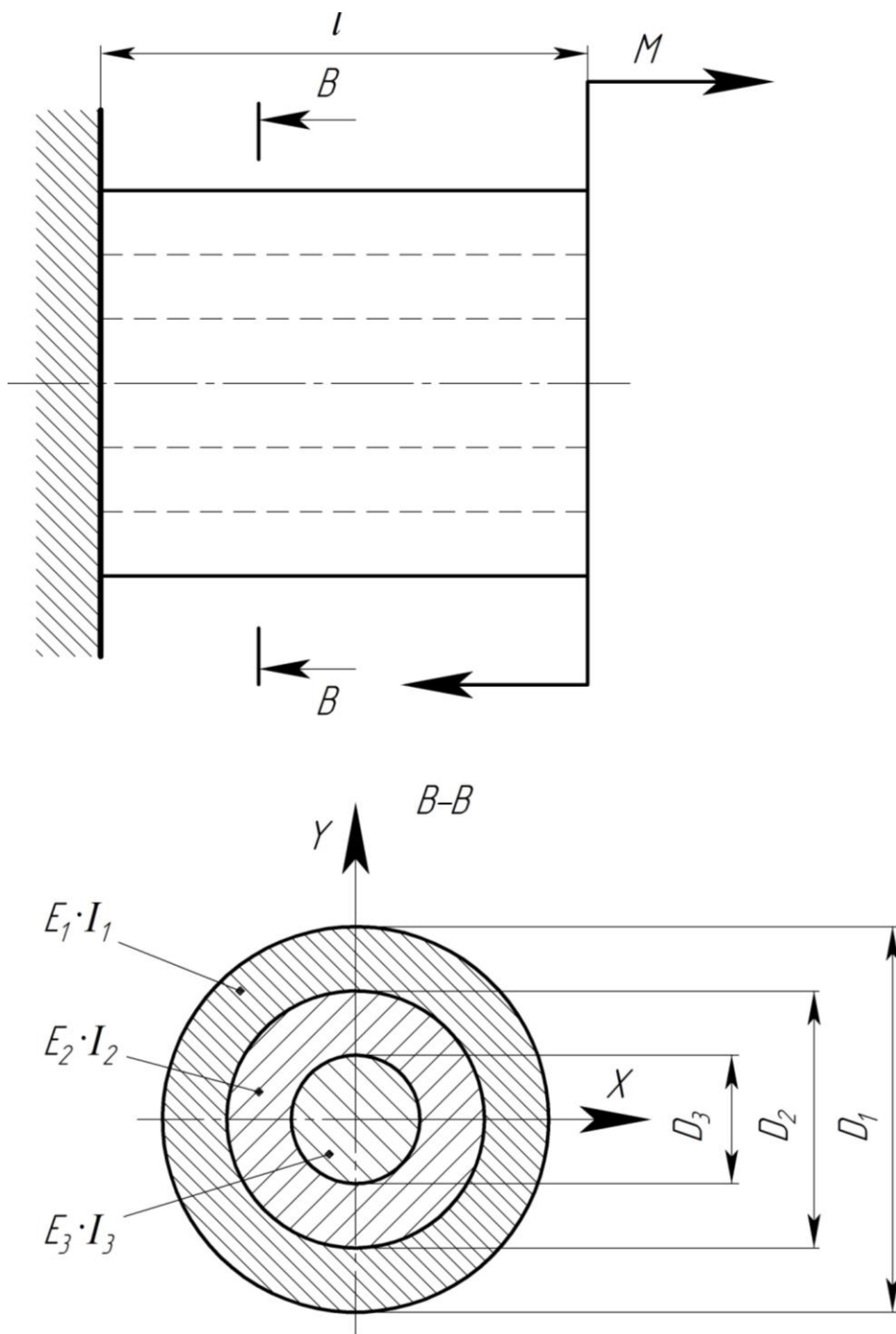


Рисунок 5.4

Система $3-1=2$ рази статично невизначена. Для визначення згинальних моментів запишемо рівняння сумісності деформацій:

$$\frac{1}{\rho} = \Theta ,$$

або

$$\frac{M_{3\Gamma.1}}{E_1 \cdot I_1} = \frac{M_{3\Gamma.2}}{E_2 \cdot I_2} = \frac{M_{3\Gamma.3}}{E_3 \cdot I_3}, \quad (5.9)$$

де ρ – радіус кривизни осі балки;

Θ – кут повороту поперечного перетину;

I_1, I_2, I_3 – осьові моменти інерції поперечних перетинів кожного з елементів балки.

З рівняння (5.9) отримаємо:

$$M_{3\Gamma.2} = M_{3\Gamma.1} \cdot \frac{E_2 \cdot I_2}{E_1 \cdot I_1}; \quad (5.10)$$

$$M_{3\Gamma.3} = M_{3\Gamma.1} \cdot \frac{E_3 \cdot I_3}{E_1 \cdot I_1}. \quad (5.11)$$

Для визначення $M_{3\Gamma.1}$ підставимо (5.10) і (5.11) у рівняння (5.9)

$$M = M_{3\Gamma.1} + M_{3\Gamma.1} \frac{E_2 \cdot I_2}{E_1 \cdot I_1} + M_{3\Gamma.1} \frac{E_3 \cdot I_3}{E_1 \cdot I_1},$$

або

$$M \cdot E_1 \cdot I_1 = M_{3\Gamma.1} \cdot E_1 \cdot I_1 + M_{3\Gamma.1} \cdot E_2 \cdot I_2 + M_{3\Gamma.1} \cdot E_3 \cdot I_3.$$

Кожен елемент балки (див. рис. 5.4) сприймає згинальний момент, величину якого можна визначити за такими залежностями:

$$M_{3\Gamma.1} = M \cdot \frac{E_1 \cdot I_1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3};$$

$$M_{3\Gamma.2} = M \cdot \frac{E_2 \cdot I_2}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3};$$

$$M_{3\Gamma.3} = M \cdot \frac{E_3 \cdot I_3}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3}.$$

Нормальні напруження у кожному з елементів балки (див. рис. 5.4) визначаємо за формулами:

- перший елемент

$$\sigma_1(y_1) = \frac{M_{3Г.1}}{I_1} \cdot y_1 = M \cdot \frac{E_1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3} \cdot y_1,$$

$$\text{де } \frac{D_1}{2} \geq y_1 \geq \frac{D_2}{2};$$

- другий елемент

$$\sigma_2(y_2) = \frac{M_{3Г.2}}{I_2} \cdot y_2 = M \cdot \frac{E_2}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3} \cdot y_2,$$

$$\text{де } \frac{D_2}{2} \geq y_2 \geq \frac{D_3}{2};$$

- третій елемент

$$\sigma_3(y_3) = \frac{M_{3Г.3}}{I_3} \cdot y_3 = M \cdot \frac{E_3}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3} \cdot y_3,$$

$$\text{де } \frac{D_3}{2} \geq y_3 \geq 0.$$

Для розглядуваного поперечного перетину (див. рис. 5.4) осьові моменти інерції поперечних перетинів кожного з елементів відносно осі X:

$$I_1 = \frac{\pi \cdot D_1^4}{64} (1 - \alpha_1^4);$$

$$I_2 = \frac{\pi \cdot D_2^4}{64} (1 - \alpha_2^4);$$

$$I_3 = \frac{\pi \cdot D_3^4}{64},$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{D_2}{D_1}; \quad \alpha_2 = \frac{D_3}{D_2}.$$

ПРИКЛАДИ

Приклад 5.1. Коротка дерев'яна колона поперечного перетину 25 см х 25 см, підсилена чотирма кутниками 40 мм х 40 мм х 4 мм, стискається силою F , що передається через абсолютну жорстку плиту (рис. 5.5а). Визначити допустиме значення сили $[F]$.

Допустимі напруження та модулі пружності матеріалів колони:

- дерева $[\sigma]_д = 12$ МПа; $E_д = 1 \cdot 10^4$ МПа;

- сталі $[\sigma]_{ст} = 160$ МПа; $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв'язування

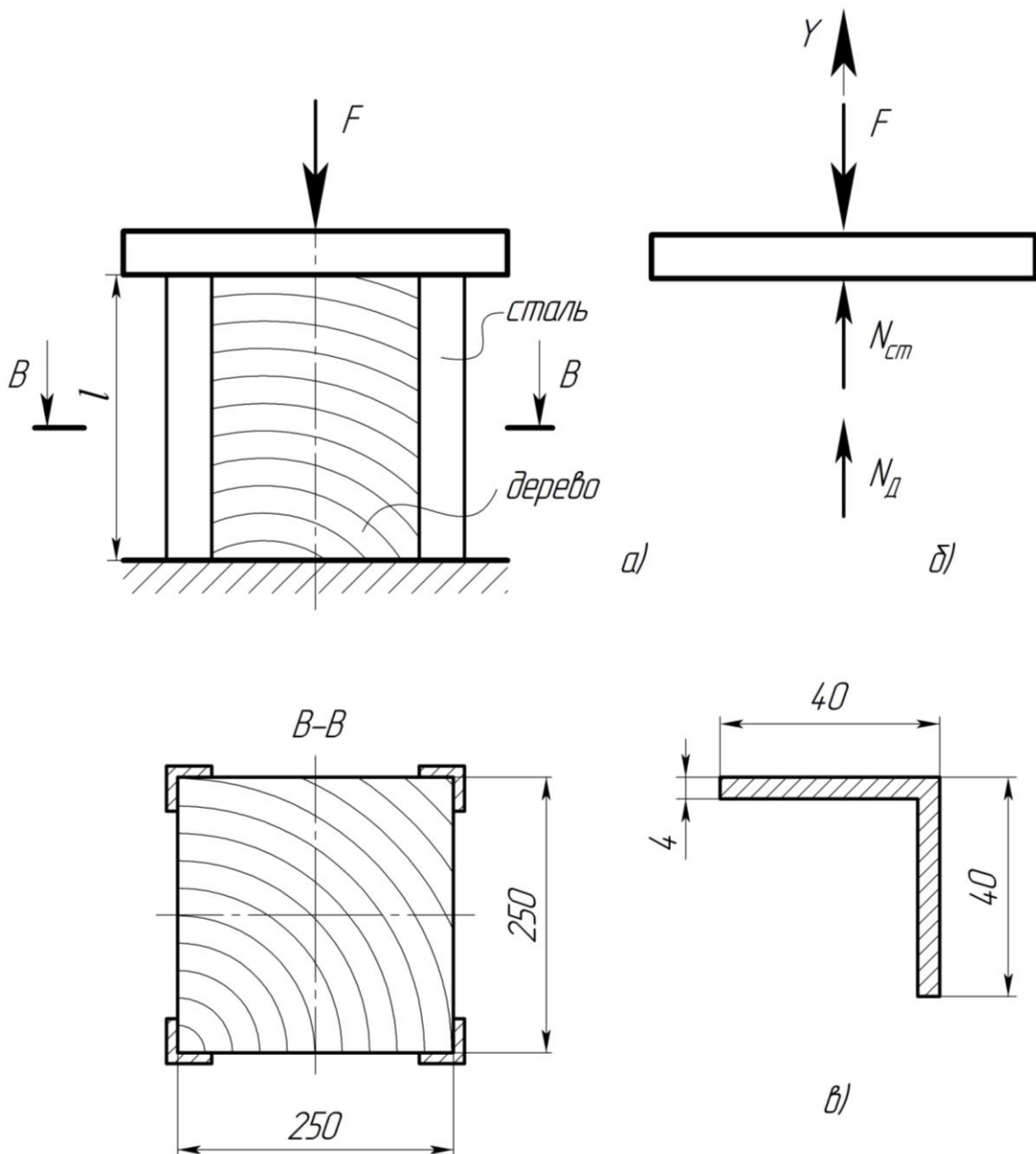


Рисунок 5.5

Для визначення стискаючих сил N_D і N_{cm} , що виникають у дерев'яній і сталевій частинах колони розглянемо рівновагу плити (рис. 5.5б):

$$\sum Y = -F + N_{cm} + N_D = 0. \quad (5.12)$$

Система один раз статично невизначена.

Для визначення внутрішніх силових факторів складаємо рівняння сумісності деформацій

$$\Delta l_{cm} = \Delta l_D,$$

або

$$\frac{N_{cm} \cdot l}{E_{cm} \cdot A_{cm}} = \frac{N_D \cdot l}{E_D \cdot A_D},$$

звідки

$$N_{cm} = \frac{N_D \cdot l \cdot E_{cm} \cdot A_{cm}}{E_D \cdot A_D \cdot l} = N_D \cdot \frac{E_{cm} \cdot A_{cm}}{E_D \cdot A_D}, \quad (5.13)$$

де A_{cm} , A_D – площі поперечних перетинів відповідно сталевій та дерев'яній частин колони, (рис. 5.5а, в);

$$A_{cm} = 4 (40 \cdot 4 + 36 \cdot 4) = 1216 \text{ мм}^2;$$

$$A_D = 250 \cdot 250 = 62500 \text{ мм}^2;$$

E_{cm} , E_D – модулі пружності сталі та дерева.

Підставивши значення у (5.13), отримаємо

$$N_{cm} = N_D \cdot \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1216}{1 \cdot 10^4 \cdot 62500} = 0,389 \cdot N_D. \quad (5.14)$$

Підставивши (5.14) у (5.12), визначимо стискаючу силу N_D у поперечному перетині дерев'яної колони:

$$-F + 0,389 \cdot N_D + N_D = 0,$$

звідки

$$N_D = \frac{F}{0,389 + 1} = 0,72 F.$$

Відповідно стискаюча сила N_{cm} у сталевій частині колони

$$N_{cm} = 0,389 \cdot 0,72 F = 0,28 F.$$

З умови міцності на стиск

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

визначаємо допустимі значення сил, що діють на колону.

Запишемо умови міцності для

- дерев'яної частини колони:

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A_D} \leq [\sigma_D];$$

або

$$\frac{0,72 F_D}{A_D} \leq [\sigma_D] = 12 \text{ МПа} = 12 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

звідки

$$F_D \leq \frac{12 \cdot 62500}{0,72} = 1,04 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1,04 \text{ МН};$$

- сталевій частині колони

$$\sigma_{cm} = \frac{F_{cm}}{A_{cm}} \leq [\sigma]_{cm};$$

або

$$\frac{0,28 F_{cm}}{A_{cm}} \leq [\sigma]_{cm} = 160 \text{ МПа} = 160 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

звідки

$$F_{cm} \leq \frac{160 \cdot 1216}{0,28} = 0,695 \cdot 10^6 \text{ Н} = 0,695 \text{ МН}.$$

З двох отриманих значень сил приймаємо меншу, визначену з умови міцності для сталі. Отже, допустима сила стиску колони $[F] = 0,695 \text{ МН}$.

Приклад 5.2. Для балки (рис. 5.6) складеної з двох круглих поперечних перетинів ($D = 2d$) побудувати епюри розподілу нормальних напружень по висоті перетину від дії згинального моменту M . Ковзання сердечника відсутнє, прийняти $E_1 = 8 E_2$.

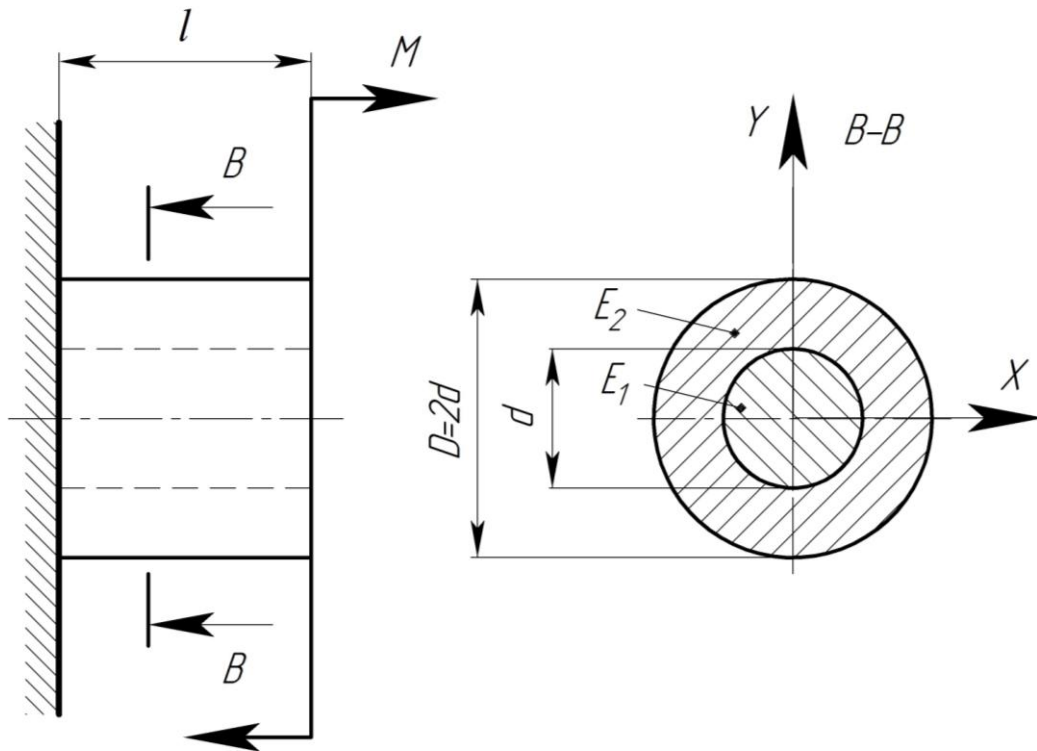


Рисунок 5.6

Розв'язування

Загальний зовнішній момент M , який згинає балку, розподілений між двома матеріалами.

Рівняння статки

$$M = M_{зг.1} + M_{зг.2}. \quad (5.15)$$

Рівняння сумісності деформацій

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{зг.1}}{E_1 \cdot I_1} = \frac{M_{зг.2}}{E_2 \cdot I_2}, \quad (5.16)$$

де ρ – радіус кривизни пружної осі балки.

З рівняння сумісності деформацій (5.16) визначимо

$$M_{3Г.1} = M_{3Г.2} \cdot \frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2}. \quad (5.17)$$

Для визначення $M_{3Г.2}$ підставимо (5.17) у (5.15) і отримаємо

$$M = M_{3Г.2} \cdot \frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2} + M_{3Г.2},$$

тоді

$$M_{3Г.2} = M \cdot \frac{1}{\frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2} + 1} = M \cdot \frac{E_2 \cdot I_2}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2};$$

$$M_{3Г.1} = M \cdot \frac{E_2 \cdot I_2}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2} \cdot \frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2} = M \cdot \frac{E_1 \cdot I_1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2} = M \cdot \frac{\frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2}}{\frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2} + 1}.$$

де I_1, I_2 – осьові моменти інерції поперечних перетинів кожного з елементів балки:

$$I_1 = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$$

$$I_2 = \frac{\pi \cdot (2d)^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4).$$

Визначимо співвідношення згинальних жорсткостей двох поперечних перетинів

$$\frac{E_1 \cdot I_1}{E_2 \cdot I_2} = \frac{8 E_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}}{E_2 \cdot \frac{\pi (2d)^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4)} = \frac{1}{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right)} = \frac{8}{15}.$$

де α – відношення діаметрів поперечних перетинів елементів балки

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}.$$

Отже, згинальні моменти у поперечних перетинах балки

$$M_{3\Gamma.1} = M \cdot \frac{\frac{8}{15}}{\frac{8}{15} + 1} = \frac{8}{23} M ;$$

$$M_{3\Gamma.2} = M \cdot \frac{1}{\frac{8}{15} + 1} = \frac{15}{23} M .$$

Визначимо нормальні напруження для двох елементів балки (рис. 5.7а) за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\Gamma \max}}{I_X} \cdot y_{\max} .$$

Перший елемент.

Точка O : $y_{\max} = 0$;

$$\sigma_0 = \frac{M_{3\Gamma.1}}{I_1} \cdot 0 = 0 .$$

Точка 11, $y_{\max} = y_{11} = \frac{d}{2}$;

$$\sigma_{11} = \frac{M_{3\Gamma.1}}{I_1} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\frac{8}{23} M}{\frac{\pi \cdot d^4}{64}} \cdot \frac{d}{2} = 11,1 \frac{M}{\pi \cdot d^3} .$$

Другий елемент.

Точка 12, $y_{\max} = y_{12} = \frac{d}{2}$:

$$\sigma_{12} = \frac{M_{3\Gamma.2}}{I_2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\frac{15}{23} M}{\frac{\pi (2d)^4 (1 - \alpha^4)}{64}} \cdot \frac{d}{2} = 1,39 \frac{M}{\pi \cdot d^3} .$$

Точка 2, $y_{\max} = y_2 = d$:

$$\sigma_2 = \frac{M_{3\Gamma.2}}{I_2} \cdot d = \frac{\frac{15}{23} M}{\frac{\pi (2d)^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4)} \cdot d = 2,78 \frac{M}{\pi \cdot d^3}.$$

За отриманими результатами будемо епюру розподілу нормальних напружень по висоті перетину залежно від величини зовнішнього моменту M та розміру d (рис. 5.7б).

При необхідності визначення тільки відношень максимальних напружень серцевини та пустотілого перетину розраховуємо максимальні нормальні напруження:

- серцевини

$$\sigma_{\max .1} = \frac{M_{3\Gamma.1}}{I_1} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M \cdot E_1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2} \cdot \frac{d}{2};$$

- пустотілого перетину

$$\sigma_{\max .2} = \frac{M_{3\Gamma.2}}{I_2} \cdot d = \frac{M \cdot E_2}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2} \cdot d.$$

Визначимо відношення максимальних нормальних напружень

$$\frac{\sigma_{\max .1}}{\sigma_{\max .2}} = \left(\frac{M \cdot E_1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2} \cdot \frac{d}{2} \right) \div \left(\frac{M \cdot E_2}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2} \cdot d \right) = \frac{E_1}{2 E_2}.$$

Враховуючи, що $E_1 = 8E_2$, отримаємо

$$\sigma_{\max .1} = 4 \cdot \sigma_{\max .2}.$$

Епюра розподілу нормальних напружень залежно від максимальних напружень $\sigma_{\max .2}$ показана на рисунку 5.7в.

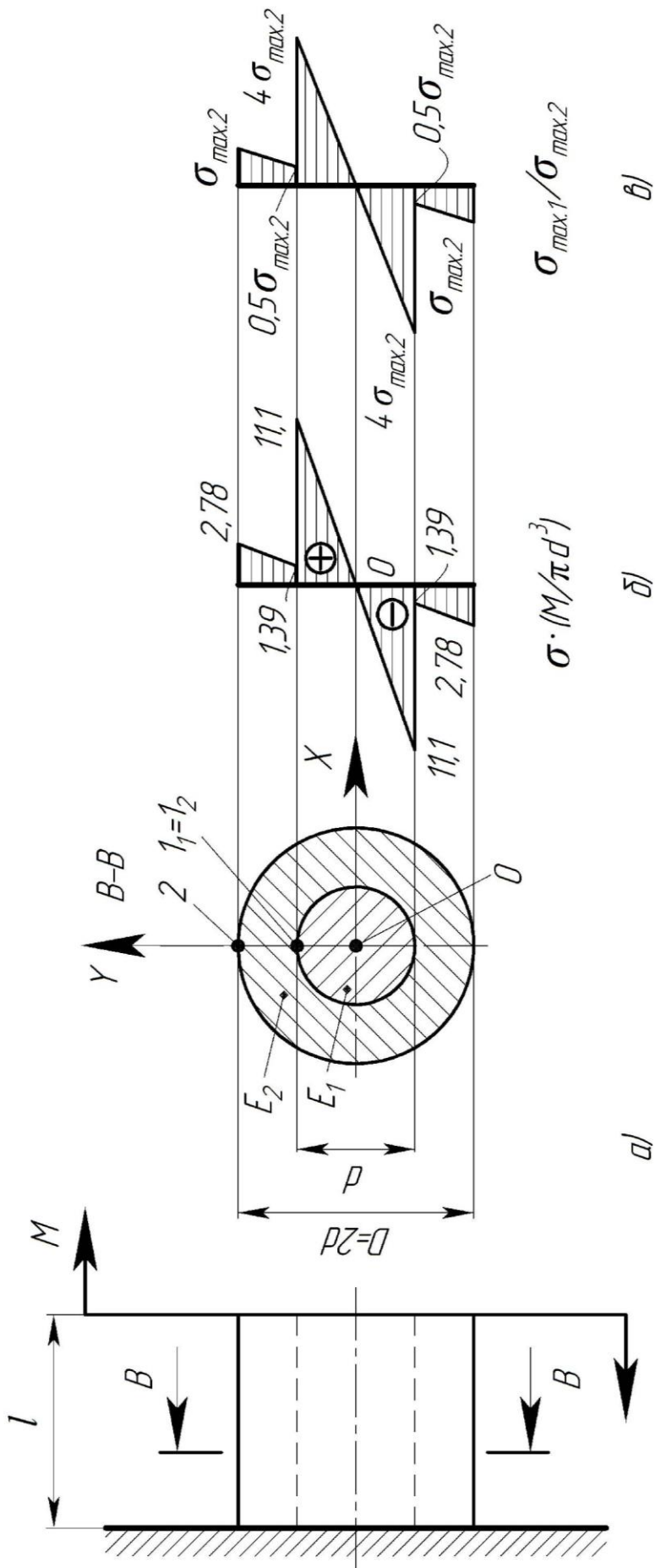


Рисунок 5.7

Приклад 5.3. У поперечному перетині вала, що має круглий багат шаровий поперечний перетин (рис. 5.8), діє момент M . Визначити розподіл крутного моменту для кожного шару; побудувати епюру дотичних напружень, якщо шари жорстко зв'язані один з одним контактними поверхнями. Модулі зсуву матеріалів шарів вала співвідносяться так: $G_1 = 2 G_2 = 4 G_3$.

Розв'язування

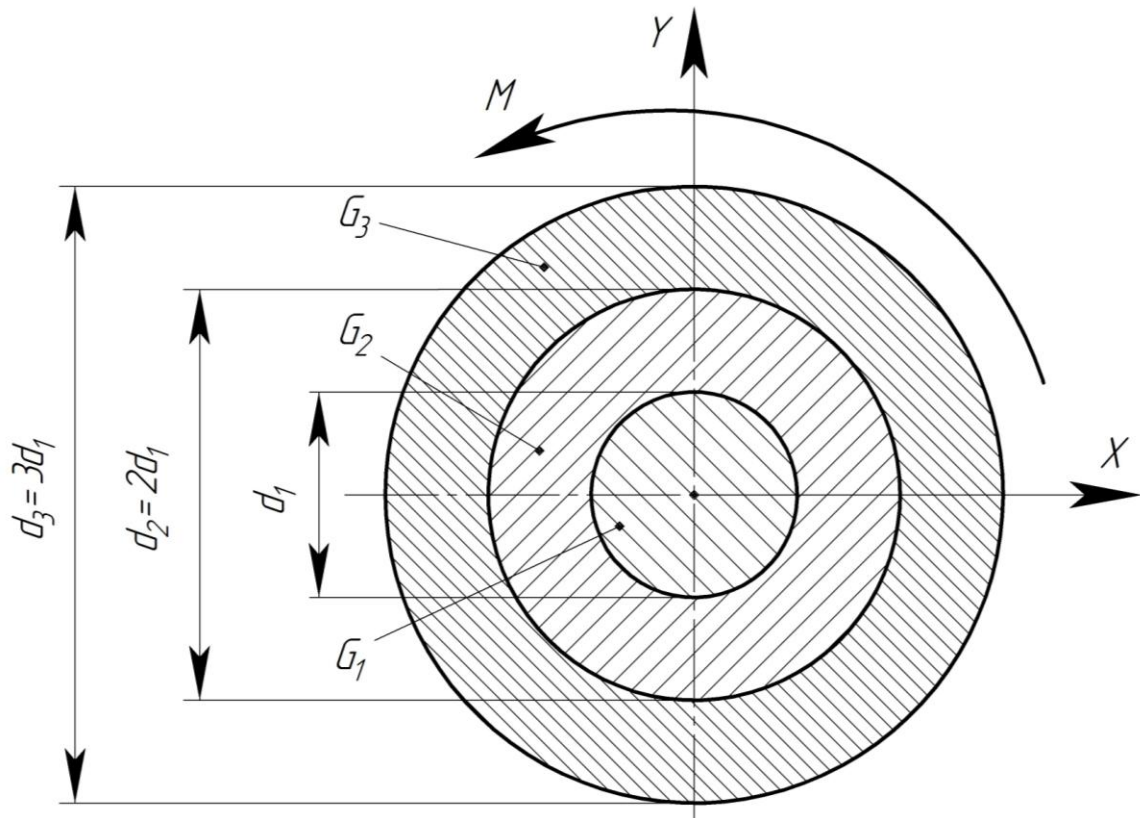


Рисунок 5.8

Складаємо рівняння рівноваги багат шарового перетину:

$$M = M_{KP.1} + M_{KP.2} + M_{KP.3} , \quad (5.18)$$

де $M_{KP.1}$, $M_{KP.2}$, $M_{KP.3}$ – крутні моменти, що виникають у кожному з елементів вала

Система $3-1=2$ рази статично невизначена.

Для визначення внутрішніх силових факторів складемо додаткове рівняння сумісності деформацій:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 ,$$

або

$$\frac{M_{KP.1}}{G_1 \cdot I_{P1}} = \frac{M_{KP.2}}{G_2 \cdot I_{P2}} = \frac{M_{KP.3}}{G_3 \cdot I_{P3}};$$

звідки

$$M_{KP.2} = M_{KP.1} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1}}; \quad (5.19)$$

$$M_{KP.3} = M_{KP.1} \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1}}, \quad (5.20)$$

де I_{P1}, I_{P2}, I_{P3} – полярні моменти інерції поперечних перетинів кожного з елементів вала

Підставивши величини з рівнянь (5.19) і (5.20) у (5.18), отримаємо:

$$M = M_{KP.1} + M_{KP.1} \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1}} + M_{KP.1} \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1}},$$

звідки

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{KP.1} = M \cdot \frac{G_1 \cdot I_{P1}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}}; \\ M_{KP.2} = M \cdot \frac{G_2 \cdot I_{P2}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}}; \\ M_{KP.3} = M \cdot \frac{G_3 \cdot I_{P3}}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}}. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

З співвідношення

$$G_1 = 2 G_2 = 4 G_3 ,$$

визначимо, що

$$G_1 = 4 G_3 ; \quad G_2 = 2 G_3 .$$

Полярні моменти інерції кожного шару поперечного перетину (рис. 5.9а)

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} ;$$

$$I_{P2} = \frac{\pi (2 d_1)^4}{32} \cdot (1 - \alpha_1^4) = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} \cdot \left[2^4 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) \right] = 15 I_{P1} ;$$

$$I_{P3} = \frac{\pi (3 d_1)^4}{32} \cdot (1 - \alpha_1^4) = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} \cdot \left[3^4 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^4 \right) \right] = 65 I_{P1} ;$$

де $\alpha_1 = \frac{d_1}{2 d_1} = \frac{1}{2} ; \quad \alpha_2 = \frac{2 d_1}{3 d_1} = \frac{2}{3} .$

Отримані результати підставимо у рівняння (5.21)

$$\left\{ \begin{aligned} M_{KP.1} &= M \cdot \frac{4 G_3 \cdot I_{P1}}{4 G_3 \cdot I_{P1} + 2 G_3 \cdot 15 I_{P1} + 65 I_{P1}} = \frac{4}{99} M_{KP} ; \\ M_{KP.2} &= M \cdot \frac{2 G_3 \cdot 15 I_{P1}}{4 G_3 \cdot I_{P1} + 2 G_3 \cdot 15 I_{P1} + G_3 \cdot 65 I_{P1}} = \frac{30}{99} M_{KP} ; \\ M_{KP.3} &= M \cdot \frac{G_3 \cdot 65 I_{P1}}{4 G_3 \cdot I_{P1} + 2 G_3 \cdot 15 I_{P1} + G_3 \cdot 65 I_{P1}} = \frac{65}{99} M_{KP} . \end{aligned} \right.$$

Для побудови епюри розподілу дотичних напружень по висоті перетину, визначаємо дотичні напруження з умови міцності на кручення

$$\tau = \frac{M_{KP.i}}{I_{Pi}} \cdot \rho_i ,$$

у характерних точках поперечного перетину кожного матеріалу.

Матеріал 1:

точка 0; $\rho_0 = 0$,

$$\tau_{1.0} = 0 ;$$

точка 1; $\rho_1 = \frac{d_1}{2}$,

$$\tau_{1.1} = \tau_{1.\max} = \frac{M_{KP.1}}{I_{P1}} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{4}{99} \cdot \frac{M}{W_{P1}}.$$

Матеріал 2,

точка 1; $\rho_1 = \frac{d_1}{2}$,

$$\tau_{2.1} = \tau_{2.\min} = \frac{M_{KP.2}}{I_{P2}} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{30}{99} \cdot \frac{M}{15 \cdot I_{P1}} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{2}{99} \cdot \frac{M}{W_{P1}} ;$$

точка 2; $\rho_2 = d_1$,

$$\tau_{2.2} = \tau_{2.\max} = \frac{M_{KP.2}}{I_{P2}} \cdot d_1 = \frac{30}{99} \cdot \frac{M}{15 \cdot I_{P1}} \cdot d_1 = \frac{4}{99} \cdot \frac{M}{W_{P1}}.$$

Матеріал 3,

точка 2; $\rho_2 = d_1$,

$$\tau_{3.2} = \tau_{3.\min} = \frac{M_{KP.3}}{I_{P3}} \cdot d_1 = \frac{65}{99} \cdot \frac{M}{65 \cdot I_{P1}} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{2}{99} \cdot \frac{M}{W_{P1}} ;$$

точка 3; $\rho_3 = \frac{3}{2} d_1$,

$$\tau_{3.3} = \tau_{3.\max} = \frac{M_{KP.3}}{I_{P3}} \cdot \frac{3}{2} d_1 = \frac{30}{99} \cdot \frac{M}{15 I_{P1}} \cdot \frac{3}{2} d_1 = \frac{3}{99} \cdot \frac{M}{W_{P1}},$$

тут W_{P1} - полярний момент опору поперечного перетину серцевини вала,

$$W_{P1} = \frac{I_{P1}}{d_1/2} = \frac{\pi \cdot d_1^4 / 32}{d_1/2} = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16}.$$

За отриманими даними будемо епюру розподілу дотичних напружень (рис. 5.9б).

Якщо потрібно визначити лише співвідношення максимальних дотичних напружень використовуємо такі залежності:

$$\tau_{1.\max} = \frac{M_{KP.1}}{I_{P1}} \cdot \frac{d_1}{2} = M \cdot \frac{G_1}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \frac{d_1}{2};$$

$$\tau_{2.\max} = \frac{M_{KP.2}}{I_{P2}} \cdot d_1 = M \cdot \frac{G_2}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot d_1;$$

$$\tau_{3.\max} = \frac{M_{KP.3}}{I_{P3}} \cdot \frac{2}{3} d_1 = M \cdot \frac{G_3}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \frac{2}{3} d_1;$$

$$\tau_{1.\min} = 0;$$

$$\tau_{2.\min} = \frac{M_{KP.2}}{I_{P2}} \cdot \frac{d_1}{2} = M \cdot \frac{G_2}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot \frac{d_1}{2};$$

$$\tau_{3.\min} = \frac{M_3}{I_{P3}} \cdot d_1 = M \cdot \frac{G_3}{G_1 \cdot I_{P1} + G_2 \cdot I_{P2} + G_3 \cdot I_{P3}} \cdot d_1.$$

Співвідношення дотичних напружень складають (рис. 5.9б)

$$(\tau_{1.\min} : \tau_{1.\max}) : (\tau_{2.\min} : \tau_{2.\max}) : (\tau_{3.\min} : \tau_{3.\max}) = (0 : 4) : (2 : 4) : (2 : 3).$$

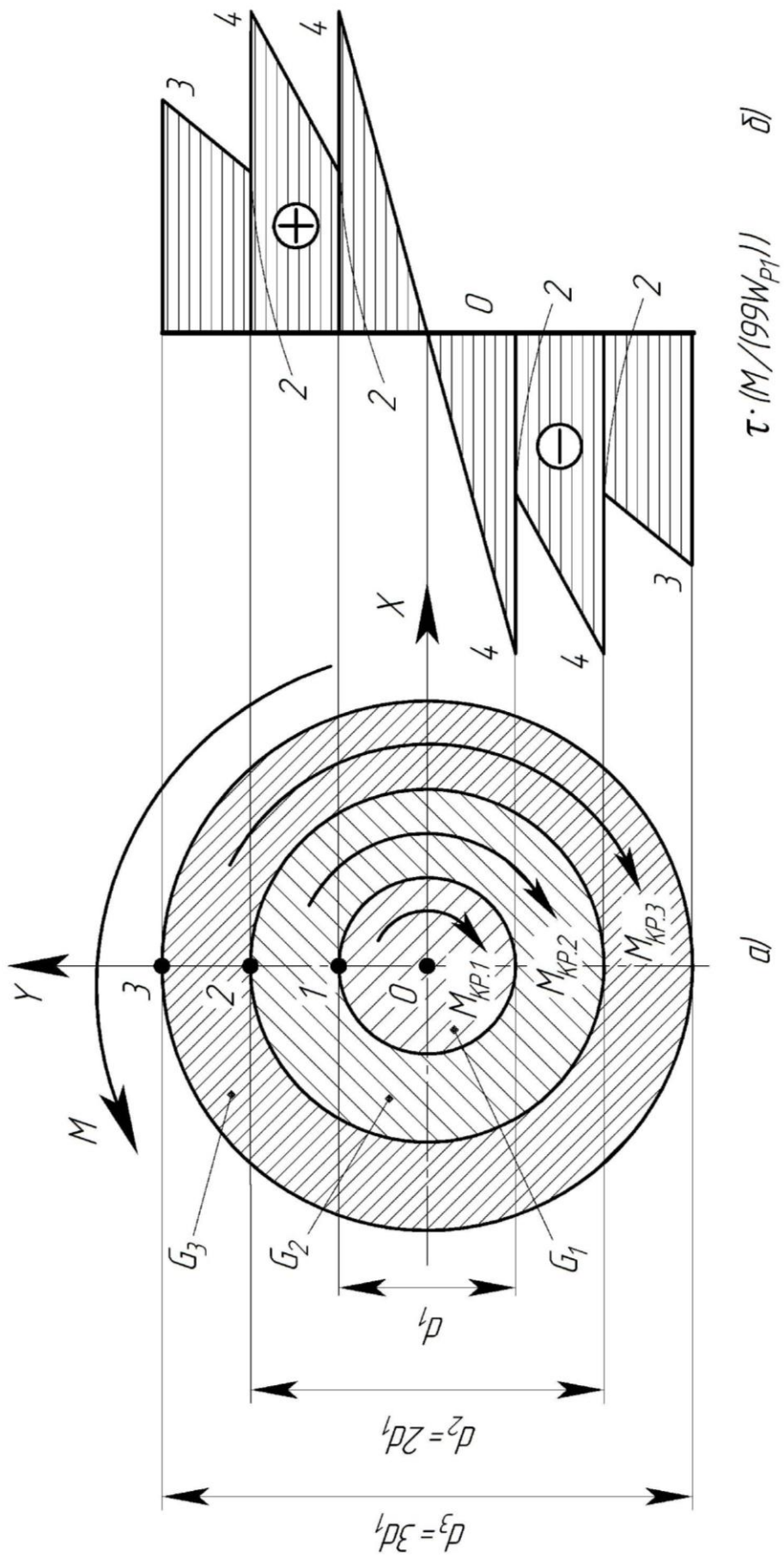
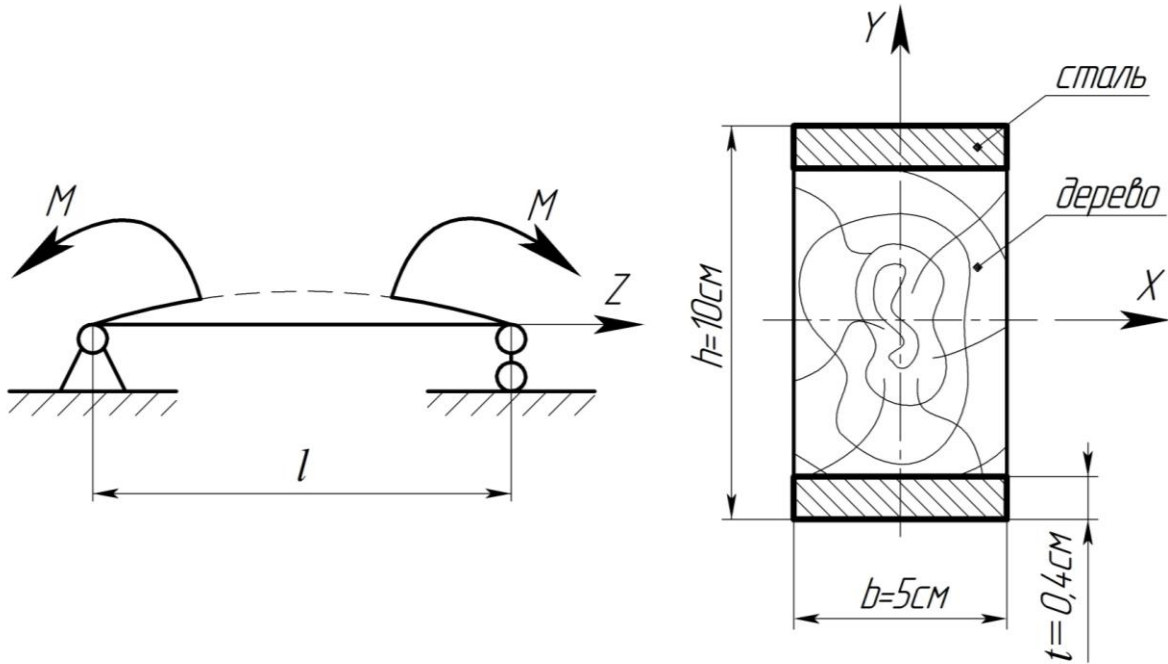


Рисунок 5.9

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 5.1. Балка складається з дерев'яної частини і сталевих зовнішніх накладок і навантажена моментом M . Всі частини балки щільно з'єднанні та деформуються однаково. Побудувати епюру розподілу нормальних напружень по висоті поперечного перетину, якщо $M = 20$ кНм; $E_{\text{стали}} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_{\text{дерева}} = 1 \cdot 10^4$ МПа.

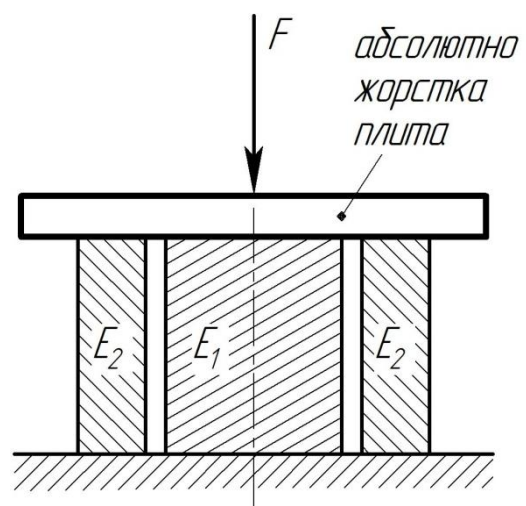


Задача 5.2. Для конструкції, що складається з круглого сердечника та труби виготовлених з різних матеріалів, через жорстку плиту прикладена сила F . Після прикладення навантаження F температура зростає на Δt° . Визначити розподіл зусиль до і після зміни температури, якщо

$$E_1 = 2 E_2;$$

$$A_1 = 1,5 A_2;$$

$$1,2 \alpha_1 = \alpha_2.$$



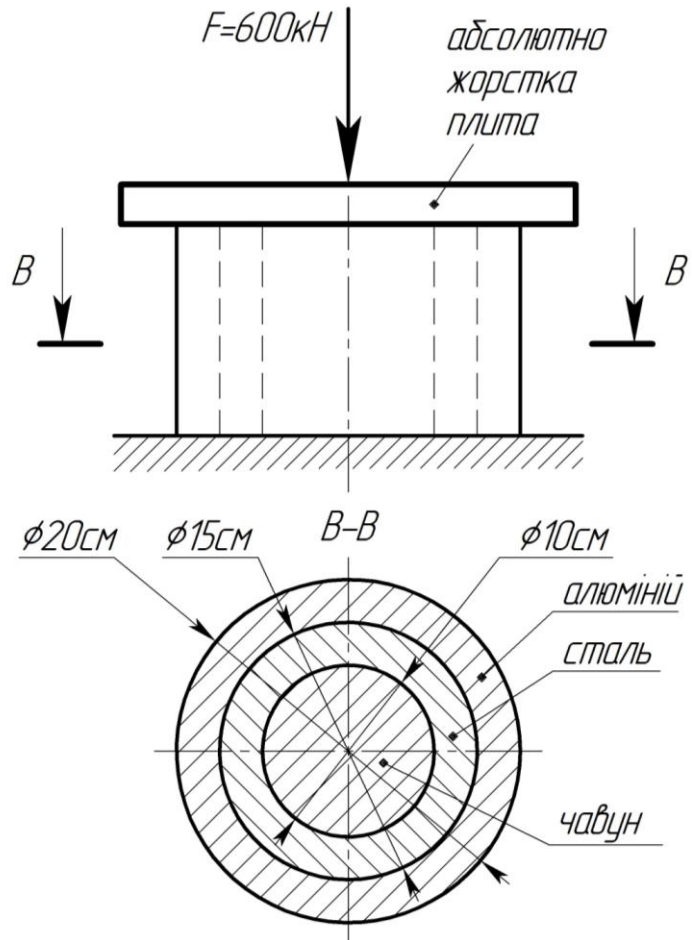
Задача 5.3.

Короткий чавунний брус вільно вставлений у сталеву трубу, яка поміщена в алюмінієву. Визначити напруження у поперечних перетинах бруса та труб, якщо:

$$E_{\text{стали}} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$E_{\text{чавуну}} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$E_{\text{алюмінію}} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$



Задача 5.4.

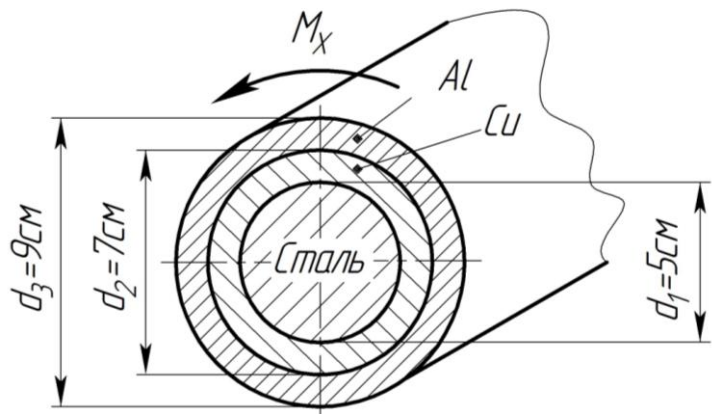
Вал круглого багатшарового перетину (алюміній, мідь, сталь). Матеріали жорстко зв'язані один з одним контактними поверхнями. Визначити: розподіл моментів для кожного шару; побудувати епюру розподілу дотичних напружень.

Дано: $M_x = 100 \text{ Нм}$;

$$G_{\text{стали}} = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

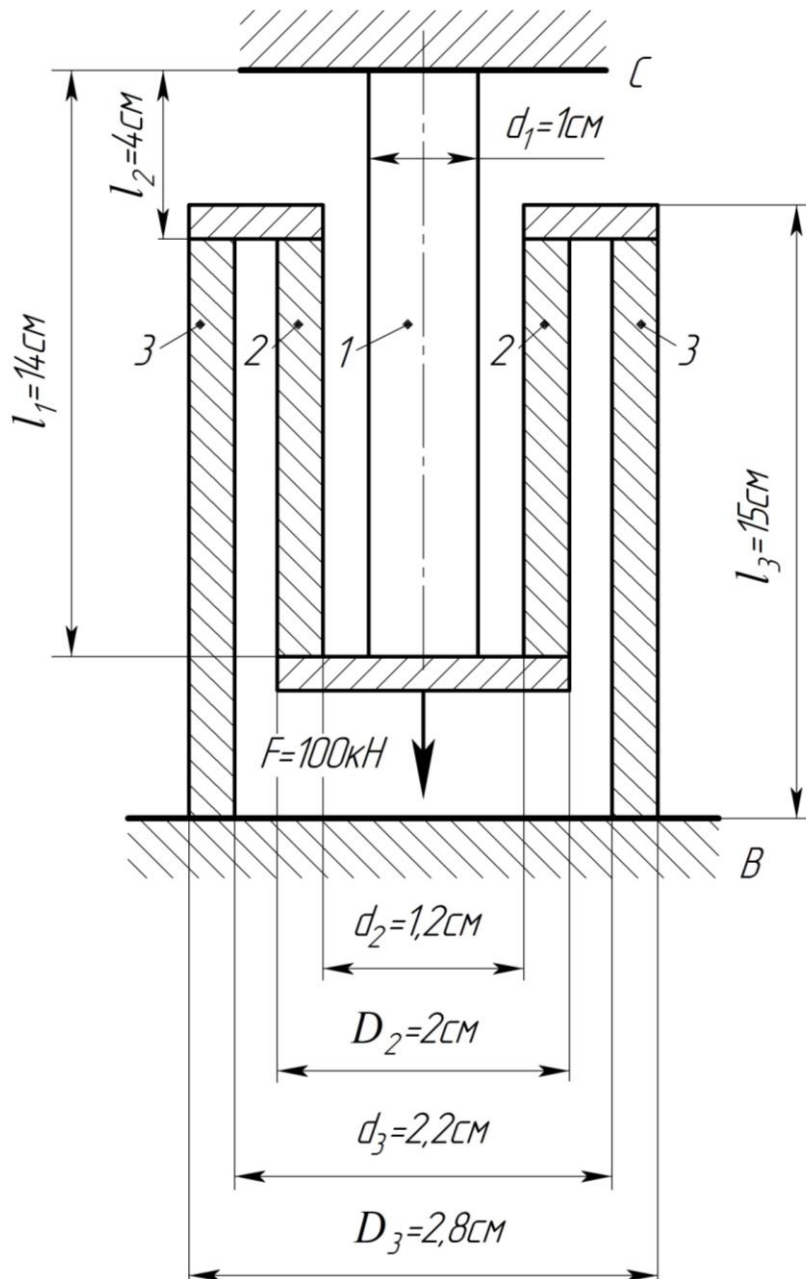
$$G_{\text{міді}} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$G_{\text{алюмінію}} = 0,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$



Задача 5.5. Три концентрично розташовані циліндри утворюють систему. Диски, які з'єднують циліндри та опорні поверхні є абсолютно жорсткими. Визначити: напруження, які діють у поперечному перетині кожного із циліндрів; переміщення дисків.

Дано: $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $E_3 = 1,1 \cdot 10^5$ МПа.



ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1969.
3. Довбуш А.Д. Конкурсні задачі з Опору матеріалів для студентів напряму підготовки «Інженерна механіка» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2003. – 58 с.
4. Довбуш А.Д. Конкурсні задачі з Опору матеріалів для студентів напрямів підготовки «Інженерна механіка», «Машинобудування», «Будівництво» / А.Д. Довбуш, Хомик Н.І., Ферендюк О.В. – Тернопіль, 2010. – 76 с.
5. Довбуш А.Д. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Визначення переміщень при згині» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2006. – 35 с.
6. Довбуш А.Д. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Розрахунок кривих брусів. Розрахунок на стійкість центрально стиснутих стержнів» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2002. – 30 с.
7. Довбуш А.Д. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Складний опір» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2001. – 32 с.
8. Довбуш А.Д. Методичні вказівки до виконання контрольних завдань з опору матеріалів «Статично невизначені системи» / Т.І. Рибак, А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2007. – 35 с.
9. Довбуш А.Д. Опір матеріалів. Методичний посібник для виконання контрольних робіт. / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль, 2011. – 92 с.
10. Довбуш А.Д. Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання курсової роботи для студентів напрямів підготовки «Машинобудування», «Інженерна механіка», «Зварювання», «Автомобільний транспорт» денної та заочної форм навчання / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. І. Пулюя, 2014. – 191 с.
11. Довбуш А.Д. Опір матеріалів: навчально-методичний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напряму підготовки «Будівництво» / А.Д. Довбуш, Н.І. Хомик, Г.М. Крамар. – Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2015. – 76 с.
12. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов / Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
13. Миролубов И.Н. Посobie к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролубов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сергиевский и др. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.
14. Опір матеріалів / За ред. С.Е. Гарфа. – К.: Вища школа, 1972. – 230 с.
15. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / За заг. ред. В.Т. Піскунова: у 2ч., 5 кн. – К.: Вища школа, 1995.
16. Опір матеріалів. Теорія і практика розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів механізмів та споруд: навч. посібник / В.С. Кравчук, П.М. Калініченко, Л.В. Коломієць, О.М. Лимаренко; за ред. О.Ф. Дащенко. – Одеса: ВМВ, 2009. – 316 с.
17. Посацький Л.С. Опір матеріалів / Л.С. Посацький. – Львів: в-во Львівського університету, 1973. – 440 с.
18. Сопротивление материалов / Под ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.
19. Хомик Н.І. Опір матеріалів (спекурс) і основи теорії пружності і пластичності: курс лекцій для студентів напряму підготовки «Будівництво» / Н.І. Хомик, Т.А. Довбуш, Н.А. Рубінець. – Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2017. – 232 с.
20. Хомик Н.І. Технічна механіка: курс лекцій / Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль, 2011. – 208 с.
21. Хомик Н.І. Технічна механіка: навчально-методичний посібник до курсової роботи / Н.І. Хомик, А.Д. Довбуш. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2013. – 192 с.

Додаток А



Додаток Б

ДИПЛОМ І СТУПЕННЯ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАГОРОДЖУЄТЬСЯ

ДОВБУШ ТАРАС АНАТОЛІЙОВИЧ,

*студент Тернопільського національного технічного
університету імені Івана Пулюя*

**ПЕРЕМОЖЕЦЬ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПАДИ**

**З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
„ОПР МАТЕРІАЛІВ”**

Міністр



Д.В. Табачник

Наказ від 27.06.2012
№ 759

Додаток В



Додаток Д

Міністерство освіти і науки України
ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА
ТА АРХІТЕКТУРИ



ДИПЛОМ
III ступеня

нагороджується

Колісник Микола Богданович

Представник
Тернопільського національного технічного
університету ім. Івана Пулюя

за перемогу у II турі Всеукраїнської студентської
олімпіади
з дисципліни «Опір матеріалів»
серед учасників, які вивчали дисципліну
в минулих роках

Заступник голови оргкомітету,
проректор НПР Одеської
державної академії
будівництва
та архітектури



Ю.С. Крутій

15 - 17 травня 2018 року

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

**Кафедра технічної механіки та
сільськогосподарських машин**

**Гевко Роман Богданович
Довбуш Тарас Анатолійович
Хомик Надія Ігорівна
Довбуш Анатолій Дмитрович**

ОПІР МАТЕРІАЛІВ конкурсні задачі, прикладні розв'язування

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для студентів напрямів підготовки:
«Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування»,
«Автомобільний транспорт», «Агроінженерія»

Комп'ютерний набір: Антончак Наталія Андріївна,
Довбуш Тарас Анатолійович

Графічне оформлення: Довбуш Тарас Анатолійович

Папір офсетний. Гарнітура «Таймс». Умов. друк. арк.

Наклад 50 прим.