УДК 517.2
Шилінська У. – ст.гр. ТР-104
*Технічний коледж Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя*

# ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЙ

Науковий керівник: к.пед.н. Фігурська Л.В.

Shylinska U.
*Technical College Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University*

# APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE STUDY OF EPIDEMIC EXTENSIONS

Supervisor: Fihurska L.V.

Ключові слова: похідна, диференціальне числення, інтегральне числення.
Keywords: derivative, differential calculus, integral calculus.

Застосування математичних методів при вивченні епідемій розпочалося ще в середині XVII ст [1]. Серед інших математичних методів, важливу роль у дослідженні епідемічних процесів відіграє математичний аналіз. Одним з найважливіших понять математичного аналізу є похідна функції. Похідна характеризує швидкість зміни деякої функції. Похідна та інтеграл тісно пов'язані. зокрема, похідна використовується, коли треба знайти швидкість зміни чогось, а інтеграл - скільки чогось нагромадилось Завдяки цьому і диференціальне, і інтегральне числення отримали застосування у різних аспектах людського життя, серед яких є медицина. Розглянемо приклади.

**Приклад 1.** На деякій заселеній людьми території виникла епідемія. У більшості людей відсутній імунітет. Відсоток тих, хто занедужав протягом *t* діб, можна зобразити таким чином: $p(t) = 0{,}001(15t^2 - t^3)$, де $0 \le t \le 15$. Яка кількість мешканців захворіє до завершення третьої доби? Скільки діб відсоток тих, що занедужали, буде збільшуватися? На яку добу епідемія почне згасати?

**Розв'язання.** Щоб знати кількість мешканців, які захворіють до завершення третьої доби знайдемо значення функції за вказаним часом *(t=3)*:

$$p(t) = 0{,}001(15 \cdot 3^2 - 3^3) = 0{,}108$$

Отже, до завершення третьої доби захворіє 10,8% мешканців.

Щоб відповісти на наступні два запитання треба знайти проміжки зростання та спадання даної функції. Для цього знайдемо похідну:

$$y' = 0{,}001(30t - 3t^2) = 0{,}003t(10 - t)$$

Оскільки час $t \ge 0$, то на відрізку [0; 15] існує єдина точка, в якій похідна дорівнює нулю. Ця точка розбиває проміжки [0;15] на два проміжки [0;10) та (10;15].

На основі достатньої ознаки зростання (спадання) функції на проміжку [0;10) $y'(t)>0$ - отже, функція зростає, а на проміжку (10;15] $y'(t)<0$ - отже, функція спадає.

Отримані результати проміжків зростання та спадання дають змогу зрозуміти, що протягом 10 діб відсоток людей, що захворіли, буде зростати, а на початку 11-ї доби епідемія піде на спад.

Отже, 10.8% людей захворіє до кінця третьої доби; 10 діб відсоток хворих буде зростати і лише на 11-у добу піде на спад.

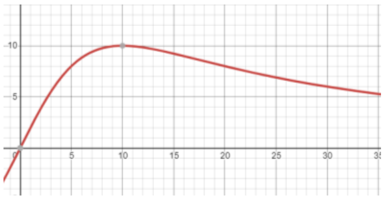
**Приклад 2.** Кількість хворих *p(t)* під час епідемії грипу змінювалась з часом *t* (вимірюється днями) від початку вакцинації населення за законом $p(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$ Визначте час піку (максимуму) захворювання, інтервали його зростання і спадання та побудуйте графік заданої функції.

**Розв'язання.** Областю визначення функції (і враховуючи, що час $t \geq 0$) є множина всіх невід'ємних чисел.

Знайдемо похідну функції. $p'(t)=\dfrac{200(t^2+100)-2t\cdot 200t}{(t^2+100)^2}=\dfrac{20000-200t^2}{(t^2+100)^2}$.

Оскільки час $t \geq 0$, то існує єдина точка *t=10*, в якій похідна дорівнює нулю.

На проміжку [0;10) $y'(t)$>0 - отже, функція зростає, а на проміжку (10; $\infty$) $y'(t)$<0 - отже, функція спадає. Отже, точка *t=10* є точкою максимуму.




Тому пік захворюваності припаде на 10 день. До того кількість хворих під час епідемії грипу від початку вакцинації населення до 10 дня зростатиме, а, починаючи з 10 дня, - почне спадати.

**Приклад 3**. Деяка епідемія поширюється із швидкістю $v(t)=0{,}15t-0{,}015t^2$ захворівших на добу, де $t\in[0;15]$. 1) Знайдіть закон зміни відсотка *p* тих, що захворіли, в залежності від часу *t*, якщо за першу добу захворіло 7% від загальної кількості мешканців. 2) Скільки населення захворіє за перших три дні?

**Розв'язання.** Шуканий закон є функцією від часу $t$ . Позначимо цю функцію через *p(t)* і пригадаємо, що $v(t)=p'(t)$, отже, згідно з означенням первісної приходимо до висновку, що *p(t)* є первісною для *v(t).* За основною властивістю первісної отримаємо $p(t)=0{,}15\dfrac{t^2}{2}-0{,}015\dfrac{t^3}{3}+C=0{,}075t^2-0{,}005t^3+C$

Враховуючи, що p(1)=0,07, з рівняння $0{,}075t^2-0{,}005t^3+C=0{,}07$ маємо C=0.

Тому закон зміни відсотка тих, що захворіли має вигляд $p(t)=0{,}075t^2-0{,}005t^3$.

Виходячи з того, що $v(t)=p'(t)$, а функція *p(t)* є первісною для функції *v(t),* можна використати формулу Ньютона-Лейбніца.

$$P=\int_0^3(0{,}15t-0{,}015t^2)dt=(0{,}075t^2-0{,}005t^3)\Big|_0^3=0{,}54$$

Отже, за перші три дні вірус підхопить 54% населення.

На основі цих прикладів можна наглядно зрозуміти, що методи математичного аналізу є фундаментними математичними методами пізнання закономірностей навколишнього світу. Диференціальне та інтегральне числення відіграють дуже велике значення в медицині, зокрема у дослідженні поширень епідемій.

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: «МИР», 1970. 326 с.
2. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.
3. Чорний В.З., Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Прикладні аспекти диференціального числення: Навчальний посібник.Тернопіль: "Тайп", 2016. 72с.