УДК 517.9
Хома М. – ст. гр. МБ-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЕЙЛЕРА

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Самборська О. М.

Khoma M.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOME APPLICATIONS OF EULER INTEGRALS

Supervisor: Samborska O. M.

Ключові слова: інтеграл, параметр бета-функція, гама-функція.
Keywords: integral, parameter, beta function, gamma function.

Інтегралом Ейлера першого роду (бета-функцією) називається інтеграл

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx,\ \text{де}\ a,b>0 \tag{1}$$

Він є функцією двох параметрів a та b і має такі основні властивості:

1) $B(a,b)=B(b,a)$;
2) $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$;
3) $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$;
4) Якщо m та n – натуральні числа, то $B(m,n)=\dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

Інтегралом Ейлера другого роду (гама-функцією) називається інтеграл

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx,$$

Який залежить від одного параметра a і збігається при $a>0$.
Основні властивості гама-функції:

1) $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$;
2) Якщо n – натуральнет число, то $\Gamma(n+1)=n!$;
3) $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$;
4) $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\dfrac{\pi}{\sin a\pi}$, якщо $0<a<1$;
5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Розглянемо застосування інтегралів Ейлера до обчислення визначених інтегралів.

Нехай задано інтеграл $\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1} dx,$ де $p,q,m>0$. Після заміни $x^m=y$ матимемо:

$$\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}\left(1-y\right)^{q-1} dy=\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

Зокрема, $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}dx=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(2\right)}=\frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Для обчислення інтеграла $\int_0^{\pi/2}\cos^{\frac{3}{2}}x\sin^{\frac{5}{2}}xdx$ зробимо заміну $y=\sin^2 x$. Після чого отримаємо інтеграл

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{3}{4}}\left(1-y\right)^{\frac{1}{4}}dy=\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(3\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi\sqrt{2}}{64}.$$

Для обчислення $\int_0^1\frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x\left(1-x^2\right)}}dx$ застосуємо підстановку $x^2=u$. В результаті

$$\int_0^1\frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x\left(1-x^2\right)}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{n-\frac{2}{3}}\left(1-u\right)^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+1/3\right)\Gamma\left(2/3\right)}{\Gamma\left(n+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2n!}\left(n-\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{5}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\left(3n-2\right)\left(3n-5\right)\cdot\ldots\cdot1}{2n!3^n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot\left(3n-2\right)}{3^n n!}\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Для обчислення інтеграла $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$ зробимо заміну змінної за формулою $\cos x=1-2\sqrt{t}$. Отримаємо інтеграл

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

Для обчислення інтеграла $\int_0^{\pi/2}tg^c\varphi d\varphi$, де $\left|c\right|<1$, представимо підінтегральну функцію у вигляді добутку

$$\int_0^{\pi/2}\sin^c\varphi\cos^{-c}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{1+c}{2},\frac{1-c}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\left(1-c\right)\pi}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

Наприклад, $\int_0^{\pi/2}\sqrt[3]{tgx}dx=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.