УДК 519.6

М. Петрик, канд. техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АДСОРБЦІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ n – ІНТЕРФЕЙСНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБМЕЖЕНИХ НАНОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ

Методами інтеґрального перетворення Лапласа і фундаментальних функцій Коші побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі адсорбційного масопереносу для неоднорідного циліндричного обмеженого адсорбційного середовища і системою n-інтерфейсних меж із заданими 2n+1 нестаціонарними режимами масопереносу на масообмінних межах. Доведено теорему про розв'язність крайової задачі, розроблено нові рекурентні алґоритми та обчислювальні процедури для побудови матриць функцій впливу, породжених неоднорідностями системи, крайовими умовами та системою інтерфейсних умов.

Умовні позначення

$A_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з визначника системи $\Delta^*(p)$ шляхом викреслювання перших *2k-1* рядків і стовпців (під номерами $\overline{1,2k-1}, k=\overline{1,n}$);

$A'_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з визначника системи $\Delta^*(p)$ шляхом викреслювання перших *2k* рядків за виключенням *2k-1*–го (під номерами $\overline{1,2k-2,2k}; k=\overline{1,n}$) і перших *2k-1* стовпців (під номерами $\overline{1,2k-1}, k=\overline{1,n}$);

$\Delta_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з перших *2k-1* рядків і стовпців із визначника системи;

$\Delta'_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з перших *2k* рядків за виключенням *2k-1*–го і перших *2k-1* стовпців із визначника системи.

Вступ

Створення новітніх наноматеріалів ставить цілий ряд завдань до дослідження механізмів кінетики масопереносу в неоднорідних середовищах пористої структури, вимагає розвитку нових методів моделювання, які описують складні механізми системи інтерфейсних взаємодій, умови динамічної рівноваги та нестаціонарні режими масопереносу на масообмінних поверхнях. Проблеми математичного моделювання дифузійно-адсорбційного масопереносу в однорідних і неоднорідних пористих середовищах та методи побудови математичних розв'язків таких моделей були розглянуті в роботах А.В.Ликова [6], Я.С. Уфлянда [14], І.В. Сергієнка, В.В. Скопецького, В.С. Дейнеки [13], J.Fraissard, M.A. Springuel-Huet, P. N'Gokoli-Kekele, R. Laurence, W. Conner [9-11], N. Chen, T. Degnan, M. Smith [7], J. Karger, D. Ruthven [8], R. de Boor [12] Для однорідних середовищ переносу застосовувались методи інтеґральних перетворень Фур'є, Лапласа, Вебера, Ганкеля. Розроблена математична теорія інтеґральних перетворень та їх застосувань для задач масопереносу для неоднорідних і пористих середовищ з урахуванням системи механізмів інтерфейсних взаємодій між елементами переносу та нестаціонарних режимів масообміну на масообмінних поверхнях (врахування спектрального параметру в крайових умовах та системі умов інтерфейсу описана в [1]. В працях [2, 3] розглянута математична модель адсорбційного масопереносу в неоднорідному обмеженому *n*-інтерфейсному нанопористому середовищі. Пропонована робота є логічним продовженням досліджень, поданих в [1-3].

Математичний опис проблеми. Розглядається масоперенос в неоднорідному обмеженому циліндричному *n*-інтерфейсному по координаті *r* нанопористому середовищі, заповненому n різними адсорбентами. Математична модель такого переносу з урахуванням нестаціонарності масообміну на масообмінних поверхнях (крайових і інтерфейсних) та припущень, поданих в [2-3], може бути описана у вигляді такої змішаної крайової задачі: побудувати обмежений в області $D_n = \left\{ (t,r) : t > 0, r \in \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}, R_j), R_0 = 0, R_{n+1} < \infty \right\}$ розв'язок системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial C_j(t,r)}{\partial t} + \frac{\partial a_j(t,r)}{\partial t} + \eta_j^2 C_j = D_{r_j} B_{\nu\alpha_j}\left[C_j\right] + f_j(t,r) \tag{1}$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} = \beta_j (C_j - \gamma_j a_j) \tag{2}$$

за початковими умовами:

$$C_j(t,r)_{t=0} = C_{0_j}(r); a_j(t,r)_{t=0} = a_{0_j}(r); \tag{3}$$

крайовими умовами та системою *2n*- інтерфейсних умов по координаті r :

$$\begin{aligned} &\lim_{r \to R_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^{\alpha_0 - \nu_0} C_1(t,r) \right] = 0; \\ &[(\alpha_{22}^{n+1} + \delta_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial r} + (\beta_{22}^{n+1} + \gamma_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial t})] C_{n+1}(t,r)\Big|_{r=R_{n+1}} = \omega_{n+1}(t) \end{aligned} ; \tag{4}$$

$$\left[[(\alpha_{i1}^j + \delta_{i1}^j \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial r} + (\beta_{i1}^j + \gamma_{i1}^j \frac{\partial}{\partial t})] C_j(t,r) - [(\alpha_{i2}^j + \delta_{i2}^j \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial r} + (\beta_{i2}^j + \gamma_{i2}^j \frac{\partial}{\partial t})] C_{j+1}(t,r) \right]\Bigg|_{r=R_j} = 0; \tag{5}$$

$$j = \overline{1,n}; i = \overline{1,2}.$$

Тут $B_{\nu\alpha_j} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}(2\alpha_j + 1)\frac{d}{dr} - (\nu_j^2 - \alpha_j^2) r^{-2}$ - оператор Бесселя для *n*-інтерфейсного середовища; C_j, a_j- концентрації адсорбтиву відповідно в рідинній фазі (міжчастинковий простір) та твердій фазі (мікропорах зерен адсорбенту) для *j*–го шару середовища $j = \overline{1, n+1}$.

Методологія побудови аналітичного розв'язку моделі

Теорема ***(про розв'язність):*** *Якщо вектор-функції крайової задачі (1)-(5)* $f(t,r), \omega_{n+1}(t)$ *є оригіналами за Лапласом по змінній t і вектор-функції* $f(t,r), C_0(r), a_0(r)$ *задовольняють умови Ґельдера з показником* α *по r* $(0 < \alpha \le 1)$:

$$\left| g(r) - g(\rho) \right| \le A \cdot \left| r - \rho \right|^{\alpha}; A < \infty,$$

то розв'язок крайової задачі (1)-(5) існує і єдиний.

Доведення. В припущені, що шукані вектор–функції $C(t,r), a(t,r)$ є оригіналами за Лапласом, застосуємо до крайової задачі (1)-(5) інтеґральне перетворення Лапласа стосовно часової змінної t [5]. В результаті отримаємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині $I_n = \left\{ r : r \in \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}, R_j), R_0 = 0, R_{n+1} < \infty \right\}$ розв'язок системи диференціальних рівнянь Бесселя для модифікованих функцій

$$\left[B_{\nu\alpha_j} - q_j^2(p) \right] C_j^*(p,r) = -\mathrm{F}_j^*(p,r) \tag{6}$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to R_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^{\alpha_0-\nu_0}C_1^*(p,r)\right]=0;\ [\bar{\alpha}_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\bar{\beta}_{22}^{n+1}]C_{n+1}^*(p,r)\Big|_{r=R_{n+1}}=\omega_{R_{n+1}}^*(p);\tag{7}$$

та умовами інтерфейсу r :

$$\left[[(\bar{\alpha}_{i1}^j\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{i1}^j)]C_j^*(p,r)-(\bar{\alpha}_{i2}^k\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{i2}^k)]C_{j+1}^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_j}=\omega_{ij};\ j=\overline{1,n};i=\overline{1,2}.\tag{8}$$

$$\text{Тут } \mathrm{F}_j^*(p,r)=\frac{1}{D_{r_j}}[f_j^*(p,r)+C_{o_j}(r)+\frac{\beta_j\gamma_j}{p+\beta_j\gamma_j}a_{0_j}(r)];\tag{9}$$

$$\omega_{R_{n+1}}^*(p)=\omega_{n+1}^*(p)+\left(\delta_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\gamma_{22}^{n+1}\right)C_{0_{n+1}}(R_{n+1})\equiv\omega_{n+1}^*(p)+\omega_{n+1,1};\tag{10}$$

$$\omega_{ij}=\left[\left(\delta_{i1}^j\frac{d}{dr}+\gamma_{i1}^j\right)C_{0_i}(r)-\left(\delta_{i2}^j\frac{d}{dr}+\gamma_{i2}^j\right)C_{0_{j+1}}(r)\right]\Bigg|_{r=R_j};\tag{11}$$

$$q_j^2(p)=\frac{1}{D_{r_j}\left(p+\beta_j\gamma_j\right)}\left[p^2+p\left(\beta_j(1+\gamma_j)+\eta_j^2\right)+\beta_j\gamma_j\cdot\eta_j^2\right];\tag{12}$$

$\bar{\alpha}_{im}^j=\alpha_{im}^j+\delta_{im}^j\cdot p;\bar{\beta}_{im}^j=\beta_{im}^j+\gamma_{im}^j\cdot p;j=\overline{1,n};i,m=\overline{1,2}$. Тут p – комплексно значний спектральний параметр інтегрального перетворення Лапласа, що присутній в крайових умовах та умовах інтерфейсу (7), (8). При цьому

$$a_j^*(p,r)=\frac{a_{0j}(r)}{p+\beta_j\gamma_j}+\frac{\beta_j}{p+\beta_j\gamma_j}C_j^*(p,r);\ j=\overline{1,n+1}.\tag{13}$$

Зафіксуємо вітку дволистої функції $q_j(p)$, на якій $\mathrm{Re}\,q_j(p)>0$. Внаслідок властивостей функцій $I_{\nu\alpha}(r),K_{\nu\alpha}(r)$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння Бесселя (6), розв'язок неоднорідної крайової задачі (6)-(8) будуємо методом функцій Коші [1]:

$$C_1^*(p,r)=A_1\cdot I_{\nu\alpha_1}(q_1r)+\int_0^{R_1}\mathrm{E}_{\nu\alpha_1}^*(p,r,\rho)\mathrm{F}_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho;$$

$$C_j^*(p,r)=A_j\cdot I_{\nu\alpha_j}(q_jr)+B_j\cdot K_{\nu\alpha_j}(q_jr)+\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho)\mathrm{F}_j^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_j+1}d\rho;\ j=\overline{2,n+1};\tag{14}$$

де $\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho),\ j=\overline{1,n+1}$ - функції Коші, що задовольняють умови:

$$\begin{cases}\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0;\\ \dfrac{d}{dr}\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\dfrac{d}{dr}\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=-\rho^{-(2\alpha_j+1)}.\end{cases}\tag{15}$$

Функції Коші $\mathrm{E}_{\nu\alpha_j}^*(p,r,\rho),\ j=\overline{1,n+1}$ шукаємо у такому вигляді:

$$\mathrm{E}_{\nu\alpha_1}^*(p,r,\rho)=\begin{cases}\mathrm{E}_{\nu\alpha_1}^{-*}=D_{1_1}I_{\nu_1\alpha_1}(q_1r);0<r<\rho<R_1\\ \mathrm{E}_{\nu\alpha_1}^{+*}=D_{2_1}I_{\nu_1\alpha_1}(q_1r)+E_{2_1}K_{\nu_1\alpha_1}(q_1r);0<\rho<r<R_1\end{cases}$$

$$\mathrm{E}^*_{\nu\alpha_j}(p,r,\rho)=\begin{cases}\mathrm{E}^{-*}_{\nu\alpha_j}=D_{1_j}I_{\nu_j\alpha_j}(q_jr)+E_{1_j}K_{\nu_j\alpha_j}(q_jr);R_{j-1}<r<\rho<R_j\\ \mathrm{E}^{+*}_{\nu\alpha_j}=D_{2_j}I_{\nu_j\alpha_j}(q_jr)+E_{2_j}K_{\nu_j\alpha_j}(q_jr);R_{j-1}<\rho<r<R_j\end{cases};j=\overline{2,n+1}. \quad (16)$$

Функції Коші $\mathrm{E}^*_{\nu\alpha_j}(p,r,\rho)$ задовольняють ще додаткові однорідні умови для $j=\overline{2,n+1}$:

$$\left(\bar{\alpha}^{j-1}_{12}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^{j-1}_{12}\right)\mathrm{E}^{-*}_{\nu\alpha_j}\Big|_{r=R_{j-1}}=0$$ (перша права умова *j-1*- го інтерфейсу – на межі $r=R_{j-1}$), (17)

$$\left(\bar{\alpha}^{j}_{ss}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^{j}_{ss}\right)\mathrm{E}^{+*}_{\nu\alpha_j}\Big|_{r=l_j}=0$$ (перша ліва умова j - го інтерфейсу: на межі $r=R_j$, $s=\begin{cases}1 & ;j=\overline{2,n}\\ 2 & ;j=n+1\end{cases}$), (18)

$$\left(\bar{\alpha}^{1}_{11}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^{1}_{11}\right)\mathrm{E}^{-*}_{\nu\alpha_1}\Big|_{r=R_1}=0$$ (перша ліва умова *1*- го інтерфейсу – на межі $r=R_1$). (19)

Введемо в розгляд функції:

$$U^{j1}_{\nu\alpha_{im}}(q_sR_j)=(\bar{\alpha}^j_{im}\frac{d}{dz}+\bar{\beta}^j_{im})I_{\nu_j\alpha_j}(q_sr)\Big|_{r=R_j}=(\bar{\alpha}^j_{im}\frac{\nu_j-\alpha_j}{R_j}+\bar{\beta}^j_{im})I_{\nu_j\alpha_j}(q_sR_j)+\bar{\alpha}^j_{im}R_jq_s^2I_{\nu_j+1,\alpha_j+1}(q_sR_j)$$

$$U^{j2}_{\nu\alpha_{im}}(q_sR_j)=(\bar{\alpha}^j_{im}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}^j_{im})K_{\nu_j\alpha_j}(q_sr)\Big|_{r=R_j}=(\bar{\alpha}^j_{im}\frac{\nu_j-\alpha_j}{R_j}+\bar{\beta}^j_{im})K_{\nu_j\alpha_j}(q_sR_j)-\bar{\alpha}^j_{im}R_jq_s^2K_{\nu_j+1,\alpha_j+1}(q_sR_j)$$

$$\Phi^j_{\nu\alpha_{im}}(q_sR_j,q_sr)=U^{j1}_{\nu\alpha_{im}}(q_sR_j)\cdot K_{\nu_j\alpha_j}(q_sr)-U^{j2}_{\nu\alpha_{im}}(q_sR_j)\cdot I_{\nu_j\alpha_j}(q_sr). \quad (20)$$

Шляхом підстановки виразів $\mathrm{E}^*_k(p,r,\rho),k=\overline{1,n+1}$ (16) в умови (15), (17) - (19) отримуємо вирази для визначення сталих:

$$D_{2_1}-D_{1_1}=-q_1^{2\alpha_1}K_{\nu_1\alpha_1}(q_1\rho);\ E_{2_1}=q_1^{2\alpha_1}I_{\nu_1\alpha_1}(q_1\rho);$$

$$D_{2_k}-D_{1_k}=-q_k^{2\alpha_k}K_{\nu_k\alpha_k}(q_k\rho);\ E_{2_k}-E_{1_k}=q_k^{2\alpha_k}I_{\nu_k\alpha_k}(q_k\rho);k=\overline{2,n+1}.$$

У результаті функції Коші $\mathrm{E}^*_k(p,r,\rho);k=\overline{1,n+1}$ є визначені і внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ мають таку структуру:

$$\mathrm{E}^*_{\nu\alpha_1}(p,r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{U^{11}_{\nu\alpha_{11}}\left(q_1R_1\right)}\begin{cases}I_{\nu\alpha_1}\left(q_1r\right)\cdot\Phi^1_{\nu\alpha_{11}}\left(q_1R_1,q_1\rho\right),0<r<\rho<R_1\\ I_{\nu\alpha_1}\left(q_1\rho\right)\cdot\Phi^1_{\nu\alpha_{11}}\left(q_1R_1,q_1r\right),0<\rho<r<R_1\end{cases};$$

$$\mathrm{E}^*_{\nu\alpha_k}(p,r,\rho)=\frac{q_k^{2\alpha_k}}{\Delta_{\alpha_{1s}}\left(q_kR_{k-1},q_kR_k\right)}\begin{cases}\Phi^k_{\nu\alpha_{ss}}\left(q_kR_k,q_k\rho\right)\cdot\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}\left(q_kR_{k-1},q_kr\right),R_{k-1}<r<\rho<R_k\\ \Phi^k_{\nu\alpha_{ss}}\left(q_kR_k,q_kr\right)\cdot\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}\left(q_kR_{k-1},q_k\rho\right),R_{k-1}<\rho<r<R_k\end{cases}, \quad (21)$$

$$s=\begin{cases}1 & ;k=\overline{2,n}\\ 2 & ;k=n+1\end{cases};$$

$$\Delta_{\nu\alpha_{im}}(q_kR_{k-1},q_kR_k)=U^{k-1,1}_{\nu\alpha_{k_i2}}(q_kR_{k-1})U^{k,2}_{\nu\alpha_{k_m1}}(q_kR_k)-U^{k-1,2}_{\nu\alpha_{k_i2}}(q_kR_{k-1})U^{k,1}_{\nu\alpha_{k_m1}}(q_kR_k);k=\overline{2,n+1};i,m=\overline{1,2};$$

$$\Delta_{\nu\alpha_{1j}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1})=U^{n,1}_{\nu\alpha_{n+1_j2}}(q_{n+1}R_n)U^{n+1,2}_{\nu\alpha_{n+1_22}}(q_{n+1}R_{n+1})-U^{n,2}_{\nu\alpha_{n+1_j2}}(q_{n+1}R_n)U^{n+1,1}_{\nu\alpha_{n+1_22}}(q_{n+1}R_{n+1});\ j=\overline{1,2}.$$

Крайові та інтерфейсні умови (7), (8) з врахуванням формул (21) для функцій Коші $E^*_{\nu\alpha_j}(p,r,\rho)$ (21) дають алґебраїчну систему із $2n+1$-го рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів $A_1, A_j, B_j, j=\overline{2,n+1}$, що беруть участь у структурах (14) загального розв’язку крайової задачі (6)-(8) $C^*_j(p,r)$:

$$\begin{cases}
U^{11}_{\nu\alpha_{11}}(q_1R_1)A_1-U^{11}_{\nu\alpha_{12}}(q_2R_1)A_2-U^{12}_{\nu\alpha_{12}}(q_2R_1)B_2=\omega_{1_1}\\
U^{11}_{\nu\alpha_{21}}(q_1R_1)A_1+U^{12}_{\nu\alpha_{21}}(q_1R_1)B_1-U^{11}_{\nu\alpha_{22}}(q_2R_1)A_2-U^{12}_{\nu\alpha_{22}}(q_2R_1)B_2=\omega_{2_1}+G^*_1\\
-----------------------------------\\
U^{k1}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k)A_k+U^{k2}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k)B_k-U^{k1}_{\nu\alpha_{12}}(q_{k+1}R_k)A_{k+1}-U^{k2}_{\nu\alpha_{12}}(q_{k+1}R_k)B_{k+1}=\omega_{1_k}\\
U^{k1}_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k)A_k+U^{k2}_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k)B_k-U^{k1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{k+1}R_k)A_{k+1}-U^{k2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{k+1}R_k)B_{k+1}=\omega_{2_k}+G^*_k\\
--------------------------------\\
U^{n,1}_{\nu\alpha_{11}}(q_nR_n)(q_nl_n)A_n+U^{n,2}_{\nu\alpha_{11}}(q_nR_n)B_n-U^{n,1}_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n)A_{n+1}-U^{n,2}_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n)B_{n+1}=\omega_{1_n}\\
U^{n,1}_{\nu\alpha_{21}}(q_nR_n)A_n+U^{n,2}_{\nu\alpha_{21}}(q_nR_n)B_n-U^{n,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_n)A_{n+1}-U^{n,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_n)B_{n+1}=\omega_{2_n}+G^*_n\\
U^{n+1,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_{n+1})A_{n+1}+U^{n+1,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_{n+1})B_{n+1}=\omega^*_{R_{n+1}}(p)
\end{cases}\qquad(22)$$

Тут G^*_j вирази, що містять інтеґрали від функцій Коші $E^*_{\nu\alpha_j}(p,r,\rho)$ в (25) та обчислюються за формулою:

$$G^*_1=\frac{c_{1_1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\nu\alpha_1}(q_1\rho)}{U^{11}_{\nu\alpha_{11}}(q_1R_1)}F^*_1(p,\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho-\frac{c_{2_1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi^2_{\nu\alpha_{11}}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_2R_1,q_2R_2)}F^*_2(p,\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho;$$

$$G^*_j=\frac{c_{1_j}}{R_j^{2\alpha_j+1}}\int_{R_{j-1}}^{R_j}\frac{\Phi^{j-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_jR_{j-1},q_j\rho)}{\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_jR_{j-1},q_jR_j)}F^*_j(p,\rho)\rho^{2\alpha_j+1}d\rho-\frac{c_{2_j}}{R_j^{2\alpha_{j+1}+1}}\int_{R_j}^{R_{j+1}}\frac{\Phi^{j+1}_{\nu\alpha_{11}}(q_{j+1}R_{j+1},q_{j+1}\rho)}{\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_{j+1}R_j,q_{j+1}R_{j+1})}F^*_{j+1}(p,\rho)\rho^{2\alpha_{j+1}+1}d\rho, j=\overline{1,n-1},$$

$$G^*_n=\frac{c_{1_n}}{R_n^{2\alpha_n+1}}\int_{R_{n-1}}^{R_n}\frac{\Phi^{n-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_nR_{n-1},q_n\rho)}{\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_nR_{n-1},q_nR_{n-1})}F^*_n(p,\rho)\rho^{2\alpha_n+1}d\rho-\frac{c_{2_n}}{R_n^{2\alpha_{n+1}+1}}\int_{R_n}^{R_{n+1}}\frac{\Phi^{n+1}_{\nu\alpha_{11}}(q_{n+1}R_{n+1},q_{n+1}\rho)}{\Delta_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1})}F^*_{n+1}(p,\rho)\rho^{2\alpha_{n+1}+1}d\rho,\qquad(23)$$

Тут $c_{j_k}=\bar{\alpha}^k_{2j}\cdot\bar{\beta}^k_{1j}-\bar{\alpha}^k_{1j}\cdot\bar{\beta}^k_{2j}; k=\overline{1,n}; j=\overline{1,2}$;

$$-\frac{c_{1_k}}{q_k^{2\alpha_k}\cdot R_k^{2\alpha_k+1}}=\begin{vmatrix}U^{k,1}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k) & U^{k,2}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k)\\ U^{k,1}_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k) & U^{k,2}_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k)\end{vmatrix};\ -\frac{c_{2_k}}{q_{k+1}^{2\alpha_{k+1}}\cdot R_{k+1}^{2\alpha_{k+1}+1}}=\begin{vmatrix}-U^{k,1}_{\nu\alpha_{12}}(q_{k+1}R_k) & -U^{k,2}_{\nu\alpha_{12}}(q_{k+1}R_k)\\ -U^{k,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{k+1}R_k) & -U^{k,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{k+1}R_k)\end{vmatrix};k=\overline{1,n}$$

Припустимо, що умова однозначної розв’язності крайової задачі (6)-(8) виконана, тобто визначник алґебраїчної системи (22) є відмінним від нуля:

$$\Delta^*_{\nu\alpha}(p)\neq 0.\qquad(24)$$

Визначивши $A_k, B_k, D_{1_k}, D_{2_k} E_{1_k}, E_{2_k}, k=\overline{1,n+1}$ у (14) та після низки перетворень отримуємо рекурентні вирази для обчислення компонент $C^*_k(p,r)$ вектор-функції $C^*(p,r)$ - єдиного розв’язку крайової задачі (6)-(8):

$$C_k^*(p,r)=W_{k_{n+1}}^*(p,r)\cdot\omega_{R_{n+1}}^*(p)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mathrm{R}_{1_{k,j}}^*(p,r)\cdot\omega_{1_j}+\mathrm{R}_{2_{k,j}}^*(p,r)\cdot\omega_{2_j}\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{n+1}\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathrm{H}_{\nu\alpha_{k,j}}^*(p,r,\rho)\cdot\mathrm{F}_j^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_j+1}d\rho;k=\overline{1,n+1};R_0=0 \qquad (25)$$

Головні розв’язки [1] крайової задачі (6)-(8) подані нижче.

Функції впливу правої крайової умови $\omega_{R_{n+1}}^*(p)$ на *к*–тий сеґмент адсорбційного середовища $W_{n+1_k}^*(p,r)$:

$$W_{k_{n+1}}^*(p,z)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\prod\limits_{s=1}^{n}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\Phi_{\nu\alpha_{12}}^0(q_1R_0,q_1r) & ;k=1\\ -\dfrac{1}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\prod\limits_{s=k}^{n}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\left[\Phi_{\nu\alpha_{22}}^{k-1}(q_kR_{k-1},q_kr)\cdot\Delta_{\overline{1,2k-1}}-\Phi_{\nu\alpha_{12}}^{k-1}(q_kR_{k-1},q_kr)\cdot\Delta'_{\overline{1,2k-1}}\right] & ;k=\overline{2,n}\\ \dfrac{1}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\left[\Phi_{\nu\alpha_{12}}^n(q_{n+1}r,q_{n+1}R_n)\cdot\Delta'_{\overline{1,2n-1}}-\Phi_{22}^n(q_{n+1}r,q_{n+1}R_n)\cdot\Delta_{\overline{1,2n-1}}\right] & ;k=n+1\end{cases} \qquad (26)$$

Функції впливу *j*-го джерела $\mathrm{F}_j^*(p,\rho)$ на *k*-тий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{H}_{\nu\alpha_{k,j}}^*(p,r,\rho)$:

- впливу j - го джерела ($j=\overline{1,n+1}$) на перший сеґмент середовища :

$$\mathrm{H}_{\nu\alpha_{11}}^*(p,r,\rho)=-\frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\begin{cases}I_{\nu\alpha_1}(q_1\rho)\cdot\left[\Phi_{\nu\alpha_{11}}^1(q_1r,q_1R_1)\mathrm{A}_{\overline{1,1}}-\Phi_{\nu\alpha_{21}}^1(q_1r,q_1R_1)\mathrm{A}'_{\overline{1,1}}\right],0<\rho<r<R_1\\ I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\cdot\left[\Phi_{\nu\alpha_{11}}^1(q_1\rho,q_1R_1)\mathrm{A}_{\overline{1,1}}-\Phi_{\nu\alpha_{21}}^1(q_1\rho,q_1R_1)\mathrm{A}'_{\overline{1,1}}\right],0<r<\rho<R_1\end{cases};j=\overline{2,n}; \qquad (27)$$

$$\mathrm{H}_{\nu\alpha_{1_j}}^*(p,r,\rho)=-\frac{q_j^{2\alpha_j}\cdot\prod\limits_{s=1}^{j-1}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\left[\Phi_{\nu\alpha_{11}}^j(q_jR_j,q_j\rho)\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}}-\Phi_{\nu\alpha_{21}}^j(q_jR_j,q_j\rho)\mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}}\right];j=\overline{2,n}; \qquad (28)$$

$$\mathrm{H}_{\nu\alpha_{1,n+1}}^*(p,r,\rho)=-\frac{q_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}\prod\limits_{s=1}^{n}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\cdot I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\Phi_{\nu\alpha_{22}}^{n+1}(q_{n+1}\rho,q_{n+1}R_{n+1}); \qquad (29)$$

- впливу j - го джерела ($j=\overline{1,n+1}$) k - й сеґмент ($k=\overline{2,n}$) середовища:

$$\mathrm{H}_{\nu\alpha_{k1}}^*(p,r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\cdot\prod_{s=1}^{k-1}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}I_{\nu\alpha_1}(q_1\rho)\cdot\left[\Phi_{\nu\alpha_{21}}^k(q_kR_k,q_kr)\cdot\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi_{\nu\alpha_{11}}^k(q_kR_k,q_kr)\cdot\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\right] \qquad (30)$$

$$\mathrm{H}_{\nu\alpha_{kj}}^*(p,r,\rho)=-\frac{q_j^{2\alpha_j}\prod\limits_{s=j}^{k-1}\dfrac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}}{\Delta_{\nu\alpha}^*(p)}\left[\Phi_{\nu\alpha_{21}}^k(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi_{\nu\alpha_{11}}^k(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\right]\cdot; \qquad (31)$$
$$\cdot\left[\Phi_{\nu\alpha_{22}}^{j-1}(q_jR_{j-1},q_j\rho)\cdot\Delta_{\overline{1,2j-3}}-\Phi_{\nu\alpha_{12}}^{j-1}(q_jR_{j-1},q_j\rho)\cdot\Delta'_{\overline{1,2j-3}}\right];j=\overline{2,k-1};k=\overline{2,n}$$

$$\mathrm{H}^*_{\nu\alpha_{kj}}(p,r,\rho)=\frac{q_j^{2\alpha_j}\prod\limits_{s=k}^{j-1}\frac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_s+1}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\left[\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}\right]\cdot; \quad (32)$$

$$\cdot\left[\Phi^j_{\nu\alpha_{21}}(q_jR_j,q_j\rho)\cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}}-\Phi^j_{\nu\alpha_{11}}(q_jR_j,q_j\rho)\cdot \mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}}\right];\ j=\overline{k+1,n};k=\overline{2,n}$$

$$\mathrm{H}^*_{\nu\alpha_{kk}}(p,r,\rho)=\frac{q_k^{2\alpha_k}}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases}[\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_k\rho)\cdot\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_k\rho)\cdot\Delta'_{\overline{1,2k-3}}]\cdot\\ [\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\cdot\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\cdot\Delta'_{\overline{1,2k-3}}]\cdot\end{cases}; \quad (33)$$

$$\cdot[\Phi^k_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k,q_kr)\cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi^k_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k,q_kr)\cdot \mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}],R_{k-1}<\rho<r<R_k$$

$$\cdot[\Phi^k_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k,q_k\rho)\cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi^k_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k,q_k\rho)\cdot \mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}],R_{k-1}<r<\rho<R_k$$

$$\mathrm{H}^*_{\nu\alpha_{k,n+1}}(p,r,\rho)=-\frac{q_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)\cdot\Delta_{\nu\alpha_{11}}}\prod_{s=k}^{n}\frac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\Phi^{n+1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}\rho,q_{n+1}R_{n+1})\left[\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{12}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right];$$

$$k=\overline{2,n} \quad (34)$$

впливу j- го джерела ($j=\overline{1,n+1}$) на $n+1$- ий сеґмент адсорбційного середовища:

$$\mathrm{H}^*_{\nu\alpha_{n+1,1}}(p,r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\prod_{s=1}^{n}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\Phi^0_{12}(q_1R_0,q_1\rho)\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1})\,. \quad (35)$$

$$\mathrm{H}^*_{\nu\alpha_{n+1,j}}(p,r,\rho)=\frac{q_j^{2\alpha_j}\prod\limits_{s=j}^{n}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}}{\Delta^*_{\alpha}(p)}\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1})\left[\Phi^{j-1}_{12}(q_jR_{j-1},q_j\rho)\cdot\Delta'_{\overline{1,2j-3}}-\Phi^{j-1}_{22}(q_jR_{j-1},q_j\rho)\cdot\Delta_{\overline{1,2j-3}}\right],j=\overline{2,n}; \quad (36)$$

$$\mathrm{H}^*_{n+1,n+1}(p,r,\rho)=\frac{q_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}}{\Delta^*_{\alpha}(p)}\begin{cases}\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}\rho,q_{n+1}R_{n+1})\left[\Phi^n_{12}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}r)\Delta'_{\overline{1,2n-1}}-\Phi^n_{22}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}r)\Delta_{\overline{1,2n-1}}\right],R_n<\rho<r<R_{n+1}\\ \Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1})\left[\Phi^n_{12}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}\rho)\Delta'_{\overline{1,2n-1}}-\Phi^n_{22}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}\rho)\Delta_{\overline{1,2n-1}}\right],R_n<r<\rho<R_{n+1}\end{cases}; \quad (37)$$

Функції впливу неоднорідностей першої умови j–го інтерфейсу $\omega_{1_j}, j=\overline{1,n}$ на κ–ий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{1_{k,j}}(p,z);k=\overline{1,n+1};\ j=\overline{1,n}$

- впливу неоднорідностей першої умови j–го інтерфейсу ω_{1_j} на перший сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{1_{1,j}}(p,z);\ j=\overline{1,n}$:

$$\mathrm{R}^*_{1_{1j}}(p,r)=\frac{1}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases}I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\mathrm{A}_{\overline{1,1}} & ;j=1\\ \prod\limits_{s=1}^{j-1}\frac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}} & ;j=\overline{2,n-1}\,.\\ \prod\limits_{s=1}^{n-1}\frac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=n\end{cases} \quad (38)$$

- впливу неоднорідностей першої умови j – го інтерфейсу $\omega_{1_j}, j=\overline{1,n}$ на на k-ий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{1_{k,j}}(p,z);k=\overline{2,n};\ j=\overline{1,n}$:

$$
\mathrm{R}^*_{1_{kj}}(p,r)=\frac{1}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases}
U^{11}_{\nu\alpha_{21}}(q_1R_1)\prod\limits_{s=2}^{k-1}\dfrac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\left(\Phi^k_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi^k_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\right) & ;j=1\\
\Delta'_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=j+1}^{k-1}\dfrac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\left(\Phi^k_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi^k_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\right) & ;j=\overline{2,k-1}\\
\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\left(\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right) & ;j=k\\
\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=k}^{j-1}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}R_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot\left(\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-2}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right) & ;j=\overline{k+1,n-1}\\
\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1})\prod\limits_{s=k}^{n-1}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}R_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot\left(\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-2}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right) & ;j=n
\end{cases};\quad(39)
$$

- впливу неоднорідностей першої умови j – го інтерфейсу $\omega_{1_j}, j=\overline{1,n}$ на $n+1$-ий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{1_{n+1,j}}(p,z);\ j=\overline{1,n}$:

$$
\mathrm{R}^*_{1_{n+1,j}}(p,z)=-\frac{1}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases}
U^{11}_{\nu\alpha_{21}}(q_1R_1)\prod\limits_{s=2}^{n}\dfrac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=1\\
\Delta'_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=2}^{n-1}\dfrac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=\overline{2,n-1};\\
\Delta'_{\overline{1,2n-1}}\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=n
\end{cases}\quad(40)
$$

Функції впливу неоднорідностей другої умови *j* – го інтерфейсу $\omega_{2_j}, j=\overline{1,n}$ на *к*–ий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{2_{k,j}}(p,z);k=\overline{1,n+1};\ j=\overline{1,n}$:

- впливу неоднорідностей другої умови j – го інтерфейсу ω_{2_j} на перший сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{2_{1,j}}(p,z);\ j=\overline{1,n}$:

$$
\mathrm{R}^*_{2_{1j}}(p,r)=\frac{1}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases}
I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\mathrm{A}'_{\overline{1,1}} & ;j=1\\
\prod\limits_{s=12}^{j-1}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}} & ;j=\overline{2,n-1};\\
\prod\limits_{s=1}^{n-1}\dfrac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}}R_s^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot I_{\nu\alpha_1}(q_1r)\Delta_{\nu\alpha_{21}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=n
\end{cases}\quad(41)
$$

- впливу неоднорідностей другої умови j – го інтерфейсу $\omega_{2_j}, j=\overline{1,n}$ на на k-ий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{2_{k,j}}(p,z);k=\overline{2,n};\ j=\overline{1,n}$:

$$\mathrm{R}^*_{2_{kj}}(p,r)=\frac{1}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases} U^{11}_{\nu\alpha_{11}}(q_1R_1)\prod\limits_{s=2}^{k-1}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\left(\Phi^k_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi^k_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\right) & ;j=1 \\ \Delta_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=j+1}^{k-1}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\left(\Phi^k_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}-\Phi^k_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k,q_kr)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\right) & ;j=\overline{2,k-1} \\ \mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}\left(\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right) & ;j=k \\ \mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=k}^{j-1}\frac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}R_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot\left(\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-2}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right) & ;j=\overline{k+1,n-1} \\ \Delta_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1})\prod\limits_{s=k}^{n-1}\frac{-c_{2_s}}{q_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}R_{s+1}^{2\alpha_{s+1}+1}}\cdot\left(\Phi^{k-1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-2}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kr)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\right) & ;j=n \end{cases};\quad(42)$$

- впливу неоднорідностей другої умови j – го інтерфейсу $\omega_{2_j}, j=\overline{1,n}$ на $n+1$-ий сеґмент адсорбційного середовища $\mathrm{R}^*_{2_{n+1,j}}(p,z);\ j=\overline{1,n}$:

$$\mathrm{R}^*_{1_{n+1,j}}(p,z)=\frac{1}{\Delta^*_{\nu\alpha}(p)}\begin{cases} U^{11}_{\nu\alpha_{11}}(q_1R_1)\prod\limits_{s=2}^{n}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=1 \\ \Delta_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=2}^{n-1}\frac{-c_{1_s}}{q_s^{2\alpha_s}R_s^{2\alpha_s+1}}\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=\overline{2,n-1}; \\ \Delta_{\overline{1,2n-1}}\cdot\Phi^{n+1}_{22}(q_{n+1}r,q_{n+1}R_{n+1}) & ;j=n \end{cases}\quad(43)$$

Перехід до оригіналів. Особливими точками головних розв’язків крайової задачі (6) - (8) $W^*_{n+1_k}(p,r),\mathrm{R}^*_{1_{kj}}(p,r),\mathrm{R}^*_{2_{kj}}(p,r),\mathrm{H}^*_{\nu\alpha_{k,k_1}}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=\infty$ та

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[S_1\pm\sqrt{S_2}\right]<0;\ S_1=\beta_k(1+\gamma_k)+\eta_k^2;S_2=(\eta_k-\beta_k\gamma_k)^2=\beta_k\left[\beta_k(1+2\gamma_k)+2\eta_k^2\right]>0.\quad(44)$$

Отже, при переході до оригіналів за Лапласом інтеґрал по контуру Бромвіча можна замінити інтеґралом по уявній осі [4, 5]:

$$W_{n+1_k}(t,r)=L^{-1}\left[W^*_{n+1_k}(p,r)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}W^*_{n+1_k}(p,r)\cdot e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}W^*_{n+1_k}(p,r)\cdot e^{pt}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W^*_{n+1_k}(is,r)\cdot e^{ist}ds=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[W^*_{n+1_k}(is,r)\cdot e^{ist}\right]ds;$$

$$R_{m_{kj}}(t,r)=L^{-1}\left[\mathrm{R}^*_{m_{kj}}(p,r)\right]=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\mathrm{R}^*_{m_{kj}}(is,r)\cdot e^{ist}\right]ds;m=\overline{1,2};$$

$$\mathrm{H}^*_{k,k_1}(t,r,\rho)=L^{-1}\left[\mathrm{H}^*_{k,k_1}(p,r,\rho)\right]=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\mathrm{H}^*_{k,k_1}(is,r,\rho)\cdot e^{ist}\right]ds.\quad(45)$$

На основі одержаних головних розв’язків задачі (6)-(8) та формул (45), отримуємо єдиний розв’язок вихідної крайової задачі (1)-(5):

$$C_k(t,r)=\int_0^t W_{n+1_k}(t-\tau,r)\cdot\omega_{R_{n+1}}(t)d\tau+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\left[\mathrm{R}_{1_{kj}}(t-\tau,r)\cdot\omega_{1_j}(\tau)+\mathrm{R}_{2_{kj}}(t-\tau,r)\cdot\omega_{2_j}(\tau)\right]d\tau+$$
$$+\int_0^t\sum_{k_1=1}^{n+1}\int_{R_{k_1-1}}^{R_{k_1}}\mathrm{H}_{k,k_1}(t-\tau;r,\rho)\cdot\left[f_{k_1}(\tau,\rho)+C_{0_{k_1}}(\rho)\cdot\delta_+(\tau)\right]\rho^{2a_{k_1}}d\rho d\tau+ \tag{46}$$
$$+\int_0^t\sum_{k_1=1}^{n+1}\int_{R_{k_1-1}}^{R_{k_1}}\frac{\beta_{k_1}\gamma_{k_1}}{D_{z_{k_1}}}\mathrm{H}_{k,k_1}(t-\tau;r,\rho)\cdot e^{-\beta_{k_1}\cdot\gamma_{k_1}\cdot\tau}\cdot a_{0_{k_1}}(\rho)\rho^{2a_{k_1}}d\rho d\tau;$$

$$a_k(t,r)=\beta_k\int_0^t e^{-\beta_k\gamma_k(t-\tau)}\cdot C_k(\tau,r)d\tau+e^{-\beta_k\gamma_k t}\cdot a_{0_k}(r). \tag{47}$$

Тут

$$\omega_{R_{n+1}}(t)=L\left[\omega^*_{R_{n+1}}(p)\right]=\omega_{n+1}(t)+(\delta_{22}^{n+1}\frac{d}{dr}+\gamma_{22}^{n+1})\,C_{0_{n+1}}(r)\Big|_{r=R_0}\cdot\delta_+(t);$$
$$\omega_{mj}=\left[(\delta_{m1}^{j}\frac{d}{dr}+\gamma_{m1}^{j})\cdot C_{0_j}(z)-(\delta_{m2}^{j}\frac{d}{dr}+\gamma_{m2}^{j})C_{0_{j+1}}(r)\right]\Bigg|_{r=R_j}\cdot\delta_+(t);m=\overline{1,2};\;j=\overline{1,n}.$$

Теорема доведена.

Рекурентні алґоритми обчислення визначника $\Delta^*_{\nu\alpha}(p)$системи та визначників

$$\Delta_{\overline{1,2k-1}},\Delta'_{\overline{1,2k-1}},\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}},\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}$$

1) обчислення визначників $\Delta_{\overline{1,2k-1}},\Delta'_{\overline{1,2k-1}}$:

$$\Delta_{\overline{1,1}}=U^{11}_{\nu\alpha_{11}}(q_1R_1);\Delta'_{\overline{1,1}}=U^{11}_{\nu\alpha_{21}}(q_1R_1);$$

$$\Delta_{\overline{1,2k-1}}=\begin{vmatrix}-U^{k-1,1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1}) & -U^{k-1,2}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1})\\ U^{k1}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k) & U^{k2}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k)\end{vmatrix}\cdot\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\begin{vmatrix}-U^{k-1,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1}) & -U^{k-1,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1})\\ U^{k1}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k) & U^{k2}_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_k)\end{vmatrix}\Delta'_{\overline{1,2k-3}}=$$
$$=\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_kR_{k-1},q_kR_k)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-\Delta_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_{k-1},q_kR_k)\Delta_{\overline{1,2k-3}};$$
$$\Delta'_{\overline{1,2k-1}}=\begin{vmatrix}-U^{k-1,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1}) & -U^{k-1,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1})\\ U^{k1}_{21}(q_kR_k) & U^{k2}_{21}(q_kR_k)\end{vmatrix}\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\begin{vmatrix}-U^{k-1,1}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1}) & -U^{k-1,2}_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1})\\ U^{k1}_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k) & U^{k2}_{\nu\alpha_{21}}(q_kR_k)\end{vmatrix}\cdot\Delta'_{\overline{1,2k-2}}= \tag{48}$$
$$=\Delta_{\nu\alpha_{12}}(q_kR_{k-1},q_kR_k)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-\Delta_{\nu\alpha_{22}}(q_kR_{k-1},q_kR_k)\Delta_{\overline{1,2k-3}};k=\overline{2,n}.$$

2) обчислення визначника $\Delta^*_{\nu\alpha}(p)$ системи . Розклавши визначник системи по останньому *(2n+1)* - му рядку, одержуємо:

$$\Delta^*_{\nu\alpha}(p)=\Delta_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1})\cdot\Delta'_{\overline{1,2n-1}}-\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_{n+1}R_n,q_{n+1}R_{n+1})\cdot\Delta_{\overline{1,2n-1}}, \tag{49}$$

3) обчислення визначників $\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}}$, $\mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}}$:

$$\mathrm{A}_{\overline{1,2n-1}}=\begin{vmatrix}-U^{n1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_n) & -U^{n2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_n)\\ U^{n+1,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_{n+1}) & U^{n+1,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_{n+1})\end{vmatrix}=-\Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_{n+1}l_n,q_{n+1}l_{n+1});\mathrm{A}'_{\overline{1,2n-1}}=\begin{vmatrix}-U^{n1}_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n) & -U^{n2}_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}R_n)\\ U^{n+1,1}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_{n+1}) & U^{n+1,2}_{\nu\alpha_{22}}(q_{n+1}R_{n+1})\end{vmatrix}=-\Delta_{\nu\alpha_{12}}(q_{n+1}l_n,q_{n+1}l_{n+1});$$

$$\mathrm{A}_{\overline{1,2k+1}} = \begin{vmatrix} -U_{\nu\alpha_{22}}^{k+1,1}(q_{k+2}R_{k+1}) & -U_{\nu\alpha_{22}}^{k+1,2}(q_{k+2}R_{k+1}) \\ U_{\nu\alpha_{11}11}^{k+2,1}(q_{k+2}R_{k+2}) & U_{\nu\alpha_{11}}^{k+2,2}(q_{k+2}R_{k+2}) \end{vmatrix} \mathrm{A}_{\overline{1,2k+3}} - \begin{vmatrix} -U_{\nu\alpha_{22}}^{k+1,1}(q_{k+2}R_{k+1}) & -U_{\nu\alpha_{22}}^{k+1,2}(q_{k+2}R_{k+1}) \\ V_{\nu\alpha_{21}}^{k+2,1}(q_{k+2}R_{k+2}) & U_{\nu\alpha_{21}}^{k+,2}(q_{k+2}R_{k+2}) \end{vmatrix} \cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2k+3}} =$$
$$= \Delta_{\nu\alpha_{22}}(q_{k+2}R_{k+1,}q_{k+2}R_{k+2})\mathrm{A}'_{\overline{1,2k+3}} - \Delta_{\nu\alpha_{21}}(q_{k+2}R_{k+1,}q_{k+2}R_{k+2})\mathrm{A}_{\overline{1,2k+3}};$$
$$\mathrm{A}'_{\overline{1,2k+1}} = \begin{vmatrix} -U_{\nu\alpha_{12}}^{k+1,1}(q_{k+2}R_{k+1}) & -U_{\nu\alpha_{12}}^{k+1,2}(q_{k+2}R_{k+1}) \\ U_{\nu\alpha_{11}}^{k+2,1}(q_{k+2}R_{k+2}) & U_{\nu\alpha_{11}}^{k+2,2}(q_{k+2}R_{k+2}) \end{vmatrix} \mathrm{A}_{\overline{1,2k+3}} - \begin{vmatrix} -U_{\nu\alpha_{12}}^{k+1,1}(q_{k+2}R_{k+1}) & -U_{\nu\alpha_{12}}^{k+1,2}(q_{k+2}R_{k+1}) \\ U_{\nu\alpha_{21}}^{k+2,1}(q_{k+2}R_{k+2}) & U_{\nu\alpha_{21}}^{k+,2}(q_{k+2}R_{k+2}) \end{vmatrix} \cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2k+3}} = \quad (50)$$
$$= \Delta_{\nu\alpha_{12}}(q_{k+2}R_{k+1,}q_{k+2}R_{k+2})\mathrm{A}'_{\overline{1,2k+3}} - \Delta_{\nu\alpha_{11}}(q_{k+2}R_{k+1,}q_{k+2}R_{k+2})\mathrm{A}_{\overline{1,2k+3}}; k = \overline{2, n-2.};$$

Тут $\Delta_{\nu\alpha_{m1}}(q_k R_{k-1}, q_k R_k) = U_{\nu\alpha_{m2}}^{k-1,1}(q_k R_{k-1}) \cdot U_{\nu\alpha_{11}}^{k2}(q_k R_k) - U_{\nu\alpha_{m2}}^{k-1,2}(q_k R_{k-1}) \cdot U_{\nu\alpha_{11}}^{k1}(q_k R_k)$;

$\Delta_{\nu\alpha_{m2}}(q_k R_{k-1}, q_k R_k) = U_{\nu\alpha_{m2}}^{k-1,1}(q_k R_{k-1}) \cdot U_{\nu\alpha_{21}}^{k2}(q_k R_k) - U_{\nu\alpha_{m2}}^{k-1,2}(q_k R_{k-1}) \cdot U_{\nu\alpha_{21}}^{k1}(q_k R_k); m = \overline{1,2}$.

Рекурентний алґоритм обчислення визначника системи $\Delta_{\nu\alpha}^{*}(p)$ може бути побудований і з використанням визначників $\mathrm{A}_{\overline{1,2k+1}}, \mathrm{A}'_{\overline{1,2k+1}}, k = \overline{2,n}$.

Висновки

Запропоновано математичну модель адсорбційного масопереносу в обмеженому циліндричному неоднорідному нанопористому середовищі і отримано аналітичний розв'язок, що в узагальненому вигляді описують вплив важливих фізичних чинників внутрішньої кінетики переносу, головним серед яких є система *n*-інтерфейсних нестаціонарних взаємодій на масообмінних межах. Це дозволяє моделювати концентраційні поля та здійснювати комплексний аналіз внутрішньої кінетики масопереносу як на макрорівні, так і в мікро- та нанопорах частинок адсорбентів, проектувати оптимальні технологічні схеми та досліджувати на оптимальність різні нестаціонарні режими масопереносу для багатоскладових пористих середовищ. Розв'язок моделі та рекурентні матричні алґоритми побудови матриць функцій впливу неоднорідної крайової задачі масопереносу дозволяють формулювати і розв'язувати зворотні задачі масопереносу - визначення кінетичних параметрів за експериментальними розподілами. Це дозволяє реалізовувати ефективні процедури перевірки на адекватність параметрів моделювання і фізичного експерименту і є одним із перспективних напрямків подальшого дослідження.

The exact analytical solution of the problem of adsorption mass transfer for heterogeneous n – interface cylindrical limited porous medias with n –interface limits system with 2n+1 no stationary regimes of mass exchange process on the mass exchanged surfaces is constructed. The theorem of resolution is proved. The new recurrent algorithms and calculation procedures for constructing of fluent function matrix of system heterogeneity, of boundary conditions and of interface system condition are developed.

Література

1. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтеґральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. — Київ: Наук. думка, 2000.— 372 с.
2. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Математичне моделювання дифузійного масопереносу зі спектральним параметром для n – інтерфейсних неоднорідних і нанопористих обмежених середовищ //Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика, 2003. Вип. 1. - С. 69-95.
3. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Математичне моделювання адсорбційного масопереносу зі спектральним параметром для неоднорідних n – інтерфейсних циліндричних обмежених мікропористих середовищ з порожниною //Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2004. -Том. 9. - № 4. - С. 147-148.
4. Ленюк М.П., Лусте І.П. Узагальнені динамічні задачі термопружності для кусково-однорідних симетричних просторів і тіл. - Київ, 1993. - 80с. - (Препринт/АН України. Ін-т математики; 93.16).
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. - М.: Наука , 1965. - 715 с.
6. Лыков А.В. Тепломассообмен (Справочник).- М.: Энергия, 1971. - 560 с.
7. Chen, N.Y., T.F. Degnan and M.C. Smith, Molecular Transport and Reaction in Zeolites: Design and

Application of Shape Selective Catalysis, V.C.H. Weinheim, New York, (1994).
8. Kärger, J. and D. Ruthven, Diffusion in Zeolites and Other Microporous Solids, John Wiley & Sons, New York, 1992.
9. Magalhaes, F.D., R.L. Laurence, W.C. Conner, M.A. Springuel-Huet, A. Nosov and J. Fraissard, "Study of molecular transport in beds of zeolite crystallites: semi-quantitative modeling of ^{129}Xe NMR experiments", J. Phys. Chem. B, 101, 2277-2284 (1997).
10. Springuel-Huet, M.A., A. Nosov, J. Kärger, J. Fraissard, "^{129}Xe NMR study of bed resitance to molecular transport in assemblages of zeolite crystallites", J. Phys. Chem., 100, 7200-7203 (1996).
11. P. N'Gokoli-Kekele, M. A. Spiringuel-Huet, J. Fressard. An Analitical Study of Molecular Transport in Zeolite Bed . Adsorption.(Kluwer), 8, 35-44, (2002).
12. R. de Boor, Contemporary progress in porous theory, Apl. Mech. Rev. 53 (12), 323-369 (2000.)
13. Сергиенко И.В., Скопецький В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наукова думка, 1991.- 432 с.
14. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в теории упругости. Л.: Наука, 1967.- 402 с.

Одержано 15.03.2005 р.