УДК 539.374

А. Громик
Подільський державний аграрно-технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В ТОНКІЙ ЦИЛІНДРИЧНО-ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ У ВИГЛЯДІ НЕОБМЕЖЕНОГО КІЛЬЧАСТОГО СЕКТОРА

У даній статті методом інтегральних перетворень розв'язано задачу математичного моделювання нестаціонарних температурних полів в тонких циліндрично-ізотропних пластинах у вигляді необмеженого кільчастого сектора. Одержано точні аналітичні розв'язки алгоритмічного характеру, зручні для якісного аналізу та числових розрахунків на ЕОМ. Розглянуто випадки симетрії та асиметрії задачі теплопровідності відносно серединної площини пластини з урахуванням поведінки коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини.

Вступ

Математичне моделювання процесів теплообміну в тонких пластинах та масивних тілах в межах феноменологічної теорії теплопровідності становить значний теоретичний та практичний інтерес [1-5]. Відзначимо також, що дослідження кінетики цілого ряду фізичних і хіміко-технологічних процесів аналогічні до задач стаціонарної та нестаціонарної теорії теплопровідності. Саме цими обставинами пояснюється виняткова увага до задач теплопровідності на сучасному етапі науково-технічного прогресу. При цьому значно підвищуються вимоги до точності визначення температур і теплових потоків. У зв'язку з цим зростає вага точних аналітичних методів у розв'язанні крайових задач для рівняння (систем рівнянь) теплопровідності, які у багатьох випадках дозволяють подати загальний розв'язок задачі у вигляді, зручному для оцінки теплового режиму твердого тіла, та оцінити домінуючі фактори теплообміну. Для багатьох задач теплопровідності використання класичних методів є неефективним, наприклад, застосування методу відокремлення змінних до задач з внутрішніми джерелами тепла. Отримані класичними методами розв'язки не завжди зручні для практичного використання. Досить часто потрібно мати наближені розв'язки, які важко отримати з класичних розв'язків. Внаслідок потреб техніки за останні десятиріччя інженерами і фізиками стали широко застосовуватися операційні методи розв'язання та методи інтегральних перетворень. Зокрема, для задач теплообміну в циліндричній системі координат зручно залучати інтегральні перетворення Фур'є за кутовою змінною та інтегральні перетворення Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го й 2-го роду щодо радіальної змінної. Для тонких циліндрично-ізотропних пластин такі задачі розглянуто в [6-10], а для клиновидних пластин – в [12].

Основна частина

I. Нестаціонарне температурне поле в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді необмеженого кільчастого сектора, через бічні поверхні $z = \pm\delta$ якої відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона, в припущеннях, що:

а) термопружні характеристики пластини не залежать від температури;

б) пластина підігрівається неперервно розподіленими джерелами тепла;

в) через поверхню $r = R_0$ пластини відбувається теплообмін за законом Ньютона або ця поверхня підтримується при заданому тепловому режимі чи піддається дії теплового потоку;

г) задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластини рівні, математично моделює функція $T(\tau, r, \varphi)$, яка є обмеженим в області

$$\Pi = \{(\tau, r, \varphi) : 0 < \tau < \infty, r \in (R_0, \infty), R_0 > 0, \varphi \in (0, \varphi_0), \varphi_0 < 2\pi\}$$

розв'язком рівняння теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)T + \chi^2 T = f(\tau, r, \varphi) \quad (1)$$

за початково-крайовими умовами

$$T(\tau, r, \varphi)\big|_{\tau=0} = g(r, \varphi), \quad (2)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + \beta_1 h_{r1}\right)T\Big|_{r=R_0} = h_{r1} t_1^c(\tau, \varphi) \equiv \psi_1(\tau, \varphi), \ \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0 \quad (3)$$

та одними з крайових умов

$$T\big|_{\varphi=0} = g_1(\tau, r), T\big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_1(\tau, r), \quad (4)$$

$$T\big|_{\varphi=0} = g_2(\tau, r), \frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_2(\tau, r), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_3(\tau, r), T\big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_3(\tau, r), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_4(\tau, r), \frac{\partial T}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_4(\tau, r) \quad (7)$$

на гранях клина.
У цій задачі прийнято позначення:

$a = \lambda c_v^{-1}$ – коефіцієнт температуропровідності;

λ – коефіцієнт теплопровідності;

$\chi^2 = 2\alpha_z \Lambda^{-1}$; α_z – коефіцієнт теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$;

$\Lambda = 2\lambda\delta$ –приведений коефіцієнт теплопровідності;

$h_{r1} = \lambda^{-1}\alpha_{r1} \geq 0$ – відносний коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = R_0$;

α_{r1} – коефіцієнт теплообміну через цю поверхню;

$t_1^c(\tau, \varphi)$ –температура середовища на цій поверхні;

β_1 – коефіцієнт зв'язності крайових умов;

$f(\tau, r, \varphi) = \Lambda^{-1}\left[2\alpha_z t_c(\tau, r, \varphi) + W(\tau, r, \varphi)\right]$;

$t_c(r, \varphi)$ – температура середовища, що омиває пластину;

$W(r, \varphi)$ – потужність теплових джерел.

При цьому вважаємо, що для кожної із крайових задач (1)-(3),(4),....,(1)-(3),(7) виконуються умови узгодженості [13]. Наприклад, у випадку задачі (1)-(3),(4) вони мають вигляд:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + \beta_1 h_{r1}\right)g\Big|_{r=R_0} = \psi_1(0, \varphi), \frac{\partial g}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0,$$

$$g(r, 0) = g_1(0, r), g(r, \varphi_0) = \omega_1(0, r),$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + \beta_1 h_{r1}\right)g_1\Big|_{r=R_0} = \psi_1(\tau, 0), \frac{\partial g_1}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0,$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\beta_1 h_{r1}\right)\omega_1\Big|_{r=R_0}=\psi_1\left(\tau,\varphi_0\right),\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\right|_{r=\infty}=0.$$

Аналогічно можна виписати умови узгодженості й для інших крайових задач (1)-(3),(5),....,(1)-(3),(7).

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість [13] та задовольняють умовам застосовності вказаних нижче інтегральних перетворень.

Згідно з [14], визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ за правилами:

$$F_{m,ik}\left[f(\varphi)\right]=\int_0^{\varphi_0} f(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)d\varphi\equiv f_{m,ik}, \tag{8}$$

$$F_{m,ik}^{-1}\left[f_{m,ik}\right]=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik} f_{m,ik}U_{m,ik}(\varphi)\equiv f(\varphi), \tag{9}$$

$$\begin{gathered}F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right]=-\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik}+\left[U_{m,ik}(\varphi_0)\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}-U_{m,ik}(0)\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\right]-\\ -\left[f(\varphi_0)\left.\frac{dU_{m,ik}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}-f(0)\left.\frac{dU_{m,ik}}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\right]\equiv-\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik}+\Phi_{m,ik}(f),\end{gathered} \tag{10}$$

де

$$\beta_{m,11}=\frac{\pi m}{\varphi_0},\quad U_{m,11}(\varphi)=\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0};\qquad \beta_{m,12}=\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0},\ U_{m,12}(\varphi)=\sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0};$$

$$\beta_{m,21}=\beta_{m,12},\quad U_{m,21}(\varphi)=\cos\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0};\quad \beta_{m,22}=\beta_{m,11},\ U_{m,22}(\varphi)=\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,11}(f)=\frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0)+(-1)^{m+1}f(\varphi_0)\right];\qquad \Phi_{m,12}(f)=\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(0)+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21}(f)=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}f(\varphi_0);\qquad \Phi_{m,22}(f)=-\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}+(-1)^m\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\varepsilon_0^{ik}=0,\varepsilon_m^{ik}=1\ \text{ при }\ ik=11,12,21;\ m=1,2,3,.....\ \varepsilon_0^{22}={}^1\!/_2,\varepsilon_m^{22}=1\ \text{ при }\ m=1,2,3,......$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$ за правилом (8) внаслідок тотожності (10) крайовим задачам (1-(3),(4)....,(1)-(3),(7) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області

$$\Pi'=\left\{(\tau,r):0<\tau<\infty;0<R_0<r<\infty\right\}$$

розв'язку рівняння теплопровідності з оператором Бесселя

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T_{m,ik}}{\partial\tau}-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu^2}{r^2}\right)T_{m,ik}+\chi^2 T_{m,ik}=P_{m,ik}(\tau,r), \tag{11}$$

за початково-крайовими умовами

$$T_{m,ik}(\tau,r)\Big|_{\tau=0}=g_{m,ik}(r), \tag{12}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h_1\right)T_{m,ik}\Big|_{r=R_0}=\psi_{1,m,ik}(r),\ \ \frac{\partial T_{m,ik}}{\partial r}\Bigg|_{r=\infty}=0, \tag{13}$$

де

$$\nu=\beta_{m,ik},\ P_{m,ik}(\tau,r)=f_{m,ik}(\tau,r)+r^{-2}\Phi_{m,ik}(T),\ \ h_1=\beta_1 h_{r1}.$$

До задачі (11)-(13) застосуємо інтегральне перетворення Вебера щодо радіальної змінної r [15]:

$$H_{\nu,0}\left[f(r)\right]=\int_{R_0}^{\infty}f(r)f_\nu(r,\lambda)rdr\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{14}$$

$$H_{\nu,0}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right]=\int_0^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\frac{f_\nu(r,\lambda)\lambda d\lambda}{A_\nu^2(\lambda)+B_\nu^2(\lambda)}\equiv f(r), \tag{15}$$

$$H_{\nu,0}\left[\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}f\right]=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)+R_0f_\nu(R_0,\lambda)\left(-\frac{df}{dr}+h_1f\right)\Bigg|_{r=R_0}, \tag{16}$$

$$f_\nu(r,\lambda)=B_\nu(\lambda)N_\nu(\lambda r)-A_\nu(\lambda)\Im_\nu(\lambda r),$$

$$B_\nu(\lambda)=\left(h_1+\frac{\nu}{R_0}\right)\Im_\nu(\lambda R_0)-\lambda\Im_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

$$A_\nu(\lambda)=\left(h_1+\frac{\nu}{R_0}\right)N_\nu(\lambda R_0)-\lambda N_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

де $\Im_\nu(x), N_\nu(x)-$ циліндричні функції дійсного аргументу 1-го та 2-го роду ν-го порядку.

Інтегральний оператор $H_{\nu,0}$ за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (11)-(13) ставить у відповідність задачу Коші

$$\frac{d\tilde{T}_{m,ik}}{d\tau}+a\omega^2\tilde{T}_{m,ik}=a\left[\tilde{P}_{m,ik}(\tau,\lambda)+R_0f_\nu(R_0,\lambda)\psi_{1,m,ik}(\tau)\right], \tag{17}$$

$$\tilde{T}_{m,ik}(\tau)\Big|_{\tau=0}=\tilde{g}_{m,ik}(\lambda),\ \ \omega^2=\chi^2+\lambda^2. \tag{18}$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв’язком задачі (17)-(18) є функція

$$\begin{gathered}\tilde{T}_{m,ik}(\tau,\lambda)=e^{-a\omega^2\tau}\tilde{g}_{m,ik}+a\int_0^{\tau}e^{-a\omega^2(\tau-s)}\tilde{P}_{m,ik}(s,\lambda)ds+\\ +aR_0\int_0^{\tau}e^{-a\omega^2(\tau-s)}f_\nu(R_0,\lambda)\psi_{1m,ik}(s)ds\end{gathered}. \tag{19}$$

Застосувавши до функції $\tilde{T}_{m,ik}(\tau,\lambda)$, визначеної формулою (19), обернене перетворення Вебера за правилом (15) та обернене скінченне інтегральне перетворення Фур’є за правилом (9), одержуємо функцію

$$\begin{gathered}T_{ik}(\tau,r,\varphi)=\int_{R_0}^{\infty}\int_{0}^{\varphi_0}G_{ik}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)\,g(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho+\\+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}G_{ik}(\tau-s,r,\rho,\varphi,\alpha)\,f(s,\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho ds+\\+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0}W_{r,ik}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\psi_1(s,\alpha)\,d\alpha ds+\\+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}H_{ik}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\rho^{-1}d\rho ds,\ ik=1,2,\end{gathered}\tag{20}$$

яка математично моделює температурне поле в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді необмеженого кільчастого сектора.

У формулі (20) беруть участь головні розв'язки:
функція Коші

$$G_{ik}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)U_{m,ik}(\alpha)U_{m,ik}(\varphi),\tag{21}$$

радіальна функція Гріна

$$W_{r,ik}(\tau,r,\varphi,\alpha)=R_0G_{ik}(\tau,r,R_0,\varphi,\alpha)\tag{22}$$

та функції

$$H_{ik}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)\Phi_{m,ik}(T(\rho))U_{m,ik}(\varphi)\tag{23}$$

відповідної крайової задачі,
де

$$G_{m,ik}(r,\rho)=\int_0^{\infty}e^{-a\lambda^2\tau}\frac{f_\nu(r,\lambda)f_\nu(\rho,\lambda)\lambda d\lambda}{A_\nu^2(\lambda)+B_\nu^2(\lambda)}.\tag{24}$$

Проведемо аналіз формули (20) в залежності від типу крайових умов, тобто в залежності від задання температури чи теплового потоку на гранях $\varphi=0$ і $\varphi=\varphi_0$ тонкої циліндрично-ізотропної пластини у вигляді необмеженого кільчастого сектора.

1^0. Нехай на гранях $\varphi=0$ та $\varphi=\varphi_0$ задано крайові умови 1-го роду (умови (4)).У цьому випадку функція

$$H_{11}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}mG_{m,11}(r,\rho)\left[g_1(\rho)+(-1)^{m+1}\omega_1(\rho)\right]\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.\tag{25}$$

Якщо визначити нижню $W_{\varphi,11}^{н}(\tau,r,\rho,\varphi)$ та верхню $W_{\varphi,11}^{в}(\tau,r,\rho,\varphi)$ тангенціальні функції Гріна крайової задачі (1)-(3),(4), то її розв'язком буде функція

$$\begin{gathered}T_{11}(\tau,r,\varphi)=\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}G_{11}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)\,g(\rho,\alpha)\,\rho d\alpha d\rho+\\+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}G_{11}(\tau-s,r,\rho,\varphi,\alpha)\,f(s,\rho,\alpha)\,\rho d\alpha d\rho ds+\\+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0}W_{r,11}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\psi_1(s,\alpha)\,d\alpha ds+\\+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}\left[W_{\varphi,11}^{н}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\,g_1(s,\rho)+W_{\varphi,11}^{в}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\,\omega_1(s,\rho)\right]\rho^{-1}d\rho ds.\end{gathered}\tag{26}$$

У формулі (26) прийняті позначення:

$$W^{н}_{\varphi,11}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}mG_{m,11}(r,\rho)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},\qquad(27)$$

$$W^{в}_{\varphi,11}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{2\pi}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}G_{m,11}(r,\rho)\sin\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.\qquad(28)$$

2^0. Нехай на грані $\varphi=0$ задано крайову умову 1-го роду, а на грані $\varphi=\varphi_0$ задано крайову умову 2-го роду (умови (5)). У цьому випадку

$$W^{н}_{\varphi,12}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{\pi}{\varphi_0^2}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)G_{m,12}(r,\rho)\sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0},\qquad(29)$$

$$W^{в}_{\varphi,12}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}G_{m,12}(r,\rho)\sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.\qquad(30)$$

При цьому функція $T_{12}(\tau,r,\varphi)$ визначається формулою (26) із заміною в головних розв'язках індексу *11* на індекс *12* і функцій g_1,ω_1 на функції g_2,ω_2.

3^0. Нехай на грані $\varphi=0$ задано крайову умову 2-го роду, а на грані $\varphi=\varphi_0$ задано крайову умову 1-го роду (умови (6)). Тоді маємо:

$$W^{н}_{\varphi,21}(\tau,r,\rho,\varphi)=-\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}G_{m,21}(r,\rho)\cos\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0},\qquad(31)$$

$$W^{в}_{\varphi,21}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{\pi}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}G_{m,21}(r,\rho)\cos\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.\qquad(32)$$

Функція $T_{21}(\tau,r,\varphi)$ визначається формулою (26) із заміною в головних розв'язках індексу *11* на індекс *21* і функцій g_1,ω_1 на функції g_3,ω_3.

4^0. Нехай на гранях $\varphi=0$ та $\varphi=\varphi_0$ задано крайові умови 2-го роду (умови (7)). У цьому випадку

$$W^{н}_{\varphi,22}(\tau,r,\rho,\varphi)=-\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}G_{m,22}(r,\rho)\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},\qquad(33)$$

$$W^{в}_{\varphi,22}(\tau,r,\rho,\varphi)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}(-1)^{m}G_{m,22}(r,\rho)\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.\qquad(34)$$

При цьому функція $T_{22}(\tau,r,\varphi)$ також визначається формулою (26) із заміною в головних розв'язках індексу *11* на індекс *22* і функцій g_1,ω_1 на функції g_4,ω_4.

II. Якщо задача теплопровідності не симетрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластини рівні, то нестаціонарне температурне поле математично моделює функція [1]

$$t(\tau,r,\varphi,z)=T(\tau,r,\varphi)+\frac{z}{\delta}T^*(\tau,r,\varphi)\equiv T_1(\tau,r,\varphi)+\frac{z}{\delta}T_2(\tau,r,\varphi),\qquad(35)$$

де

$$T_1(\tau,r,\varphi)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}t(\tau,r,\varphi,z)\,dz,\;T_2(\tau,r,\varphi)=\frac{3}{2\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta}zt(\tau,r,\varphi,z)\,dz.$$

При цьому функції $T_j(\tau,r,\varphi)$ є обмеженим в області П розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [15]

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T_j}{\partial \tau}-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)T_j+\chi_j^2 T_j=f_j(\tau,r,\varphi);\quad j=1,2 \tag{36}$$

за початково-крайовими умовами

$$T_j(\tau,r,\varphi)\big|_{\tau=0}=g_j(r,\varphi),\qquad j=1,2, \tag{37}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h_1\right)T_j\Big|_{r=R_0}=\psi_{1j}(\tau,\varphi),\ \left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_{r=\infty}=0 \tag{38}$$

та одними з крайових умов

$$T_j\big|_{\varphi=0}=g_{1j}(\tau,r),T_j\big|_{\varphi=\varphi_0}=\omega_{1j}(\tau,r), \tag{39}$$

$$T_j\big|_{\varphi=0}=g_{2j}(\tau,r),\left.\frac{\partial T_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=-\omega_{2j}(\tau,r), \tag{40}$$

$$\left.\frac{\partial T_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=g_{3j}(\tau,r),T_j\big|_{\varphi=\varphi_0}=\omega_{3j}(\tau,r), \tag{41}$$

$$\left.\frac{\partial T_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=g_{4j}(\tau,r),\left.\frac{\partial T_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=-\omega_{4j}(\tau,r) \tag{42}$$

на гранях клина.

У цій задачі прийнято позначення:

$\chi_1^2=2\alpha_z\Lambda^{-1},\quad \chi_2^2=6\Lambda^{-1}\left(\alpha_z+2r_z^{-1}\right);$

$r_z=2\delta\lambda^{-1}$ – коефіцієнт термоопору;

$$f_1(\tau,r,\varphi)=\Lambda^{-1}\left(2\alpha_z t_+^c(\tau,r,\varphi)+W(\tau,r,\varphi)\right),\qquad t_\pm^c=\frac{\left(t_c^+\pm t_c^-\right)}{2};$$
$$f_2(\tau,r,\varphi)=\Lambda^{-1}\left(6\alpha_z t_-^c(\tau,r,\varphi)+W^*(\tau,r,\varphi)\right),$$

$t_c^\pm$ – температура середовища, що омиває поверхні $z=\pm\delta$;

$W(\tau,r,\varphi),W^*(\tau,r,\varphi)$ – потужності теплових джерел.

При цьому вважаємо, що для кожної з крайових задач (36)-(38),(39),...,(36)-(38),(42) також виконуються умови узгодженості.

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності відповідних інтегральних перетворень.

Тоді, згідно з формулами (20)-(24), одержуємо, що функції

$$\begin{aligned}T_{j,ik}(\tau,r,\varphi)&=\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}G_{j,ik}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)\,g_j(\rho,\alpha)\rho\,d\alpha\,d\rho+\\&+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}G_{j,ik}(\tau-s,r,\rho,\varphi,\alpha)\,f_j(s,\rho,\alpha)\rho\,d\alpha\,d\rho\,ds+\\&+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0}W_{j,r,ik}(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\,\psi_{1j}(s,\alpha)\,d\alpha\,ds+\\&+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}H_{j,ik}(\tau-s,r,\rho,\varphi)\,\rho^{-1}d\rho\,ds,\end{aligned}\tag{43}$$

де

$$G_{j,ik}(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi_j^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)U_{m,ik}(\alpha)U_{m,ik}(\varphi), \tag{44}$$

$$W_{j,r,ik}\left(\tau,r,\varphi,\alpha\right)=R_0G_{j,ik}\left(\tau,r,R_0,\varphi,\alpha\right), \tag{45}$$

$$H_{j,ik}\left(\tau,r,\rho,\varphi\right)=\frac{2}{\varphi_0}e^{-a\chi_j^2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}\left(r,\rho\right)\Phi_{m,ik}\left(T_j\left(\rho\right)\right)U_{m,ik}\left(\varphi\right), \tag{46}$$

$$G_{m,ik}\left(r,\rho\right)=\int_0^{\infty}e^{-a\lambda^2\tau}\frac{f_\nu\left(r,\lambda\right)f_\nu\left(\rho,\lambda\right)\lambda d\lambda}{A_\nu^2\left(\lambda\right)+B_\nu^2\left(\lambda\right)}. \tag{47}$$

III. Якщо задача теплопровідності не симетрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластини різні, то функції $T_j\left(\tau,r,\varphi\right)$ є обмеженим в області П розв’язком системи диференціальних рівнянь параболічного типу [1]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T_1}{\partial\tau}-a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T_1+\dfrac{\alpha_+}{C}T_1+\dfrac{\alpha_-}{C}T_2=af_1\left(r,\varphi\right),\\ \dfrac{\partial T_2}{\partial\tau}-a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T_2+\dfrac{3}{C}\left(\alpha_++\dfrac{4}{r_z}\right)T_2+\dfrac{3\alpha_-}{C}T_1=af_2\left(r,\varphi\right),\end{cases} \tag{48}$$

за початково-крайовими умовами (37),(38) та одними з крайових умов (39),...,(42) на гранях клина.

У цій задачі прийнято позначення:

$\alpha_\pm=\alpha_z^+\pm\alpha_z^-$;

$\alpha_z^\pm$ – коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластини;

$C=2\delta c_v$ – теплоємність пластини;

$f_1\left(\tau,r,\varphi\right)=\Lambda^{-1}\left(\alpha_+t_+^c\left(\tau,r,\varphi\right)+\alpha_-t_-^c\left(\tau,r,\varphi\right)+W\left(\tau,r,\varphi\right)\right)$,

$f_2\left(\tau,r,\varphi\right)=\Lambda^{-1}\left(3\alpha_+t_-^c\left(\tau,r,\varphi\right)+3\alpha_-t_+^c\left(\tau,r,\varphi\right)+W^*\left(\tau,r,\varphi\right)\right)$.

При цьому вважаємо, що для початково-крайових задач (48),(37),(38),(39),.., (48), (37), (38), (42) виконуються умови узгодженості.

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість [13,15] та задовольняють умовам застосовності вказаних нижче інтегральних перетворень.

Інтегральний оператор Фур’є $F_{m,ik}$ мішаним задачам (48),(37),(38),(39),....,(48), (37),(38),(42) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області Π' розв’язку системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу з оператором Бесселя

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T_{1,m,ik}}{\partial\tau}-a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\nu_{m,ik}^2}{r^2}\right)T_{1,m,ik}+\dfrac{\alpha_+}{C}T_{1,m,ik}+\dfrac{\alpha_-}{C}T_{2,m,ik}=aP_{1,m,ik}\left(\tau,r\right),\\ \dfrac{\partial T_{2,m,ik}}{\partial\tau}-a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\nu^2}{r^2}\right)T_{2,m,ik}+\dfrac{3}{C}\left(\alpha_++\dfrac{4}{r_z}\right)T_{2,m,ik}+\dfrac{3\alpha_-}{C}T_{1,m,ik}=aP_{2,m,ik}\left(\tau,r\right)\end{cases} \tag{49}$$

за початково-крайовими умовами

$$T_{j,m,ik}\left(\tau,r\right)\Big|_{\tau=0}=g_{j,m,ik}\left(r\right);\ j=1,2, \tag{50}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r}+h_1\right)T_{j,m,ik}\Big|_{r=R_0}=\psi_{1j,m,ik}\left(\tau\right),\ \frac{\partial T_{j,m,ik}}{\partial r}\Bigg|_{r=\infty}=0, \tag{51}$$

де

$$P_{j,m,ik}\left(\tau,r\right)=f_{j,m,ik}+r^{-2}\Phi_{m,ik}\left(T_j\right);\ j=1,2.$$

До задачі (49)-(51) застосуємо інтегральний оператор $H_{\nu,0}$ за правилом (14). Внаслідок тотожності (16), одержуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{T}_{1,m,ik}}{\partial \tau} + \omega_1^2 \tilde{T}_{1,m,ik} + \dfrac{\alpha_-}{C} \tilde{T}_{2,m,ik} = a\tilde{\Re}_{1,m,ik}(\tau), \\ \dfrac{\partial \tilde{T}_{2,m,ik}}{\partial \tau} - \dfrac{3\alpha_-}{C} \tilde{T}_{1,m,ik} + \omega_2^2 \tilde{T}_{2,m,ik} = a\tilde{\Re}_{2,m,ik}(\tau), \end{cases} \tag{52}$$

$$\tilde{T}_{j,m,ik}(\tau)\Big|_{\tau=0} = \tilde{g}_{j,m,ik},\ j = 1,2, \tag{53}$$

де

$$\omega_1^2 = a\lambda^2 + \frac{\alpha_+}{C},\ \omega_2^2 = a\lambda^2 + \frac{3}{C}\left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z}\right),\ \tilde{\Re}_{j,m,ik}(\tau) = \tilde{P}_{j,m,ik}(\tau) + R_0 f_0(R_0,\lambda)\psi_{1j,m,ik}(\tau).$$

Характеристичне рівняння

$$\Phi(z) \equiv z^2 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)z + \omega_1^2\omega_2^2 - 3\left(\frac{\alpha_-}{C}\right)^2 = 0$$

системи звичайних диференціальних рівнянь (52) має дійсні різні корені

$$z_{1,2} = -a\left(\lambda^2 + \beta_\pm^2\right),$$

де

$$\beta_\pm = \frac{2}{\Lambda}\left(\alpha_+ + \frac{3}{r_z}\right) \pm \frac{1}{\Lambda}\sqrt{\left(\alpha_+ + \frac{6}{r_z}\right)^2 + 3\alpha_-^2} > 0 .$$

Тому розв’язуюча матриця (фундаментальна матриця розв’язків задачі Коші) цієї системи обчислюється за правилом [16]

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma e^{\tau z}\begin{bmatrix} z + \omega_1^2 & -\dfrac{\alpha_-}{C} \\ -\dfrac{3\alpha_-}{C} & z + \omega_2^2 \end{bmatrix}\frac{dz}{\Phi(z)} =$$

$$= \frac{e^{-a\tau\lambda^2}}{2q_0}\begin{bmatrix} \gamma_0^+ e^{-a\tau\beta_-^2} - \gamma_0^- e^{-a\tau\beta_+^2} & \dfrac{\alpha_-}{C}\left(e^{-a\tau\beta_+^2} - e^{-a\tau\beta_-^2}\right) \\ \dfrac{3\alpha_-}{C}\left(e^{-a\tau\beta_+^2} - e^{-a\tau\beta_-^2}\right) & \gamma_0^+ e^{-a\tau\beta_+^2} + \gamma_0^- e^{-a\tau\beta_-^2} \end{bmatrix} \equiv e^{-a\tau\lambda^2}Q(\tau),$$

де

$$q_0 = \sqrt{\left[\left(\alpha_+ + \frac{6}{r_z}\right)^2 + 3\alpha_-^2\right]}, \qquad \gamma_0^\pm = q_0 \pm \left(\alpha_+ + \frac{6}{r_z}\right).$$

Покладемо

$$T_{m,ik}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{1,m,ik}(\tau) \\ \tilde{T}_{2,m,ik}(\tau) \end{bmatrix}, \tilde{g}_{m,ik,n} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1,m,ik} \\ \tilde{g}_{2,m,ik} \end{bmatrix}, \psi_{1,m,ik}(\tau) = \begin{bmatrix} \psi_{11,m,ik}(\tau) \\ \psi_{12,m,ik}(\tau) \end{bmatrix}, \tilde{\Re}_{m,ik}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\Re}_{1,m,ik}(\tau,) \\ \tilde{\Re}_{2,m,ik}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв’язком задачі (52),(53) є вектор-функція

$$\tilde{T}_{m,ik}(\tau) = G(\tau)\tilde{g}_{m,ik} + a\int_0^\tau G(\tau - s)\tilde{\Re}_{m,ik}(s)ds . \tag{54}$$

Повертаючись у формулі (54) до оригіналів, одержуємо вектор-функцію

$$T_{ik}(\tau,r,\varphi)=Q(\tau)\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}G_{ik}^*(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)g(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho+$$
$$+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\varphi_0}Q(\tau-s)G_{ik}^*(\tau-s,r,\rho,\varphi,\alpha)f(s,\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho ds+ \quad (55)$$
$$+a\int_0^{\tau}\int_0^{\varphi_0}Q(\tau-s)W_{r,ik}^*(\tau-s,r,\varphi,\alpha)\psi_1(s,\alpha)d\alpha ds+$$
$$+a\int_0^{\tau}\int_{R_0}^{\infty}Q(\tau-s)H_{ik}^*(\tau-s,r,\rho,\varphi)\rho^{-1}d\alpha ds,$$

яка математично моделює нестаціонарне температурне поле в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді необмеженого кільчастого сектора.

У формулі (55) беруть участь функції:

$$G_{ik}^*(\tau,r,\rho,\varphi,\alpha)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)U_{m,ik}(\alpha)U_{m,ik}(\varphi), \quad (56)$$

$$W_{r,ik}^*(\tau,r,\varphi,\alpha)=R_0G_{ik}^*(\tau,r,R_0,\varphi,\alpha) \quad (57)$$

та вектор-функція

$$H_{ik}^*(\tau,r,\rho,\varphi)=\begin{bmatrix}H_{1,ik}^*(\tau,r,\rho,\varphi)\\ H_{2,ik}^*(\tau,r,\rho,\varphi)\end{bmatrix}=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}G_{m,ik}(r,\rho)\begin{bmatrix}\Phi_{m,ik}(T_1(\rho))\\ \Phi_{m,ik}(T_2(\rho))\end{bmatrix}U_{m,ik}(\varphi). \quad (58)$$

Зазначимо, що:

1) аналіз формул (55) в залежності від типу крайових умов на гранях клина ідентичний до аналізу формул (20) з пункту I;

2) при $\alpha_z^+=\alpha_z^-$ формули (55) збігаються із формулами (43), а при $\alpha_z^+=\alpha_z^-$, $t_c^+=t_c^-, W^*=0, T^*=0$ – з формулою (20);

3) випадок зміни φ в межах від φ_1 до φ_2 зводиться до розглянутого заміною $\varphi'=\varphi-\varphi_1$ $(\varphi_0\equiv\varphi_2-\varphi_1)$.

Висновки

У роботі методом інтегральних перетворень розв’язано задачу математичного моделювання нестаціонарних температурних полів в тонких циліндрично-ізотропних пластинах у вигляді необмеженого кільчастого сектора для випадків симетрії та несиметрії задачі теплопровідності відносно серединної площини пластини, а також враховано поведінку коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини. Виписано точні аналітичні розв’язки алгоритмічного характеру, зручні для якісного аналізу та числових розрахунків на ЕОМ у випадку конкретного матеріалу пластини та вихідних даних задачі.

In this article by the method of integral transformations the task of mathematical design of the unstationary temperature fields is untied in cylinder-izotrophic plates as an unlimited ring-shaped sector. The exact analytical upshots of algorithmic character are got, comfortable for the high-quality analysis and numerical calculations on COMPUTER. The cases of symmetry and asymmetry of task of heat conductivity are considered in relation to the middle plane of plate taking into account the conduct of coefficients of heat exchange from the lateral surfaces of plate.

Література

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.:Наука,1964. – 487 с.

3. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
4. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
6. Громик А.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в тонких необмежених циліндрично-ізотропних пластинах // Зб. наук. пр. Кам’янець-Подільського держ. пед. ун-ту. Серія фізико-математична (математика). – Вип. 4. – Кам’янець-Подільський: К-П ДПУ, 1998. – С. 38-43.
7. Громик А.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля у тонких необмежених циліндрично-ізотропних пластинах з круговим отвором // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Том 5, № 3. 2000. – С. 123-129.
8. Громик А.П., Конет І.М. Нестаціонарна крайова задача теорії теплопровідності тонких циліндрично-ізотропних кругових пластин // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, технічні науки . -1999. – № 10.– С. 16-20.
9. Громик А.П. Нестаціонарна крайова задача теорії теплопровідності тонких циліндрично-ізотропних кільчастих пластин // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 2000. – Вип. 5. – С. 91-97.
10. Громик А.П. Інтегральні зображення розв’язків нестаціонарних задач теплопровідності для тонких циліндрично-ізотропних пластин // Дев’ята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 16-19 травня 2002 р.): Матеріали конференції. – К.: НУТУ(КПІ), 2002. – С.60.
11. Громик А.П. Нестаціонарна крайова задача теплопровідності для тонкої циліндрично-ізотропної пластини у вигляді кругового сектора // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., Міністерство освіти і науки України, Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича. – Чернівці: Прут. – Вип. 6. – 2001. – С.13-22.
12. Громик А.П. Нестаціонарна крайова задача теплопровідності для тонкої циліндрично-ізотропної кільчастої пластини // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., Міністерство освіти і науки України, Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича. – Чернівці: Прут, 2002. – Вип.9. – С.180-192.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
14. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 204 с.
15. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – К., 1983. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.18.).
16. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

Одержано 22.12.2004 р.