Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра
вищої математики

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Звичайні диференціальні рівняння

Тернопіль
2014 р.

Г.В. Габрусєв, О.М. Самборська **Звичайні диференціальні рівняння.** Навчальний посібник для студентів які навчаються за напрямом автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.

Автори: к.ф. - м.н. Г.В Габрусєв
к.ф. – м.н., доц. О.М.Самборська

Відповідальний за випуск: к.ф. - м.н. Г.В Габрусєв

Рецензенти: к.ф. – м.н., доц. Лотоцький В.А.
к.ф. – м.н., доц. Шелестовський Б.Г.

Навчальний посібник розглянуто і затверджено
на засіданні кафедри вищої математики
протокол № від березня 2014 р.

ЗМІСТ

Тема 1: Диференціальні рівняння першого порядку (основні поняття). Рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними.

1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

яка зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1), не розв'язане відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі. Ми, в основному, розглядатимемо саме такі рівняння.

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ або } -f(x, y)dx + dy = 0.$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, одержимо рівняння першого порядку, записане у диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (3)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – відомі функції. Рівняння (3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду (1), (2) і (3):

$$xy' + y^2 - 1 = 0; \; y' = 2x - y; \; (x - 3y)dx + xydy = 0.$$

Знаходження невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме непорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».)

Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому інтервалі $(a;b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (2) обертає його в тотожність по x на $(a;b)$, тобто

$$\forall x\in(a;b):\varphi'(x)\equiv f\big(x,\varphi(x)\big).$$

Наприклад, функція $y=x\ln x$, $x\in(0;+\infty)$, є розв'язком рівняння $xy'-x-y=0$. Дійсно, підставляючи цю функцію та її похідну $y'=\ln x+1$ в дане рівняння, одержуємо тотожність

$$x(\ln x+1)-x-x\ln x\equiv 0;\ x\in(0;+\infty).$$

Неважко переконатися, що розв'язком даного рівняння є також функція $y=x\ln x+Cx$, де C – довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дає така теорема Коші.

Теорема 1 *(про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція* $f(x,y)$ *і її частинна похідна* $f'_y(x,y)$ *визначені і неперервні у відкритій області* G *площини* Oxy *і точка* $(x_0;y_0)\in G$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння (2), який задовольняє умову*

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0)=y_0.$$

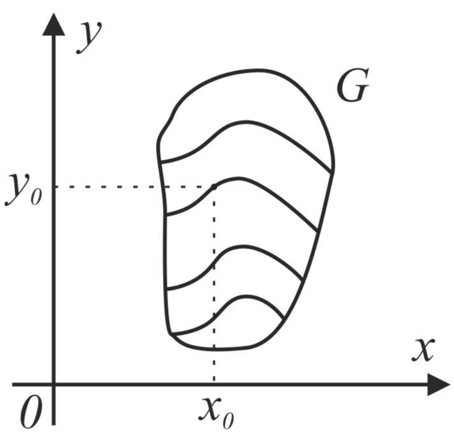

Рис. 1

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0;y_0)\in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи при цьому з області G, то одержуватимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (2) має безліч різних розв'язків (рис. 1).

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y=\varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \text{ або } y(x_0)=y_0. \qquad (5)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається *задачею Коші*. З погляду геометрії розв'язати задачу Коші – це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0;y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, $f(x,y)$ або $f'_y(x,y)$ в цих точках мають розрив), називаються *особливими*. Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком*.

Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою*. Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної.

Нехай задано рівняння

$$\Phi(x,y,C)=0, \qquad (6)$$

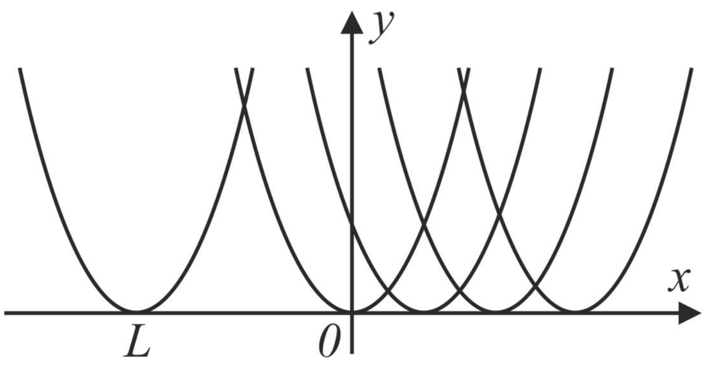

Рис. 2

де x,y – змінні декартові координати, а C – параметр. Це рівняння визначає сім'ю кривих, які залежать від одного параметра, або, як часто кажуть, *однопараметричну сім'ю кривих*.

Лінія L називається *обвідною однопараметричної сім'ї кривих* (6), якщо вона в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих і якщо в різних точках вона дотикається до різних кривих (рис. 2).

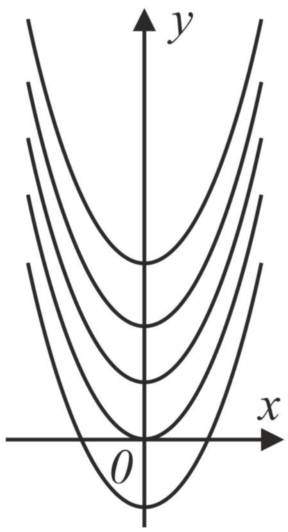

Рис. 3

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Приклади

1. Рівняння $y' = 2x$ має безліч розв'язків $y = x^2 + C$ (рис. 3) – це сім'я парабол. Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші на всій площині Oxy. Це означає, що через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

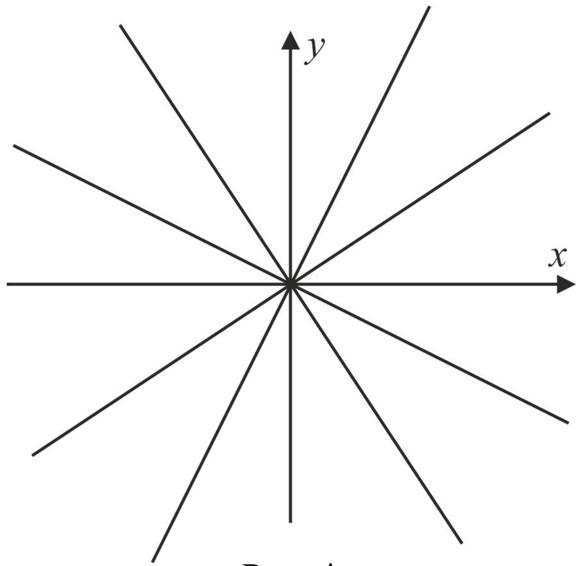

Рис. 4

2. Рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$ має безліч розв'язків $y = Cx$ (рис. 4) – це сім'я прямих, що проходять через точку $(0;0)$. Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші, якщо $x \neq 0$. Тому через кожну точку, яка не лежить на осі Oy, проходить єдина інтегральна крива (пряма). Точка $(0;0)$ – особлива, через неї проходить безліч інтегральних кривих. Особливими будуть також точки $(0;y_0)$, де $y_0 \neq 0$. Через ці точки не проходить жодної інтегральної кривої.

3. Рівняння $y' = \sqrt{y}$ має сім'ю інтегральних кривих, парабол $y = \left(\dfrac{x}{2} + C\right)^2$. Крім того, очевидно, що це рівняння має також розв'язок $y \equiv 0$. Цей розв'язок особливий, бо функція $f'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y \equiv 0$ має розрив. Пряма $y = 0$ дотикається до сім'ї парабол і є її обвідною (рис. 2).

Розглянуті приклади показують, що диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків або сім'ю інтегральних кривих. За певних умов з цієї сім'ї можна виділити єдину криву, яка проходить через задану точку. У зв'язку з цим дамо означення частинного розв'язку диференціального рівняння.

Нехай права частина диференціального рівняння (2) задовольняє в області G умови теореми Коші.

Функція $y=\varphi(x,C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0;y_0)\in G$ можна знайти таке значення $C=C_0$, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0,C_0)=y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y=\varphi(x,C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$ при певному значенні сталої $C=C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x,y,C)=0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x,y,C_0)=0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом рівняння*.

Дамо геометричне тлумачення рівнянню (2). Нехай G – множина точок площини Oxy, в яких задані і неперервні функції $f(x,y)$ та $f'(x,y)$ і нехай точка $M_1(x_1;y_1)\in G$. Підставивши координати точки в праву частину рівняння (2), знайдемо значення похідної в цій точці:

$$y'\big|_{M_1}=f(x_1;y_1).$$

Якщо через точку M_1 проходить інтегральна крива рівняння (2), то з геометричного змісту похідної маємо $y'\big|_{M_1}=tg\alpha_1$, де α_1 – кут між дотичною до інтегральної кривої в точці M_1 і додатним напрямом осі Ox. Тому точці $M_1(x_1;y_1)$ рівняння (2) ставить у відповідність значення кута

$$\alpha_1=arctg\left(y'\big|_{M_1}\right)=arctg\,f(x_1;y_1).$$

Аналогічно точці $M_2(x_2;y_2)$ рівняння (2) ставить у відповідність напрям

$$\alpha_2 = arctg\, f\left(x_2; y_2\right).$$

Отже, кожній точці $M\left(x;y\right)\in G$ диференціальне рівняння (2) ставить у відповідність значення кута

$$\alpha = arctg\, f\left(x,y\right),$$

тому рівняння (2) геометрично задає так зване *поле напрямів*. На рис. 5 це поле зображено стрілками (іноді поле напрямів зображають маленькими відрізками). Кожній точці $M\left(x;y\right)\in G$ відповідає певна стрілка з кутовим коефіцієнтом $tg\alpha = f\left(x,y\right)$. Зрозуміло, що практично ми можемо побудувати лише кілька стрілок, але можна уявити, що стрілки проведені в кожній точці області G.

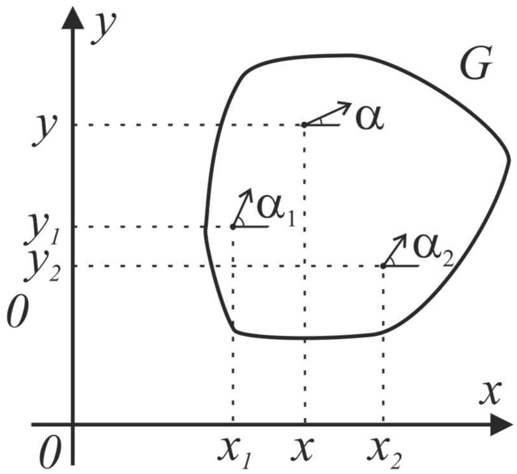

Рис. 5

Розглянемо тепер інтегральну криву рівняння (2). Оскільки напрям дотичної до інтегральної кривої в даній точці збігається з напрямом поля в цій точці, то геометрично задачу інтегрування диференціального рівняння можна тлумачити так: знайти такі криві, напрям дотичних до яких збігається з напрямом поля у відповідних точках.

Таким чином, з погляду геометрії рівняння $y' = f\left(x,y\right)$ визначає на площині поле напрямів, а розв'язок цього рівняння – інтегральну криву, яка в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

Знаючи поле напрямів диференціального рівняння, можна наближено побудувати його інтегральні криві. Для того щоб полегшити побудову поля напрямів, користуються методом ізоклін. *Ізокліною* називається крива на площині Oxy, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих мають один і той самий напрям. Отже, усі інтегральні криві, які перетинають ізокліну, в точках перетину нахилені до осі Ox під одним і тим самим кутом. Звідси походить і назва «ізокліна» – лінія однакового нахилу.

Очевидно, для диференціального рівняння (2) рівняння ізокліни, яка відповідає кутовому коефіцієнту $y' = a = const$, має вигляд

$$f\left(x,y\right) = a.$$

Різним значенням a відповідають на площині Oxy різні ізокліни. При цьому напрям кожної ізокліни визначається кутом $\alpha = arctg\, a$.

Приклад. Знайти поле напрямів диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ і інтегральну криву, яка проходить через точку $O(0;0)$.

Ізоклінами тут буде сім'я концентричних кіл $x^2 + y^2 = a,\ a \geq 0$. При $a = \frac{1}{2}$, наприклад, ізокліною є коло $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, напрям поля цієї ізокліни визначається кутом $arctg\frac{1}{2} \approx 26^0$. Якщо $a = 1$, маємо ізокліну $x^2 + y^2 = 1$, напрям поля якої визначається кутом $arctg1 \approx 45^0$ і т. д. При $a = 0$ одержимо $x^2 + y^2 = 0$. Цьому рівнянню відповідав єдина точка $O(0;0)$, тобто ізокліна містить лише одну точку. Напрям поля в цій точці збігається з додатним напрямом осі Ox. Щоб зобразити інтегральну криву, через початкову точку $O(0;0)$ проводимо криву, яка б в кожній своїй точці мала напрям поля, тобто дотикалась до відповідної стрілки.

Переходимо тепер до розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку. Якщо задачу про знаходження всіх розв’язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння *інтегрується в квадратурах (або зводиться до квадратур)*. Зрозуміло, що далеко не кожне диференціальне рівняння, яке інтегрується в квадратурах, має розв’язок, який виражається через елементарні функції. Більше того, дуже часто диференціальне рівняння не можна проінтегрувати не тільки в елементарних функціях, а й у квадратурах. Проте існують окремі типи диференціальних рівнянь, для яких це можливо.

Розглянемо такі рівняння. На жаль, клас інтегровних в квадратурах диференціальних рівнянь надзвичайно вузький.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y), \tag{7}$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Права частина рівняння (7) є добутком двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) на $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y)\neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx. \qquad (8)$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*.

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Таким чином, рівняння (7) розв’язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0. \qquad (9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв’язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0)=0$, то стала $y=y_0$ є розв’язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв’язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax+by+c), \qquad (10)$$

де a, b, c – задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \tag{11}$$

рівняння (10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, диференціюючи рівність (11) по x, отримаємо $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, тому згідно з (10) маємо рівняння $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a + bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx.$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax + by + c$, одержимо загальний інтеграл рівняння (10).

Якщо $a + bf(u) = 0$, або, що те ж саме, $\frac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (11), рівняння (10) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = (x + y)^2$.

Покладемо $u = x + y$, тоді

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \text{ або } \frac{du}{dx} = 1 + u^2,$$

звідки $\frac{du}{1 + u^2} = dx$.

Інтегруючи це рівняння, знаходимо $arctg\, u = x + C$, тобто $arctg(x + y) = x + C$ – загальний інтеграл заданого рівняння. Інших розв'язків це рівняння не має, бо $1 + u^2 \neq 0$.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати рівняння $(x + xy^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.

Розв'язання. Оскільки це рівняння можна записати у вигляді $x\left(1+y^2\right)dx - y\left(1+x^2\right)dy = 0$, то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \text{ або } \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\ln\left(1+x^2\right) = \ln\left(1+y^2\right) + \ln|C|, \ C \neq 0.$$

Потенціюючи, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \ C \neq 0.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння $\left(xy^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - x^2 y\right)dy = 0$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2\left(x+1\right)dx + x^2\left(1-y\right)dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2 y^2 \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0,$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C, \ C \in R,$$

або

$$\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = C,$$

звідки

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C \text{, або } \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C .$$

Рівняння $xy = 0$ має розв’язки $x = 0$ і $y = 0$, тому прямі $x = 0$ та $y = 0$ є інтегральними кривими даного рівняння. Вони не утворюються із загального інтеграла ні при якому значенні C. Отже, розв’язки $x = 0$ та $y = 0$ є особливими і їх слід виписувати додатково до загального інтеграла.

Задача 3. Знайти частинний розв’язок рівняння $\left(1 + x^2\right)dy + ydx = 0$, який задовольняє початкову умову $y\left(0\right) = 1$.

Розв’язання. Відокремимо змінні і проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1+x^2} = 0 ;$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{1+x^2} = C ;$$

$$\ln|y| + arctg\, x = C .$$

Одержали загальний інтеграл. Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C:

$$\ln 1 + arctg\, 0 = C \text{, звідки } C = 0 .$$

Підставивши знайдену сталу в загальний інтеграл, дістанемо шуканий частинний розв'язок:

$$\ln|y| + arctg\, x = 0 \text{, звідки } y = e^{-arctg\, x} .$$

Задача 4. Знайти частинний розв’язок рівняння $e^x dx - \left(1 + e^x\right) y dy = 0$, який задовольняє початкову умову $y\left(0\right) = 1$.

Розв’язання. Відокремимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{e^x}{1+e^x} dx = y\, dy ;$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int y\,dy;$$

$$\ln\left(1+e^x\right) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Отримали загальний інтеграл рівняння.

Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C:

$\ln 2 = \frac{1}{2} + C$, звідки $C = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Підставивши знайдене значення сталої C у загальний розв'язок, одержимо частинний розв'язок заданого рівняння:

$\ln\left(1+e^x\right) = \frac{y^2}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2}$ або $y^2 = 1 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$,

$$y = \sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2\,chy\,dx - \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)dy = 0$.

Розв'язання. Оскільки $chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, то отримаємо:

$$\left(e^y + e^{-y}\right)dx - \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)dy = 0.$$

Відокремивши змінні, одержимо:

$$\frac{dy}{e^y + e^{-y}} - \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0.$$

Звідси $\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$,

$$\int \frac{e^y dy}{e^{2y} + 1} = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)dx,$$

$$\int \frac{d\left(e^{y}\right)}{\left(e^{y}\right)^{2}+1}=\frac{1}{2}\left(\int (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1)-\int (x-1)^{\frac{1}{2}} d(x-1)\right),$$

$$arctg\left(e^{y}\right)=\frac{1}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+C .$$

Остаточно одержимо:

$$y=\ln tg\left(C+\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right),\ x \geq 1 .$$

Задача 6. Розв’язати рівняння $y'=(8x+2y+1)^{2}$.

Розв’язання. Задане рівняння заміною $u(x)=8x+2y+1$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, $y=\frac{1}{2}(u-8x-1)$, $y'=\frac{1}{2}(u'-8)$, тому одержимо рівняння $\frac{1}{2}(u'-8)=u^{2}$ або $u'=2\left(u^{2}+4\right)$. Звідси $du=2\left(u^{2}+4\right)dx$, $\frac{du}{u^{2}+4}=2\,dx$, $\int \frac{du}{u^{2}+4}=2\int dx$, $\frac{1}{2}arctg\frac{u}{2}=2x+\frac{C}{2}$, $arctg\frac{u}{2}=4x+C$, $u=2tg(4x+C)$. Отже, $8x+2y+1=2tg(4x+C)$. Ми знайшли загальний інтеграл заданого рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв’язати диференціальні рівняння.
   1) $2y(1+x^{2})y'+\sqrt{2-y^{2}}=0$;
   2) $ydy-xdx=xy^{2}dx-yx^{2}dy$;
   3) $(4+e^{x})\,yy'=e^{x}$;
   4) $(x^{2}+1)ydy+\sqrt{2+y^{2}}dx=0$;
   5) $x\sqrt{1+y^{2}}+yy'\sqrt{1+x^{2}}=0$;
   6) $(e^{2x}+4)dy+ye^{2x}dx=0$;
   7) $\sqrt{1+y^{2}}dx-ydy=x^{2}ydy$;

8) $3ydy - 20xdx = 5xy^2dx - 3x^2ydy$;

9) $3xdx - 4ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$;

10) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$;

11) $2(y\,dy - 3x\,dx) = 3xy^2dx - 2yx^2dy$;

12) $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2dx$;

13) $(e^x + 4)dy - 3ye^xdx = 0$;

14) $y'y\,\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0$;

15) $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$;

16) $\sqrt{3+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$;

17) $\sqrt{2+y^2}dx + 4(x^2y + y)\,dy = 0$;

18) $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$;

19) $y(1+\ln y) + xy' = 0$;

20) $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0$;

21) $y\ln y - xy' = 0$;

22) $6x\,dx - y\,dy = yx^2dy - 3xy^2dx$;

23) $y\ln y + xy' = 0$;

24) $2x\,dx - 3y\,dy = yx^2dy - xy^2dx$;

25) $y'\sqrt{4-x^2} = \sqrt{1+4y^2}$;

26) $x(2+\ln x)\,dy + y\,dx = 0$;

27) $2(xy^2 + x)\,dx + \sqrt{4+x^2}\,dy = 0$;

28) $y(4+e^{2x})\,dy = e^{2x}dx$;

29) $\sqrt{2-x^2}\,dy - (4x + 4xy^2)\,dx = 0$;

30) $x^2y' - \cos y - 1 = 0$.

2. Знайти розвязок задачі Коші.

1) $\left(1+e^{2x}\right)y^2dy = e^xdx;\; y(0) = 1$;

2) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y);\; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $tgx\sin^2 y\,dx + \cos^2 x ctg\,y\,dy = 0;\; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

4) $3e^x tg\, y dx + (1+e^x)\sec^2 y\, dy = 0;\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

5) $y' = e^{x+y} + e^{x-y};\ y(0) = 0$;

6) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(x^2 y - y\right)dy = 0;\ y(0) = 1$;

7) $\left(1+e^x\right)yy' = e^x;\ y(0) = 1$;

8) $y' tgx = y;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

9) $y = y' \cdot \ln y;\ y(2) = 1$;

10) $yy' + xe^y = 0;\ y(1) = 0$;

11) $y' \sin x = y \ln y;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$;

12) $y' = 2^{x-y};\ y(-3) = -5$;

13) $xyy' = 1 - x^2;\ y(1) = 1$;

14) $xy' - y = y^3;\ y(1) = 1$;

15) $y \ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0;\ y\left(-\dfrac{15}{16}\right) = e$;

16) $(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0;\ y(0) = 1$;

17) $yy' + 2x \sec y = 0;\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

18) $\sec^2 x\, tg\, y\, dx + \sec^2 y\, tgx\, dy = 0;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

19) $x\sqrt{1+y^2}\, dx + y\sqrt{1+x^2}\, dy = 0;\ y(1) = 1$;

20) $y - xy' = 1 + x^2 y';\ y(1) = 2$;

21) $x(y^6+1)\, dx + y^2(x^4+1)dy = 0;\ y(0) = 1$;

22) $y' = e^{2x+3y};\ y(0) = 0$;

23) $(xy^2 + x)dy + (x^2 y - y)dx = 0;\ y(1) = 1$;

24) $y\, y' \cos y + x \sin x = 0;\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

25) $y\, e^{2x} dx - (1+e^{2x})dy = 0;\ y(0) = 2\sqrt{2}$;

26) $xy\, dx + \sqrt{1-x^2}\, dy = 0;\ y(0) = 2e$;

27) $y' tgx = y + 2;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$;

28) $3(1+y^2)dx - 2xy\, dy = 0;\ y(1) = 0$;

29) $(1+x)(e^y dy - e^{2x}dx) - (1+x^2)\,dx = 0;\ y(0)=0$;

30) $(1+y^2)\,x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0;\ y(0)=1$.

Тема 2: Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що зводяться до однорідних. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах.

2.1. Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру* відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Наприклад, функція $f(x,y) = x^2 - 5xy$ – однорідна функція другого виміру, оскільки

$$f(tx,ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2\left(x^2 - 5xy\right) = t^2 f(x,y);$$

функція $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{\sqrt{xy}}$ – однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx,ty) = \frac{2(tx)-(ty)}{\sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{t(2x-y)}{t\sqrt{xy}} = \frac{2x-y}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x,y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{12}$$

називається *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Очевидно, рівняння виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{13}$$

буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = ux, \tag{14}$$

де u – невідома функція: $u = u(x)$.

Якщо функція (14) є розв'язком диференціального рівняння (12) і

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \text{ то } u + x\frac{du}{dx} = f(x, ux). \tag{15}$$

За умовою $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx, ty) \equiv f(x, y)$. Поклавши в цій тотожності $y = ux$ і $t = \frac{1}{x}$, одержимо $f(x, ux) = f(1, u)$, тому рівняння (15) набуває вигляду

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u). \tag{16}$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $f(1, u) - u \neq 0$ то, відокремлюючи змінні, одержуємо рівняння

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x};$$

проінтегрувавши, знайдемо

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Підставимо після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$ і отримаємо інтеграл рівняння (12). Якщо $f(1, u) - u = 0$, то рівняння (16) запишеться у вигляді

$$x\frac{du}{dx} = 0.$$

У цьому випадку рівняння (12) і (13) можуть мати ще розв'язки $y = Cx(x \neq 0)$ та $x = 0(y \neq 0)$.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Розв'язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x,y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Застосувавши підстановку $y = ux$, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння:

$$xu' + u = \frac{1+u^2}{2};\quad xu' = \frac{1+u^2}{2} - u;\quad xu' = \frac{(u-1)^2}{2};\quad x\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2};$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x};\quad \int\frac{2du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x};\quad -\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$-\frac{2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln|Cx|;\quad \frac{2x}{x-y} = \ln|Cx|;\quad Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}.$$

При відокремленні змінних ми ділили на x і на $(u-1)^2$, що можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 1$. Точки, в яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому пряма $x = 0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Нехай $u = 1$, тобто $y = x$. Функція $y = x$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказувати додатково до знайденого загального інтеграла рівняння.

Задача 2. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді: $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}}$. Це рівняння є однорідним, тому застосувавши підстановку $y = ux$, одержимо:

$$u'x + u = u + u^2 e^{-\frac{1}{u}};$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2e^{-\frac{1}{u}};$$

$$\frac{e^{\frac{1}{u}}du}{u^2}=\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{e^{\frac{1}{u}}du}{u^2}=\int\frac{dx}{x}; \quad -\int e^{\frac{1}{u}}d\left(\frac{1}{u}\right)=\int\frac{dx}{x}$$

$$-e^{\frac{1}{u}}=\ln|x|-C; \quad e^{\frac{1}{u}}+\ln|x|=C.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння: $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C$.

Задача 3. Розв’язати задачу Коші: $xdy-ydx=ydy,\ y(-1)=1$.

Розв’язання. Запишемо дане рівняння у вигляді: $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{y}{x-y}$ або

$$y'=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Це рівняння є однорідним. Застосувавши підстановку $y=ux$, знайдемо його загальний інтеграл.

$$u'x+u=\frac{u}{1-u}; \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-u};$$

$$\frac{(1-u)du}{u^2}=\frac{dx}{x}; \quad \int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x};$$

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C; \quad \frac{1}{u}+\ln|ux|=C.$$

Підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння: $\frac{x}{y}+\ln|y|=C$ або $x=Cy-y\ln|y|$.

Використавши початкову умову, знайдено значення довільної сталої C:

$-1 = C - \ln 1; \quad C = -1$.

Отже, шуканий частинний інтеграл рівняння має вигляд: $x = -y\left(1 + \ln|y|\right)$.

Задача 4. Розв'язати задачу Коші: $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0,\ y\left(1\right) = -2.$

Розв'язання. Записавши це рівняння у вигляді $y' = -\dfrac{2xy}{y^2 - 3x^2}$ і застосувавши підстановку $y = ux$, одержимо:

$$u'x + u = -\frac{2u}{u^2 - 3} \text{ або } u'x = \frac{u - u^3}{u^2 - 3}; \quad \frac{\left(u^2 - 3\right)du}{u - u^3} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{\left(u^2 - 3\right)}{u - u^3} = \int \frac{dx}{x}.$$

Ми отримали інтеграл від раціональної функції змінної u. Щоб знайти цей інтеграл потрібно підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) розкласти на прості дроби. Цього порівняно громіздкого способу можна уникнути, якщо задане рівняння представити у вигляді:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y^2 - 3x^2}{2xy} \text{ або } \frac{dx}{dy} = \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}{\frac{2x}{y}} \text{ і вважати } x \text{ функцією від } y.$$

Оскільки це рівняння однорідне, то застосуємо підстановку $x = uy$, де $u = u\left(y\right)$ – нова невідома функція від y.

Отримаємо: $\dfrac{du}{dy}y + u = \dfrac{3u^2 - 1}{2u}$ або $\dfrac{du}{dy}y = \dfrac{u^2 - 1}{2u}$.

Відокремлюючи змінні, одержимо: $\dfrac{2u}{u^2 - 1}du = \dfrac{dy}{y}; \quad \displaystyle\int \frac{d\left(u^2 - 1\right)}{u^2 - 1} = \int \frac{dy}{y};$

$$\ln\left|u^2 - 1\right| = \ln|y| + \ln|C|; \qquad u^2 - 1 = Cy.$$

Підставивши замість u вираз $\dfrac{x}{y}$, отримаємо загальний інтеграл заданого рівняння: $x^2 - y^2 = Cy^3$.

Використавши початкову умову, знайдемо значення довільної сталої С.

$$1-4=C(-8);\ C=\frac{3}{8}.$$

Отже, ми знайшли частинний інтеграл заданого рівняння: $3y^3=8\left(x^2-y^2\right)$.

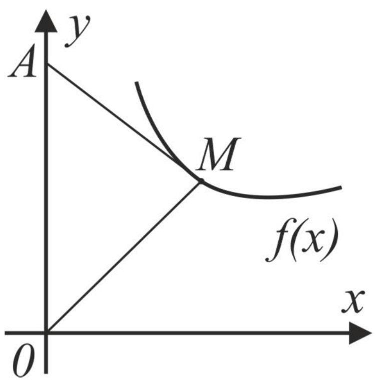

Рис. 6

Задача 5. Знайти криву, яка проходить через точку $(1;0)$, якщо відомо, що трикутник, утворений віссю Oy, дотичною до кривої в довільній її точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений, причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy.

Розв'язання. Нехай $y=f(x)$ – шукана крива Проведемо дотичну MA в довільній точці $M(x;y)$ кривої до перетину з віссю Oy (рис. 6).

За умовою $OM=OA$. Відрізок $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, а відрізок OA знайдемо як ординату Y точки A з рівняння дотичної

$$Y-y=y'(X-x);$$

при $X=0$ маємо $OA=Y=y-y'x$. Отримали рівняння $\sqrt{x^2+y^2}=y-y'x$, звідки $y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Це однорідне рівняння. Поклавши $y=ux$, одержимо загальний інтеграл:

$$u'x+u=u-\sqrt{1+u^2}\ ;\quad \frac{du}{dx}x=-\sqrt{1+u^2}\ ;\quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=-\ln|x|+\ln|C|;\quad u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x};\quad y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

Використавши початкову умову $y(1)=0$, знайдемо $C=1$. Отже, рівняння шуканої кривої має вигляд $y+\sqrt{x^2+y^2}=1$.

Завдання для самостійної роботи

3. Розв’язати диференціальні рівняння.

1) $xy'\sin\frac{y}{x}+x=y\sin\frac{y}{x}$;

2) $(xy+y^2)=(2x^2+xy)\,y'$;

3) $xyy'=y^2+2x^2$;

4) $xy'\ln\frac{y}{x}=x+y\ln\frac{y}{x}$;

5) $xy'-y=x\,tg\frac{y}{x}$;

6) $y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+4$;

7) $(x^2+y^2)\,dx-xy\,dy=0$;

8) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$;

9) $xdy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$;

10) $(x^2-3y^2)\,dx+2\,xy\,dy=0$;

11) $(x-y)\,y\,dx-x^2dy=0$;

12) $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$;

13) $x\ln\frac{x}{y}dy-y\,dx=0$;

14) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$;

15) $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$;

16) $y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$;

17) $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$;

18) $y'=\frac{y^2}{x^2}+9\frac{y}{x}+8$;

19) $(2x^2-2xy)\,dy-(x^2+2xy-y^2)\,dx=0$;

20) $2\,dx+\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy-\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx=0$;

21) $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0$;

22) $(x^2+xy-y^2)\,dx-(x^2-2xy)\,dy=0$;

23) $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$;

24) $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy$;

25) $(2x - y)dy - (x + 2y)dx = 0$;

26) $(x^2 - 6xy)dy - (x^2 + xy - 5y^2)dx = 0$;

27) $y(\ln y - \ln x)dx = x\,dy$;

28) $(\sqrt{xy} - x)dy + y\,dx = 0$;

29) $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$;

30) $\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy - y\,dx = 0$.

Розглянемо тепер рівняння, які можна звести до однорідних. Нехай маємо рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \qquad (17)$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – задані сталі.

Якщо $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то підстановкою $z = a_1x + b_1y + c_1$ рівняння (17) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\Delta \neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x = t + \alpha, y = z + \beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності

$$a_ix + b_iy + c_i = a_it + b_iz,\ i = 1,2.$$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$.

Оскільки $\Delta = 2 + 4 = 6 \neq 0,$ то зробивши заміну $x = t + \alpha,\ y = z + \beta,$ одержимо:

$$dx = dt;\ dy = dz; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2t - 4z + (2\alpha - 4\beta + 6)}{t + z + (\alpha + \beta - 3)}.$$

Сталі α та β доберемо так, щоб $\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $\alpha = 1,\ \ \beta = 2$.

Заміною $x = t + 1,\ \ y = z + 2$ задане рівняння зводиться до однорідного рівняння:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4z - 2t}{z + t} \text{ або } \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{4z}{t} - 2}{\frac{z}{t} + 1}.$$

За допомогою підстановки $z = ut$ отримаємо:

$$\frac{du}{dt}t + u = \frac{4u - 2}{u + 1}; \quad t\frac{du}{dt} = \frac{3u - 2 - u^2}{u + 1};$$

$$\int \frac{u + 1}{u^2 - 3u + 2}du = -\int \frac{dt}{t}; \quad \int \left(\frac{3}{u - 2} - \frac{2}{u - 1} \right) du = -\int \frac{dt}{t};$$

$$3\ln|u - 2| - 2\ln|u - 1| = -\ln|t| + \ln|c|.$$

Потенціюючи, одержуємо: $t\frac{(u - 2)^3}{(u - 1)^2} = c.$ Підставляючи замість u вираз $\frac{z}{t}$ і повертаючись до змінних x і y отримаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$(z - 2t)^3 = c(z - t)^2; \quad (y - 2x)^3 = c(y - x - 1)^2.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+y-1}$.

Розв'язання. Для цього рівняння $\Delta = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 = -3 \neq 0$, тому, поклавши $x = t+\alpha, y = z+\beta$, одержимо

$$dx = dt,\ dy = dz;\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t+2z+(\alpha+2\beta+1)}{2t+z+(2\alpha+\beta-1)}.$$

Сталі α і β підберемо так, щоб $\begin{cases}\alpha+2\beta+1=0;\\ 2\alpha+\beta-1=0.\end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $\alpha = 1,\ \beta = -1$, тому заміною змінних $x = u+1, y = v-1$ задане рівняння зводиться до однорідного:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t+2z}{2t+z}.$$

За допомогою підстановки $z = ut$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння: $(z-t)^3 = C(t+z), C>0$. Звідси, враховуючи, що $t = x-1, z = y+1$, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння $(y-x+2)^3 = C(x+y)$.

Задача 3. Розв'язати рівняння: $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$.

Розв'язання. Для цього рівняння $\Delta = -1 \neq 0$, тому робимо заміну $x = t+\alpha,\ \ y = z+\beta$.

Отримаємо: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dt};\qquad \dfrac{dz}{dt} = 2\left(\dfrac{z+(\beta+1)}{t+z+(\alpha+\beta-2)}\right)^2$.

Сталі α та β знайдемо зі системи рівнянь $\begin{cases}\beta+1=0,\\ \alpha+\beta-2=0.\end{cases}$

Одержуємо: $\beta = -1,\ \ \alpha = 3.$

Отже, заміною $x = t + 3$, $y = z - 1$ задане рівняння зводиться до однорідного рівняння: $\frac{dz}{dt} = 2\frac{z^2}{(t+z)^2}$. За допомогою підстановки $z = ut$ отримаємо:

$$t\frac{du}{dt} + u = 2\frac{u^2}{(1+u)^2}; \quad t\frac{du}{dt} = -\frac{u(u^2+1)}{(1+u)^2};$$

$$\int\frac{(1+u)^2}{u(u^2+1)}du = -\int\frac{dt}{t}; \quad \int\frac{1+2u+u^2}{u(u^2+1)}du = -\int\frac{dt}{t};$$

$$\int\left(\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2+1}\right)du = -\int\frac{dt}{t}; \quad \ln|u| + 2arctgu = -\ln|t| + \ln|C|; \quad ut = Ce^{-2arctgu}.$$

Повертаючись до змінних x та y, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння: $z = Ce^{-2arctg\frac{z}{t}}$; $y + 1 = Ce^{-2arctg\frac{y+1}{x-3}}$.

Задача 4. Знайти загальний інтеграл рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\Delta = 2 - 2 = 0$, то зробимо заміну $x + y + 2 = z$. Звідси $y' = z' - 1$ і задане рівняння набуває вигляду:

$$z' - 1 = -\frac{z}{2z-5}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z-5}{2z-5}; \quad \frac{2z-5}{z-5}dz = dx;$$

$$\int\left(2 + \frac{5}{z-5}\right)dz = \int dx; \quad 2z + 5\ln|z-5| = x + C_1.$$

Підставивши замість z вираз $x + y + 2$, одержуємо загальний інтеграл заданого рівняння: $x + 2y + 5\ln|x+y-3| = C$.

Задача 5. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$, яка проходить через точку $M_0(1;1)$.

Розв'язання. Для цього рівняння $\Delta = 1-(-1) = 2 \neq 0$, тому, поклавши $x = t+\alpha,\ \ y = z+\beta$, отримаємо: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{t+z+(\alpha+\beta-2)}{z-t+(\beta-\alpha-4)}$.

Із системи рівнянь $\begin{cases} \alpha+\beta-2=0, \\ \beta-\alpha-4=0 \end{cases}$ знаходимо $\alpha=-1,\ \ \beta=3$.

Заміною змінних $x=t-1,\ y=z+3$ задане рівняння зводиться до однорідного рівняння: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{t+z}{z-t}$.

За допомогою підстановки $z=ut$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння:

$$t\frac{du}{dt}+u=\frac{1+u}{u-1};\ \ t\frac{du}{dt}=\frac{1+2u-u^2}{u-1};$$

$$\frac{u-1}{1+2u-u^2}du=\frac{dt}{t};\qquad -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+2u-u^2\right)}{1+2u-u^2}=\int\frac{dt}{t};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|C_1|;$$

$$1+2u-u^2=\frac{C_1}{t^2};\ \ t^2\left(1+2u-u^2\right)=C_1;\ \ t^2+2zt-z^2=C_1.$$

Звідси, враховуючи, що $t=x+1,\ z=y-3,$ знайдемо загальний інтеграл заданого рівняння: $x^2-y^2+2xy-4x+8y=C$.

Використовуючи початкову умову $y(1)=1,$ знаходимо шукану інтегральну криву цього рівняння: $1-1+2-4+8=C$; $C=6$.

Отже, рівняння цієї інтегральної кривої має вигляд: $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0.$

Завдання для самостійної роботи

4. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $(y+2)dx-(2x+y-4)dy=0$;
2) $(8x-y-7)dy-(x+6y-7)dx=0$;

3) $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0$;

4) $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$;

5) $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$;

6) $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$;

7) $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$;

8) $(x+2y-3)dx-(2x-2)dy=0$;

9) $(3x-y-2)dy-(x+y-2)dx=0$;

10) $(2x+y-3)dx-(x-1)dy=0$;

11) $(x+2y-3)dx-(4x-y-3)dy=0$;

12) $(5x-y-4)dy-(x+3y-4)dx=0$;

13) $(x+y+1)dy+(3x+3y-1)dx=0$;

14) $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$;

15) $(3x+2y-1)dx-(x+1)dy=0$;

16) $(x+4y-5)dx-(6x-y-5)dy=0$;

17) $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$;

18) $5(y+1)dx-(4x+3y-1)dy=0$;

19) $(7x-y-6)dy-(x+5y-6)dx=0$;

20) $2(x-1)dy+(1-2x-y)dx=0$;

21) $(x+7y-8)dx-(9x-y-8)dy=0$;

22) $(2y-2)dx-(x+y-2)dy=0$;

23) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$;

24) $3x+y-2+y'(x-1)=0$;

25) $(x+8y-9)dx-(10x-y-9)dy=0$;

26) $(x+y-4)dx-(x-2)dy=0$;

27) $(y+2)dx-(2x+y-4)dy=0$;

28) $(x+2y-3)dx-(x-1)dy=0$;

29) $(3x+3)dy-(3y-2x+1)dx=0$;

30) $(4y-8)dx-(3x+2y-7)dy=0$.

2.2. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{18}$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Є кілька методів інтегрування рівняння (18). Один з них (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв’язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = uv, \tag{19}$$

де $u = u(x), v = v(x)$ – невідомі функції x, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (18), будемо мати

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = f(x).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, підберемо її так, щоб

$$v' + p(x)v = 0; \tag{20}$$

тоді

$$u'v = f(x). \tag{21}$$

Розв’яжемо ці рівняння. Відокремлюючи в рівнянні (20) змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx; \quad \ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|;$$

$$v = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \; C_1 \neq 0.$$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв’язок рівняння (20), наприклад

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \tag{22}$$

Знаючи функцію v, з рівняння (21) знаходимо функцію u:

$$du = f\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx;$$

$$u = \int f\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx + C. \qquad (23)$$

Підставляючи функції (22) і (23) в (19), знаходимо загальний розв'язок рівняння (18)

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

Розв'язання. Це лінійне рівняння виду $y' + p\left(x\right)y = f\left(x\right)$, в якому

$$p\left(x\right) = \frac{1}{x},\ f\left(x\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x};\quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{v}{x} = 0$; тоді $u'v = \dfrac{\sin 2x}{x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, одержуємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};\quad \ln\left|v\right| = -\ln\left|x\right|;\quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, будемо мати

$$u'\frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x};\quad du = \sin 2x\,dx;$$

$$u = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(C - \frac{1}{2}\cos 2x\right).$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння $y' + 2yx = 2x$, який задовольняє умову $y(0) = 2$.

Розв'язання. Поклавши $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, матимемо:

$$u'v + uv' + 2uvx = 2x; \quad u'v + u\left(v' + 2vx\right) = 2x;$$

$$v' + 2vx = 0; \qquad \frac{dv}{dx} = -2vx;$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx; \qquad v = e^{-x^2};$$

$$u'e^{-x^2} = 2x;$$

$$\frac{du}{dx} = 2xe^{x^2};$$

$$u = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C.$$

Загальний розв'язок даного рівняння

$$y = uv = Ce^{-x^2} + 1.$$

Знайдемо значення сталої C, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову:

$2 = Ce^0 + 1$, звідки $C = 1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^{-x^2} + 1$.

Задача 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x.$

Розв'язання. Це лінійне рівняння першого порядку. Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Задане рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' + \frac{xuv}{1-x^2} = \arcsin x + x.$$

$$u'v + u\left(v + \frac{xv}{1-x^2}\right) = \arcsin x + x.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{xv}{1-x^2} = 0.$ Тоді $u'v = \arcsin x + x.$

Інтегруючи перше з цих рівнянь, отримаємо:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{xv}{1-x^2}; \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{1-x^2};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{xdx}{1-x^2};$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\left|1-x^2\right|;$$

$$v = \sqrt{1-x^2}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, одержимо:

$$u'\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + x;$$

$$du = \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$u = \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin x d\left(\arcsin x\right) - \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) =$$

$$= \frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння $y = \sqrt{1-x^2}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2} + C\right).$

Завдання для самостійної роботи

5. Знайти розв'язок задачі Коші.

1) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2;\ y(1) = 3;$

2) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x;\ y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;

3) $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x};\ y(1) = 1$;

4) $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2};\ y(0) = \dfrac{2}{3}$;

5) $y'\sin x - y\cos x = 1;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

6) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x;\ y(0) = 0$;

7) $xy' - y = x^2\sin x;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

8) $xy' + y - x\sin x = 0;\ y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

9) $y' - y\,ctgx = 2x\sin x;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

10) $y' + y\,tgx - \cos^2 x = 0;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

11) $xy' + y - (x+1)e^x = 0;\ y(1) = e$;

12) $y' + y\,tgx + \cos^3 x = 0;\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

13) $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x;\ y(0) = 1$;

14) $x^2y' + (1-2x)y - x^2 = 0;\ y(1) = 1$;

15) $(x+1)y' - 2y = e^x(x+1)^3;\ y(0) = 1$;

16) $xy' - y = x^2\cos x;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

17) $xy' - y + \ln x = 0;\ y(1) = 1$;

18) $(x+1)y' - y = e^x(x+1)^2;\ y(0) = 1$;

19) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x;\ y(-1) = \dfrac{3}{2}$;

20) $x^2y' - (2x-5)y - 5x^2 = 0;\ y(2) = 4$;

21) $y'\cos x - y\sin x = 1;\ y(0) = 0$;

22) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3;\ y(1) = -\dfrac{5}{6}$;

23) $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2};\ y(0) = \frac{2}{3}$;

24) $x^3 y' - x^2 y + 12 = 0;\ y(1) = 4$;

25) $y' = 2y + e^x - x;\ y(0) = \frac{1}{4}$;

26) $\sin x \cos x \cdot y' = \cos 2x \cos^2 x - y;\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$;

27) $(x+1)\,y' = 2y + e^x (x+1)^3;\ y(0) = 3$;

28) $y' + y\,tgx = 2x\cos x;\ y(0) = 2$;

29) $xy' - y = x^2 \cos x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

30) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x;\ y(0) = 1$.

2.3. Рівняння, які зводяться до лінійних. Рівняння Бернуллі

Розглянемо класи рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних.

1. Рівняння виду

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)}, \tag{24}$$

де $P(y), Q(y), R(y)$ – задані функції, $R(y) \neq 0$, можна звести до лінійного, якщо x вважати функцією, а y – аргументом: $x = x(y)$; тоді з рівностей (24) і $y'_x x'_y = 1$ одержимо лінійне рівняння відносно x:

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y), \text{ де } \varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)},\ f(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $x = u(y)v(y)$.

2. Рівняння виду

$$f'_y(y)\,y' + p(x)f(y) = q(x), \tag{25}$$

де f, p, q — задані функції, заміною $z = f(y)$ зводиться до лінійного відносно змінної z:

$$z' + p(x)z = q(x). \qquad (26)$$

Справді, якщо $z = f(y)$, де $y = y(x)$ – невідома функція, то

$$\frac{dz}{dy} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = f_y'(y)\,y',$$

тому рівняння (25) набирає вигляду (26).

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати рівняння $y = xy' + y'\ln y$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{y}{x + \ln y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \ln y}.$$

Приймемо за аргумент y, а за невідому функцію x і представимо задане рівняння у вигляді: $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y}$.

Це є лінійне рівняння відносно x як функції y. Прийнявши $x = u(y)v(y)$, одержимо:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy};$$

$$\frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy} - \frac{uv}{y} = \frac{\ln y}{y};$$

$$\frac{du}{dy}v + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y}\right) = \frac{\ln y}{y};$$

$$1)\,\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0; \qquad 2)\,\frac{du}{dy}v = \frac{\ln y}{y}.$$

Знайдемо частинний розв'язок першого рівняння:

$$\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}; \qquad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y};$$

$$\ln|v|=\ln|y|; \qquad v=y.$$

Підставимо значення v у друге рівняння:

$$\frac{du}{dy}y=\frac{\ln y}{y}; \qquad du=\frac{\ln y}{y^2}dy;$$

$$u=\int\frac{\ln y}{y^2}dy=-\frac{1}{y}\ln y+\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}\ln y-\frac{1}{y}+C.$$

При знаходженні u ми застосували метод інтегрування за частинами:

$$\int u_1dv_1=u_1v_1-\int v_1du_1.$$

Загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд: $x=Cy-\ln y-1$.

Задача 2. Розв'язати рівняння $\left(2xy+y^3\right)dy-dx=0$.

Розв'язання. Оскільки $y'=\dfrac{1}{2xy+y^3}$, то маємо рівняння виду $y'=\dfrac{R(y)}{P(y)x+Q(y)}$. Якщо x вважати функцією y, то відносно x це рівняння стає лінійним:

$$x'-2yx=y^3.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x=uv; \qquad u'v+uv'-2uvy=y^3;$$

$$u'v+u\left(v'-2vy\right)=y^3;$$

$$v'-2vy=0; \qquad \frac{dv}{v}=2ydy;$$

$$\ln|v|=y^2+\ln|C|; \qquad v=e^{y^2};$$

$$\frac{du}{dy}e^{y^2}=y^3;$$

$$du=y^3e^{-y^2}dy;$$

$$u=\int y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\int y^2e^{-y^2}dy^2=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\left(1+y^2\right)+C;$$

$$x=uv=Ce^{y^2}-\frac{1}{2}\left(1+y^2\right).$$

Задача 3. Знайти розв'язок рівняння $\cos y\,dx=\left(x+2\cos y\right)\sin y\,dy,$ який задовольняє умову $y\left(0\right)=0.$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\left(x+2\cos y\right)\sin y}{\cos y};$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x\sin y}{\cos y}=\frac{\sin 2y}{\cos y}.$$

Це лінійне рівняння відносно x як функції y. Прийнявши $x=u\,v$, одержимо:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{dy}v+u\frac{dv}{dy};$$

$$\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}-\frac{uv\sin y}{\cos y}=\frac{\sin 2y}{\cos y};$$

$$\frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}-\frac{v\sin y}{\cos y}\right)=\frac{\sin 2y}{\cos y};$$

1) $\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{v\sin y}{\cos y}=0;$ 2) $\dfrac{du}{dy}v=\dfrac{\sin 2y}{\cos y}.$

Інтегруючи перше рівняння, отримаємо:

$$\frac{dv}{v}=\frac{\sin y\,dy}{\cos y};\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d\left(\cos y\right)}{\cos y};$$

$$\ln|v| = -\ln|\cos y|; \qquad v = \frac{1}{\cos y}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, одержимо:

$$\frac{du}{dy}\frac{1}{\cos y} = \frac{\sin 2y}{\cos y}; \qquad \frac{du}{dy} = \sin 2y; \qquad du = \sin 2y dy;$$

$$u = \int \sin 2y dy = -\frac{1}{2}\cos 2y + \frac{C}{2}.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $x = \dfrac{C - \cos 2y}{2\cos y}$.

Знайдемо значення сталої C, при якому розв'язок задовольняє задану початкову умову: $0 = \dfrac{C-1}{2}$; $C = 1$.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $x = \dfrac{1 - \cos 2y}{2\cos y}$.

Завдання для самостійної роботи

6. Знайти розв'язок задачі Коші.

1) $(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy$; $y(4) = e^2$;

2) $4y^2 dx + \left(e^{\frac{1}{2y}} + x\right)dy = 0$; $y(e) = \dfrac{1}{2}$;

3) $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1$; $y(0) = 0$;

4) $y^2 dx + (x + e^{\frac{2}{y}})dy = 0$; $y(e) = 2$;

5) $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \dfrac{y}{2}$; $y(2) = 1$;

6) $(1 + x\,sh\,y)y' = ch\,y$; $y(1) = \ln 2$;

7) $2(x + y^4)y' = y$; $y(-2) = -1$;

8) $2(y^3 - y + xy)dy = dx$; $y(-2) = 0$;

9) $e^{y^2}(dx - 2xy\,dy) = ydy$; $y(0) = 0$;

10) $(xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx = 0$; $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4$;

11) $(x\cos^2 y - y^2)\,y' = y\cos^2 y;\ \ y(\pi) = \dfrac{\pi}{4}$;

12) $2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y} + 7)\,dy = 0;\ \ y(-4) = 1$;

13) $(y^2 + 2y - x)\,y' = 1;\ \ y(2) = 0$;

14) $2y^2dx + \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)dy = 0;\ \ y(e) = 1$;

15) $y^3(y-1)\,dx + 3xy^2(y-1)\,dy = (y+2)\,dy;\ \ y\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2$;

16) $(y^4e^y + 2x)\,y' = y;\ \ y(0) = 1$;

17) $(\cos 2y\cos^2 y - x)\,y' = \sin y\cos y;\ \ y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

18) $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)\,y' = \sin 2y;\ \ y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$;

19) $(13y^3 - x)\,y' = 4y;\ \ y(5) = 1$;

20) $\sin 2y\,dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)\,dy;\ \ y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

21) $y^2dx - (2xy + 3)\,dy = 0;\ \ y(1) = 1$;

22) $y\,dx - (2y\ln y + y - x)\,dy = 0;\ \ y(1) = 1$;

23) $y^2dx + (xy - 1)\,dy = 0;\ \ y(1) = e$;

24) $(x - \ln y)\,y' = y;\ \ y(1) = 1$;

25) $y' = y/(x + y^3)\ \ y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1$;

26) $(xy + y^3)y' + 1 = 0;\ y(3) = 0$;

27) $(2xy + \sqrt{y})\,dy + 2y^2dx = 0;\ y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$;

28) $(104y^3 - x)y' = 4y;\ y(8) = 1$;

29) $y^2(y^2 + 4)\,dx + 2xy(y^2 + 4)\,dy = 2\,dy;\ y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2$;

30) $\left((y+1)^4 + 2x\right)y' = y + 1;\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\ \alpha \in R,\ \alpha \neq 0;1. \qquad (27)$$

(Рівняння (27) запропонував у 1695 р. Якоб Бернуллі, а в 1697 р. його брат Йоганн Бернуллі це рівняння розв'язав.)

Очевидно, при $\alpha = 0$ це рівняння – лінійне, а при $\alpha = 1$ – з відокремлюваними змінними. Припускаючи, що $y \neq 0, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, поділимо рівняння (27) на y^{α}, тоді матимемо рівняння виду (25):

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \qquad (28)$$

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати рівняння: $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \dfrac{\ln x}{x}.$

Розв'язання. Це рівняння Бернуллі, $\alpha = 2$. Зведемо його до лінійного рівняння, зробивши заміну $z = y^{-1}$. Тоді $z' = -y^{-2}y'$.

Задане рівняння запишемо у вигляді: $y^{-2}y' + \dfrac{y^{-1}}{x} = \dfrac{\ln x}{x}.$

Після зробленої заміни це рівняння набуває вигляду: $-z' + \dfrac{z}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$ або $z' - \dfrac{z}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}.$ Отримали лінійне рівняння відносно функції $z(x)$, яке розв'яжемо методом Бернуллі.

$$z = uv; \qquad z' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{\ln x}{x}; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x};$$

1) $v' - \dfrac{v}{x} = 0$; 2) $u'v = -\dfrac{\ln x}{x}.$

З першого рівняння знайдемо v:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x};\ \ \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x};\ \ \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x};\ \ \ln|v|=\ln|x|;\ \ v=x.$$

Підставимо знайдене значення v у друге рівняння і визначимо u.

$$u'x=-\frac{\ln x}{x};\qquad du=-\frac{\ln x}{x^2}dx;$$

$$u=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\ln x d\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln x-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+C=\frac{\ln x+1+Cx}{x}.$$

Отже, $z=\ln x+1+Cx.$

Загальний розв’язок заданого рівняння $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}.$

Задача 2. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{4arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}.$

Розв’язання. Це рівняння Бернуллі, $\alpha=\dfrac{1}{2}.$ Його розв’язок знайдемо у вигляді добутку двох функцій: $y=u(x)v(x)$;

$$u'v+uv'-\frac{2xuv}{1+x^2}=\frac{4arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv};$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=\frac{4arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv};$$

1) $v'-\dfrac{2xv}{1+x^2}=0$; 2) $u'v=\dfrac{4arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv}$.

З першого рівняння отримаємо:

$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{1+x^2};\qquad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2};$$

$$\ln|v|=\ln\left(1+x^2\right);\ v=1+x^2.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, одержимо:

$$u'\left(1+x^2\right)=\frac{4arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{u} \text{ або } \frac{du}{dx}=\frac{4arctgx}{1+x^2}\sqrt{u}\,.$$

Звідси маємо:

$$\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{4arctgx}{1+x^2}dx\,; \quad \int u^{-\frac{1}{2}}du=4\int arctgx\,d\left(arctgx\right);$$

$$2\sqrt{u}=2arctg^2x+2c\,; \quad u=\left(arctg^2x+C\right)^2.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y=\left(1+x^2\right)\left(arctg^2x+c\right)^2$.

Задача 3. Розв'язати рівняння $x^3\sin y\frac{dy}{dx}+2y=x\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді: $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{2y}=-\frac{x^3\sin y}{2y}$.

Це є рівняння Бернуллі відносно x як функції y, тобто рівняння виду $\frac{dx}{dy}+p\left(y\right)x=g\left(y\right)x^{\alpha}$, $\alpha\neq0, \alpha\neq1$. Тут $p\left(y\right)=-\frac{1}{2y}$, $g\left(y\right)=-\frac{\sin y}{2y}$, $\alpha=3$.

Зведемо його до лінійного рівняння, зробивши заміну $z=x^{-2}$. Тоді $\frac{dz}{dy}=-2x^{-3}\frac{dx}{dy}$.

Записавши задане рівняння у вигляді $x^{-3}\frac{dx}{dy}-\frac{x^{-2}}{2y}=-\frac{\sin y}{2y}$, отримаємо:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}-\frac{z}{2y}=-\frac{\sin y}{2y} \text{ або } \frac{dz}{dy}+\frac{z}{y}=\frac{\sin y}{y}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $z=u\left(y\right)v\left(y\right)$. Маємо:

$$\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}+\frac{uv}{y}=\frac{\sin y}{y};$$

$$\frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}+\frac{v}{y}\right)=\frac{\sin y}{y};$$

$$1)\frac{dv}{dy}+\frac{v}{y}=0; \qquad 2)\frac{du}{dy}v=\frac{\sin y}{y}.$$

Знайдемо частинний розв’язок першого рівняння: $\frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y}$; $\ln|v|=-\ln|y|;\ v=\frac{1}{y}.$

Підставивши знайдене значення v у друге рівняння, отримаємо:

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{y}=\frac{\sin y}{y};\ \ du=\sin y dy;$$

$$u=\int\sin y dy=-\cos y+C.$$

Отже, $z=\frac{C-\cos y}{y}$. Підставивши в цей вираз $z=x^{-2}$, одержимо загальний інтеграл заданого рівняння: $y=\left(C-\cos y\right)x^2$.

Задача 4. Розв’язати рівняння $\left(x^2\ln y-x\right)y'-y=0$.

Розв’язання. Перетворимо рівняння: $y'=\frac{y}{x^2\ln y-x}$, звідки $yx'+x=x^2\ln y$, або

$$x'+\frac{x}{y}=\frac{x^2}{y}\ln y.$$

Маємо рівняння Бернуллі відносно змінної $x=x\left(y\right)$. Знайдемо загальний розв’язок:

$$x=uv; \qquad u'v+uv'+\frac{uv}{y}=u^2v^2\frac{\ln y}{y};$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{y}\right)=u^2v^2\frac{\ln y}{y};$$

$$\frac{dv}{dy}+\frac{v}{y}=0; \qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y}; \qquad v=\frac{1}{y};$$

$$\frac{du}{dy}\frac{1}{y}=u^2\frac{1}{y^2}\frac{\ln y}{y};\qquad \frac{du}{u^2}=\frac{\ln y}{y^2}dy;\qquad u=\frac{y}{1+\ln y-Cy};$$

$$x=uv=\frac{1}{1+\ln y-Cy}.$$

Задача 5. Знайти інтегральну криву рівняння $y'=\dfrac{3x^2}{x^3+y+1}$, яка проходить через точку $M_0(1,0)$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^3+y+1}{3x^2}$ або $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{3x^2}$. Це рівняння Бернуллі відносно x як функції y, $\alpha=-2$.

Зробивши заміну $z=x^3$, отримаємо лінійне рівняння:

$$\frac{dz}{dy}=3x^2\frac{dx}{dy};\qquad 3x^2\frac{dx}{dy}-x^3=y+1;\qquad \frac{dz}{dy}-z=y+1.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $z=u(y)v(y)$. Одержимо:

$$\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}-uv=y+1;$$

$$\frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}-v\right)=y+1;$$

1) $\dfrac{dv}{dy}-v=0$; 2) $\dfrac{du}{dy}v=y+1$.

Знайдемо частинний розв'язок першого рівняння: $\dfrac{dv}{v}=dy$; $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int dy$; $\ln|v|=y$; $v=e^y$. Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$\frac{du}{dy}e^y=y+1;\quad du=(y+1)e^{-y}dy;$$

$u=\int ye^{-y}dy+\int e^{-y}dy=-ye-^{-y}\ e-^{-y}\ e^{-y}\ +C=-ye^{-y}-2e^{-y}+C$ (в першому інтегралі застосовано метод інтегрування за частинами).

Отже, $z=Ce^{y}-y-2$. Загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд:

$x^3=Ce^{y}-y-2.$

Використавши початкову умову $y(1)=0$, знайдемо рівняння шуканої інтегральної кривої: $1=C-0-2;\quad c=3;\quad x^3=3e^{y}-y-2.$

Завдання для самостійної роботи

7. Знайти розв'язок задачі Коші.

1) $y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4 \sin x;\; y(0) = 1;$

2) $xy' + y = xy^2;\; y(1) = 1;$

3) $y' + 2y\,cth\,x = y^2 ch\,x;\; y(1) = \frac{1}{sh1};$

4) $2(xy' + y) = y^2 \ln x;\; y(1) = 2;$

5) $y' + xy = (x-1)e^x y^2;\; y(0) = 1;$

6) $3(xy' + y) = xy^2;\; y(1) = 3;$

7) $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3);\; y(0) = -1;$

8) $2(y' + xy) = (x+1)e^{-x} y^2;\; y(0) = 2;$

9) $3xy' + 5y = (4x - 5)\,y^4;\; y(1) = 1;$

10) $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2;\; y(0) = 1;$

11) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2);\; y(1) = 1;$

12) $y' + xy = 2\,(1 + x)e^{-x} y^2;\; y(0) = 1;$

13) $(x-1)\,y' - y = y^2;\; y(2) = 1;$

14) $x\,y' + 2y = 3x^3 y^{\frac{4}{3}};\; y(1) = 1;$

15) $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1)\sin x;\; y(0) = 1;$

16) $y\,dx + (x + x^2 y^2)\,dy = 0;\; y(2) = 1;$

17) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y};\; y(0) = \frac{9}{4};$

18) $(x^3 + y + 1)\,y' = 3x^2;\; y(1) = 0;$

19) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$

20) $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy;\; y(1) = 1;$

21) $xdy + ydx = y^2 dx;\; y(1) = 2;$

22) $y' = y\,ctgx + \frac{y^2}{\sin x};\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$

23) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y};\; y(0) = 2;$

24) $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0;\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1$;

25) $xy'-y^2\ln x=-y;\ y(1)=2$;

26) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x};\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

27) $4y'+x^3y=(x^3+8)e^{-2x}y^2;\ y(0)=1$;

28) $2(y+xy)=(x-1)e^x y^2;\ y(0)=2$;

29) $2xy'-3y=-(5x^2+3)y^3;\ y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

30) $xy'+y=y^2\ln x;\ y(1)=1$.

2.4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Рівняння виду

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{29}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (29) має вигляд $u(x,y)=C$, де C – довільна стала. Для того щоб рівняння (29) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{30}$$

З'ясуємо методику інтегрування рівнянь в повних диференціалах. Якщо для рівняння (29) умова (30) виконується, то невідома функція $u(x,y)$ задовольняє рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y), \tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y). \tag{32}$$

Інтегруючи рівність (31) по x, визначимо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y)\,dx = F(x, y) + \varphi(y), \qquad (33)$$

де $F(x, y)$ – первісна функції $P(x, y)$ по x. Диференціюючи рівність (33) по y і враховуючи (32), одержуємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

Таким чином, рівняння в повних диференціалах інтегрується досить просто. У зв'язку з цим виникає питання, а чи не можна множенням на певний множник $\mu(x, y)$ довільне рівняння в диференціальній формі (3) звести до рівняння в повних диференціалах? Виявляється, що за певних умов це цілком можливо.

Функція $\mu(x, y)$ називається *інтегрувальним множником* рівняння (29), якщо після домножування на неї цього рівняння воно стає рівнянням у повних диференціалах. Можна довести, що всяке диференціальне рівняння першого порядку, яке задовольняє умовам теореми Коші, має безліч інтегрувальних множників.

Розглянемо методи знаходження інтегрувальних множників $\mu(x, y)$. Загального методу знаходження функцій $\mu(x, y)$ немає. Їх можна знайти лише в деяких окремих випадках. Складемо рівняння для інтегрувальних множників. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ – інтегрувальний множник рівняння (29), то рівняння $P\mu dx + Q\mu dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах. Тому, згідно з умовою (30), маємо

$$\frac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x},$$

тобто

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

звідки

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

або

$$P\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{36}$$

Отже, щоб отримати інтегрувальний множник, треба знайти який-небудь частинний розв’язок рівняння (36). Це рівняння є диференціальним рівнянням з частинними похідними відносно невідомої функції $\mu(x,y)$. У загальному випадку задача знаходження $\mu(x,y)$ з рівняння (36) значно складніша, ніж розв’язування самого рівняння (29).

Розглянемо два випадки, коли рівняння (36) спрощується і інтегрувальний множник рівняння (29) можна знайти. Припустимо, що рівняння (29) має інтегрувальний множник, який залежить лише від x, тобто $\mu=\mu(x)$; тоді в рівнянні (36) $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$ і для знаходження μ матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \tag{37}$$

з якого однією квадратурою визначається $\ln\mu$, а потім і μ. Зрозуміло, що рівняння (37) має зміст лише в тому випадку, коли вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ не залежить від y, а залежить лише від x.

Аналогічно якщо вираз $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ – залежить лише від y і не залежить від x, то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{38}$$

Приклад. Розв’язати рівняння $\left(x^2y^2-1\right)dx+2x^3ydy=0$.

Маємо

$$P(x,y)=x^2y^2-1,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y;$$

$$Q(x,y)=2x^3y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y.$$

Оскільки рівність (30) не виконується, то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Проте $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{-4x^2y}{2x^3y}=-\frac{2}{x}$, тому рівняння має інтегрувальний множник, який залежить лише від x. Складаємо рівняння (37) і розв'язуємо його:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=-\frac{2}{x};\ \ \ln\mu=-2\ln|x|+\ln|C|;\ \ \mu=\frac{C}{x^2},\ C\neq 0.$$

Візьмемо інтегрувальним множником функцію $\mu=\frac{1}{x^2}$ і помножимо обидві частини заданого рівняння на цей множник. Дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)dx+2xydy=0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знайдемо, що загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$xy^2+\frac{1}{x}=C.$$

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати рівняння $\left(3y^2+2xy+2x\right)dx+\left(6xy+x^2+3\right)dy=0$.

Розв'язання. У даному випадку

$$P(x,y)=3y^2+2xy+2x,\ Q(x,y)=6xy+x^2+3.$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6y+2x,$$

то ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y^2+2xy+2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=6xy+x^2+3. \qquad (1')$$

Інтегруючи, наприклад, перше з рівнянь $(1')$ по x (вважаючи y сталою), маємо

$$u(x,y)=3xy^2+x^2y+x^2+\varphi(y), \qquad (2')$$

де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція від y.

Диференціюючи рівність $(2')$ по y, згідно з другим рівнянням $(1')$, одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6xy+x^2+\frac{d\varphi}{dy}=6xy+x^2+3,$$

тобто $\frac{d\varphi}{dy}=3$, звідки $\varphi(y)=3y+C_1$, тому

$$u(x,y)=3xy^2+x^2y+x^2+3y+C_1.$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння виражається рівністю

$$3xy^2+x^2y+x^2+3y=C.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння: $\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$.

Розв'язання. У даному рівнянні

$$P(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2},\ Q(x,y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}.$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y\left(x-y\right)^2+y^2\cdot 2\left(x-y\right)}{\left(x-y\right)^4}=-\frac{2xy}{\left(x-y\right)^3};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2x\left(x-y\right)^2 x^2\cdot 2\left(x-y\right)}{\left(x-y\right)^4}=-\frac{2xy}{\left(x-y\right)^3}.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u\left(x,y\right)$, причому $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{\left(x-y\right)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{\left(x-y\right)^2}-\frac{1}{y}$.

Інтегруючи перше з цих рівнянь по x, отримаємо:

$$u\left(x,y\right)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{\left(x-y\right)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-y^2\int\left(x-y\right)^{-2}d\left(x-y\right)=\ln\left|x\right|+\frac{y^2}{x-y}+\varphi\left(y\right),$$

де $\varphi\left(y\right)$ – довільна диференційовна функція y.

Отже, $u\left(x,y\right)=\ln\left|x\right|+\frac{y^2}{x-y}+\varphi\left(y\right)$.

Диференціюючи цю рівність по y, одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y\left(x-y\right)+y^2}{\left(x-y\right)^2}+\varphi'\left(y\right)=\frac{2xy-y^2}{\left(x-y\right)^2}+\varphi'\left(y\right).$$

Згідно з умовою задачі $\frac{2xy-y^2}{\left(x-y\right)^2}+\varphi'\left(y\right)=\frac{x^2}{\left(x-y\right)^2}-\frac{1}{y}$, звідки $\varphi'\left(y\right)=1-\frac{1}{y}$; $\varphi\left(y\right)=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=y-\ln\left|y\right|+C_1$.

Тому $u\left(x,y\right)=\ln\left|x\right|+\frac{y^2}{x-y}+y-\ln\left|y\right|+C_1$.

Загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд: $\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{x-y}=C$.

Задача 3. Знайти частинний інтеграл рівняння $\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0,$ який задовольняє початкову умову $y(0)=2.$

Розв'язання.

$$P(x,y)=x+e^{\frac{x}{y}};\ \ Q(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)+e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y}\right)=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$ то ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деяких функції $u(x,y),$ причому $\frac{\partial u}{\partial x}=x+e^{\frac{x}{y}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right).$

$$u(x,y)=\int\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx=\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}+\varphi(y).$$

Отже, $u(x,y)=\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}+\varphi(y).$

Диференціюючи цю рівність по y, одержимо:

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi'(y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right),$ тобто $\varphi'(y)=0,$ звідки $\varphi(y)=C_1$

Тому $u=\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}+C_1.$

Загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=C.$

Використавши початкову умову, знайдемо частинний інтеграл цього рівняння: $0+2\cdot e^0=C;\ \ C=2;\ \ \frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2.$

Задача 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + \left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0$.

Розв'язання. $P(x,y) = x\sin y + y\cos y$, $Q(x,y) = x\cos y - y\sin y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y; \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1.$$

Цей вираз не залежить від y, тобто $F(x) = 1$.

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^x.$$

Помноживши задане рівняння на цей множник, отримаємо рівняння в повних диференціалах:

$$e^x\left(x\sin y + y\cos y\right)dx + e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)dy = 0.$$

$$P_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x\left(x\sin y + y\cos y\right);$$

$$Q_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right).$$

Аналогічно, як у попередніх задачах, одержимо:

$$u(x,y) = \int e^x\left(x\sin y + y\cos y\right)dx =$$

$$= \sin y\int e^x x dx + y\cos y\int e^x dx = \sin y\left(xe^x - e^x\right) + y\cos y e^x + \varphi(y).$$

Отже, $u(x,y) = \sin y\left(xe^x - e^x\right) + y\cos y e^x + \varphi(y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y\left(xe^x - e^x\right) + \left(\cos y - y\sin y\right)e^x + \varphi'(y),$$

тобто $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^x\cos y - e^x y\sin y + \varphi'(y)$.

Порівнюючи отримане значення $\frac{\partial u}{\partial y}$ з $Q_1(x,y)$, одержимо $\varphi'(y)=0$, $\varphi(y)=C_1$.

$$u(x,y)=xe^x\sin y+e^x y\cos y-e^x\sin y+C_1.$$

Загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд: $e^x\left(x\sin y+y\cos y-\sin y\right)=C$.

Задача 5. Розв'язати рівняння $y\sqrt{1-y^2}dx+\left(x\sqrt{1-y^2}+y\right)dy=0.$

Розв'язання. $P(x,y)=y\sqrt{1-y^2}$; $Q(x,y)=x\sqrt{1-y^2}+y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\sqrt{1-y^2}+y\frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}=\sqrt{1-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\sqrt{1-y^2}.$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{y}{1-y^2}=F_1(y).$$

Задане рівняння має інтегруючий множник, який залежить лише від y:

$$\mu(y)=e^{\int\frac{y}{1-y^2}dy}=e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1-y^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Помноживши задане рівняння на цей множник, одержимо рівняння в повних диференціалах:

$$ydx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy=0$$

$$P_1(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}=y;\quad Q_1(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$u(x,y)=\int ydx=xy+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідки $\varphi'(y)=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$;

$$\varphi(y)=\int\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=-\frac{1}{2}\int\left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-y^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C_1=-\sqrt{1-y^2}+C_1.$$

Отже, $u(x,y)=xy-\sqrt{1-y^2}+C_1$ і загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд: $xy-\sqrt{1-y^2}=C$.

Завдання для самостійної роботи

8. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}=0$;

2) $\left(3x^2+\dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}\,dy=0$;

3) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$;

4) $(\sin 2x-2\cos(x+y))dx-2\cos(x+y)dy=0$;

5) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0$;

6) $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx-\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+2y\right)dy=0$;

7) $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx+\dfrac{1-xy}{xy^2}dy=0$;

8) $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$;

9) $(y^2+y\sec^2 x)dx+(2xy+tgx)dy=0$;

10) $(\cos(x+y^2)+\sin x)dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$;

11) $\left(1+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$;

12) $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+tg^2y\right)dy=0$;

13) $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$;

14) $\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$;

15) $3x^2e^ydx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$;

16) $e^ydx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$;

17) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$;

18) $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(4y^2-\frac{1}{x}\right)dy=0$;

19) $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$;

20) $\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^{2y}+y^3\right)dy=0$;

21) $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-ye^{y^2}\right)dy=0$;

22) $\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy=0$;

23) $2x\cos^2 y\,dx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)=0$;

24) $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$;

25) $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}\right)dy=0$;

26) $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$;

27) $\left(2x+\ln y\right)dx+\left(\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$;

28) $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$;

29) $\left(x\cos 2y+1\right)dx-x^2\sin 2y\,dy=0$;

30) $\left(y\cos x-\cos y\right)dx+\left(\sin x+x\sin y\right)dy=0$.

Тема 3: Застосування диференціальних рівнянь першого порядку до розв’язання деяких задач геометрії, механіки, фізики.

Як уже говорилося, в різних сферах людської діяльності характер задач, які зводяться до диференціальних рівнянь, та їх методику розв’язування можна схематично описати так. Відбувається деякий процес, наприклад, фізичний, хімічний, біологічний. Нас цікавить певна функціональна характеристика даного процесу, тобто залежність від часу температури тіла, яке охолоджується, або кількості речовини, яка утворюється в результаті хімічної реакції, або кількості бактерій, які вирощуються за певних умов. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв’язків якого і є шукана функціональна залежність.

Таким чином, перший етап розв’язування задач з практичним змістом закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Це творча і найважча частина розв’язку, тому що не існує універсального методу складання диференціальних рівнянь. Кожна задача потребує індивідуального підходу, який ґрунтується на знанні відповідних законів (фізичних, хімічних, біологічних) і вмінні перекладати задачу на мову математики. Математична зрілість інженера характеризується в основному тим, наскільки правильно він може математично формулювати практичні задачі, які пов’язані з його спеціальністю.

Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв’язування якого відомі, то другий етап розв’язку, тобто інтегрування рівняння, не є складним.

Приклад (*Про розмноження бактерій.*) У сприятливих для розмноження умовах знаходиться деяка кількість N_0 бактерій. Знайти залежність збільшення числа бактерій від часу, якщо швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості.

Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій в момент часу t. Тоді $\frac{dN}{dt}$ – швидкість розмноження бактерій. За умовою

$$\frac{dN}{dt} = kN,\ k > 0.$$

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій та умов, в яких вони знаходяться. Його визначають експериментально. Інтегруючи знайдене рівняння, дістаємо його загальний розв'язок: $N = Ce^{kt}$. З умови $N(0) = N_0$ знаходимо $C = N_0$, тому

$$N = N_0 e^{kt}.$$

3.1. Застосування диференціальних рівнянь першого порядку до задач геометрії

Розв'язування типових задач

Задача 1. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку $M_0(1;\, 2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, яка вдвічі більша від абсциси точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка на заданій кривій. Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $M(x; y)$, має вигляд: $Y - y = y'(X - x)$, де X, Y – біжучі координати точки на дотичній. З умови, що дотична перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою $2x$, отримуємо диференціальне рівняння першого порядку: $1 - y = y'(2x - x)$, тобто $1 - y = xy'$, яке задовольняє шукана крива.

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння:

$$x\frac{dy}{dx} = 1 - y; \quad xdy = (1 - y)dx; \quad \frac{dy}{y-1} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y-1} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|y-1| = -\ln|x| + \ln|C|; \quad y - 1 = \frac{C}{x}; \quad y = \frac{C}{x} + 1.$$

Оскільки шукана крива проходить через точку $M_0(1;2)$, то $2 = \frac{C}{1} + 1$. Звідси $C = 1$. Отже, рівняння кривої $y = \frac{1}{x} + 1$.

Задача 2. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку $M_0(0;1)$ і має таку властивість: кутовий коефіцієнт будь-якої її дотичної дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

Розв'язання. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка на шуканій кривій. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої в точці M, дорівнює y', то за умовою задачі отримуємо диференціальне рівняння першого порядку: $y' = 2xy$. Відокремивши змінні, одержимо:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx; \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int xdx; \quad \ln|y| = x^2 + \ln|C|; \quad y = Ce^{x^2}.$$

Використавши початкову умову $y(0)=1$, знайдемо довільну сталу C: $1 = Ce^0$; $C = 1$. Отже, рівняння шуканої кривої $y = e^{x^2}$.

Задача 3. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної, що міститься між осями координат, ділиться в точці дотику навпіл (рис.7).

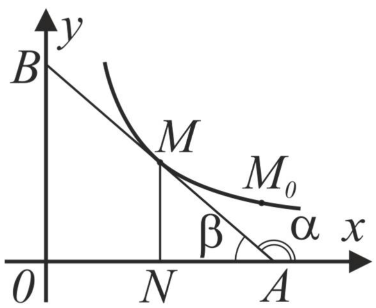

Рис. 7

Розв'язання. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка на шуканій кривій. Оскільки $MA = MB$, то $NA = ON = x$. Кутовий коефіцієнт дотичної $tg\alpha = y'$. Тому $tg\beta = tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha = -y'$. З прямокутного трикутника NAM отримаємо:

$$tg\beta = \frac{MN}{NA} = \frac{y}{x}, \text{ тобто } y' = -\frac{y}{x}.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|; \quad y = \frac{C}{x}.$$

Значення довільної сталої C знайдемо з умови, що шукана крива проходить через точку $Mo(2;1)$: $2 = \dfrac{C}{1}$; $C = 2$.

Отже, рівняння заданої кривої $y = \dfrac{2}{x}$.

Задача 4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(4;3)$, якщо піддотична AT будь-якої її точки дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику (рис.8).

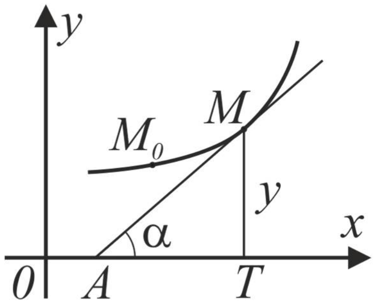

Рис. 8

Розв'язання. Нехай $M(x;y)$ –- довільна точка на шуканій кривій.

Оскільки $tg\alpha = y'$, то з прямокутного трикутника ATM отримаємо: $AT = \dfrac{y}{y'}$.

Отже, шукана крива задовольняє диференціальне рівняння першого порядку $\dfrac{y}{y'} = \dfrac{x+y}{2}$, яке є однорідним рівнянням.

Запишемо це рівняння у вигляді: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x+y}$ або $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x+y}{2y}$.

Введемо нову функцію $u(y)$ за формулою: $u = \dfrac{x}{y}$, тобто $x = u \cdot y$.

Звідси отримаємо: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{du}{dy}y + u$.

Диференціальне рівняння набуває вигляду: $\dfrac{du}{dy}y + u = \dfrac{u+1}{2}$. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dy}y = \frac{1-u}{2}; \quad \frac{du}{u-1} = -\frac{dy}{2y}; \quad \int\frac{du}{u-1} = -\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y};$$

$$\ln|u-1| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C|; \quad u-1 = \frac{C}{\sqrt{y}}.$$

Підставимо замість u його вираз: $\dfrac{x}{y} - 1 = \dfrac{C}{\sqrt{y}}$; $x - y = C\sqrt{y}$; $(x-y)^2 = Cy$.

Задовольняючи початкову умову, знайдемо значення довільної сталої C:

$$(4-3)^2 = 3C; \quad 3C = 1; \quad C = \frac{1}{3}.$$

Отже, рівняння шуканої кривої має вигляд: $y = 3(x-y)^2$.

Задача 5. (*Про форму дзеркала.*) Знайти форму дзеркала, яке збирає в одну точку пучок променів, які падають на нього паралельно, коли відомо, що форма його поверхні є поверхнею обертання.

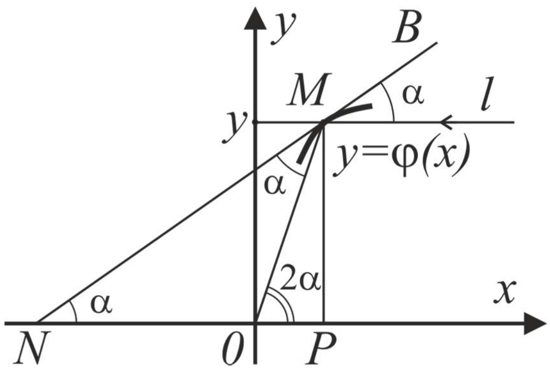

Рис. 9

Розв'язання. Виберемо прямокутну систему координат так, щоб промені були паралельні осі Ox, а точкою, в якій збираються відбиті промені, була точка $O(0;0)$ (рис. 9). Нехай $y=\varphi(x)$ – рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy; $M(x;y)$ – точка падіння променя l на дзеркало; N – точка перетину дотичної BM з віссю Ox. Тоді за законом відбивання $\angle NMO=\angle BMl=\alpha$, тому $\angle MOP=2\alpha$. Оскільки $tg\alpha=y'$, $\frac{y}{x}=tg2\alpha=\frac{2y'}{1-(y')^2}$, то крива $y=\varphi(x)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{2y'}{1-(y')^2}=\frac{y}{x}.$$

Розв'язуючи його відносно y', отримаємо два однорідних рівняння:

$$y'=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} \text{ і } y'=\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

За допомогою $y=uv$ знаходимо розв'язок першого рівняння:

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

Це рівняння в площині Oxy визначає сім'ю парабол, симетричних відносно осі Ox, фокуси яких знаходяться в точці O.

Оскільки форма поверхні дзеркала є поверхнею обертання, то, фіксуючи сталу C і обертаючи параболу навколо осі, одержимо шукану поверхню у вигляді параболоїда обертання:

$$y^2+z^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

Завдання для самостійної роботи

9. Розв’язати задачі.

1) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,1)$ і має таку властивість: відрізок, що відтинається будь-якою її дотичною на осі абсцис, дорівнює квадрату ординати точки дотику.
2) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,2)$ і має таку властивість: відрізок нормалі в будь-якій точці кривої, що міститься між осями координат, ділиться навпіл у цій точці.
3) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,1)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної дорівнює відстані від точки дотику до початку координат.
4) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(2,e)$ і має таку властивість: будь-яка її піддотична має сталу довжину, що дорівнює 2.
5) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(2,1)$ і має таку властивість: будь-яка її піддотична вдвічі більша від абсциси точки дотику.
6) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(3,1)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю OX ділиться навпіл в точці перетину з віссю OY .
7) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,0)$ і має таку властивість: відрізок, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює полярному радіусу точки дотику.
8) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,0)$ і має таку властивість: відрізок, що відтинається на осі ординат будь-якою її нормаллю, дорівнює відстані точки, в якій проведена нормаль, до початку координат.
9) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,2)$ і має таку властивість: відрізок, що відтинається на осі ординат будь-якою її дотичною, дорівнює абсцисі точки дотику.
10) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0,-2)$ і має таку властивість: кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці.
11) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,1)$ і має таку властивість: кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці в 4 рази більший від кутового коефіцієнта прямої, що з’єднує цю ж точку з початком координат.

12) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,2)$ і має таку властивість: точка перетину будь-якої її дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу від абсциси точки дотику.

13) Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $M_0(1,1)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її нормалі, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні $1:2$ (рахуючи від осі OY).

14) Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку $M_0(2,1)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю OY ділиться в точці перетину з віссю OX у відношенні $1:2$ (рахуючи від осі OY).

15) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,3)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні $2:1$ (рахуючи від осі OY).

16) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,0)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її нормалі, що знаходиться між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні $3:2$ (рахуючи від осі OY).

17) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(2,1)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної між точкою дотику і віссю OY ділиться в точці перетину з віссю OX у відношенні 1:2 (рахуючи від осі OY).

18) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(2,-3)$ і має таку властивість: відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні $3:1$ (рахуючи від осі OY).

19) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,2)$ і має таку властивість: в будь-якій її точці M дотичний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy рівну -1.

20) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0,1)$ і має таку властивість: трикутник, утворений віссю Oy, дотичною до кривої в довільній точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений (основою цього трикутника є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy).

21) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,4)$ і має таку властивість: в будь-якій її точці М дотичний вектор $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy рівну 2.

22) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0\left(\frac{1}{2},-1\right)$ і має таку властивість: довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі абсцис, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

23) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0,a)$ і має таку властивість: довжина відрізка будь-якої її нормалі стала і дорівнює a.

24) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0,8)$ і має таку властивість: будь-яка її піднормаль має сталу довжину, що дорівнює 2.

25) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,0)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, що відтинається будь-якою її нормаллю, на 2 більша від абсциси точки дотику.

26) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,1)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, що відтинається будь-якою її дотичною, дорівнює довжині цієї дотичної.

27) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(3,1)$, якщо довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює піднормалі.

28) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(1,2)$ і має таку властивість: добуток абсциси точки дотику на абсцису точки перетину нормалі з віссю Ox дорівнює подвоєному квадрату відстані від початку координат до точки дотику.

29) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(\sqrt{2},0)$, якщо сума довжин будь-якої її дотичної та піддотичної дорівнює добутку координат точки дотику.

30) Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0,3)$, якщо її піддотична в будь-який точці дорівнює сумі абсциси точки дотику та відстані від початку координат до точки дотику (обмежитися випадком $\frac{y}{y'}>0$).

3.2. Застосування диференціальних рівнянь першого порядку до задач механіки та фізики.

Розв'язування типових задач

Задача 1. (*Про радіоактивний розпад.*) Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини від часу, якщо при $t=0$ маса речовини дорівнювала m_0.

Розв'язання. Нехай $m=m(t)$ – маса речовини в момент часу t. За умовою

$$\frac{dm}{dt}=-km,\ k>0,\ m(0)=m_0,$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус береться тому, що з часом кількість речовини зменшується. Розв'язуючи знайдене рівняння, одержимо, що $m=m_0e^{-kt}$.

Задача 2. (*Про охолодження тіла.*) Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Відомо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює T_1 $(T_0>T_1)$. Знайти залежність температури тіла від часу.

Розв'язання. Нехай в момент часу t температура T тіла дорівнює $T(t)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_1),\ k>0;\ T(0)=T_0$$

(знак мінус вказує на зменшення температури). Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$T=T_1+Ce^{-kt};\quad T=T_1+(T_0-T_1)e^{-kt}.$$

Задача 3. (*Про витікання рідини з циліндра.*) Циліндричний резервуар, у дні якого є отвір, заповнено рідиною. Знайти час t_0, за який рідина витече з резервуару, якщо висота стовпа рідини дорівнює H, радіус циліндра – r, площа отвору – S.

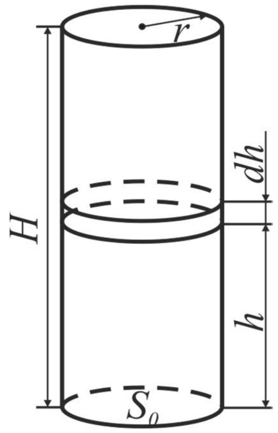

Рис. 10

Розв'язання. Скористаємось законом Торічеллі, згідно з яким для малих отворів швидкість витікання рідини знаходять за формулою $v=\sqrt{2gh}$, де h – висота стовпа рідини над отвором, g – прискорення сили тяжіння.

Нехай у момент часу t висота рідини дорівнювала h і за час dt зменшилась на dh. Вважаючи, що протягом часу dt швидкість витікання була сталою і дорівнювала $\sqrt{2gh}$, знайдемо об'єм dV рідини, яка витекла за час dt: $dV = Svdt = S\sqrt{2gh}\,dt$ (рис 10).

З іншого боку, рівень рідини понизився на dh, тому $dv = -\pi r^2 dh$. Прирівнюючи елементарні об'єми, одержуємо диференціальне рівняння

$$S\sqrt{2gh}\,dt = -\pi r^2 dh,$$

звідки

$$dt = -\frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Інтегруючи, маємо

$$t = -\frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{h} + C.$$

З умови $h(0) = H$ знаходимо сталу $C = \dfrac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H}$, тому

$$t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

Ця формула виражає залежність часу t від висоти стовпа рідини h. Поклавши $h = 0$, знайдемо час, за який витече вся рідина:

$$t_0 = \frac{2\pi r^2\sqrt{H}}{S\sqrt{2g}} = \frac{\pi r^2}{S}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Задача 4. (*Про хімічну реакцію.*) Внаслідок хімічної реакції між речовинами A та B з масами a та b утворюється третя речовина C. Встановити залежність маси цієї речовини від часу, якщо швидкість реакції пропорційна добутку реагуючих мас.

Розв'язання. Нехай $x = x(t)$ – кількість речовини C, яка утворилась за час t після початку реакції. Тоді $\frac{dx}{dt}$ – швидкість утворення речовини C (швидкість реакції). За умовою

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),\ x(0) = 0,$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо:

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = kdt;\quad \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\frac{dx}{a-b} = kdt;$$

$$\ln|x-a| - \ln|x-b| = k(a-b)t + \ln|C|;$$

$$\frac{x-a}{x-b} = Ce^{k(a-b)t}.$$

З початкової умови $C = \frac{a}{b}$, тому $\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{k(a-b)t}$, звідки

$$x(t) = ab\frac{1-e^{k(a-b)t}}{b-ae^{k(a-b)t}}.$$

Задача 5. (*Про розчин солі.*) У резервуарі знаходиться a літрів водяного розчину солі, причому в розчині міститься b кілограмів солі. У деякий момент часу вмикається пристрій, який неперервно подає в резервуар m літрів чистої води за секунду і одночасно забирає в нього щосекунди n літрів розчину $(m > n)$. При цьому рідина неперервно перемішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

Розв'язання. Як відомо, концентрацією c даної речовини називається її кількість, яка міститься в одиниці об'єму. Якщо концентрація рівномірна, то кількість речовини в об'ємі v дорівнює cv.

Нехай $x = x(t)$ – кількість солі, яка залишилася в розчині після того, як пристрій працював t секунд. Кількість суміші в резервуарі в цей момент буде $a + (m-n)t$, тому концентрація

$$c = \frac{x}{a + (m-n)t}.$$

За час dt з резервуару витікає ndt літрів розчину, який містить $ncdt$ кілограмів солі. Тому зміна dx кількості солі в резервуарі характеризується рівнянням

$$-dx = ncdt, \text{ або } -dx = \frac{nxdt}{a + (m-n)t}.$$

Це і є шукане диференціальне рівняння. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, будемо мати

$$x(t) = C\left(a + (m-n)t\right)^{\frac{n}{n-m}}.$$

Сталу C визначимо з початкової умови $x(0) = b$: $b = Ca^{\frac{n}{n-m}}$, $\quad C = ba^{\frac{n}{m-n}}$.

Отже, кількість солі в резервуарі змінюється за законом

$$x(t) = ba^{\frac{n}{m-n}}\left(a + (m-n)t\right)^{\frac{n}{n-m}}.$$

Задача 6. (*Про силу струму.*) Треба знайти залежність сили струму i від часу t в контурі, який має електрорушійну силу E, опір R та індуктивність L, де E, R, L – сталі.

Розв'язання. Згідно з законом Ома, маємо

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Розв'язуючи це лінійне рівняння заміною $i = uv$, одержимо загальний розв'язок

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R},$$

де C – довільна стала. При $t=0$ маємо $i(0)=0$, тому $C=-\frac{E}{R}$. Отже,

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Звідки видно, що сила струму при $t\to+\infty$ наближається до свого стаціонарного значення $i_0=\frac{E}{R}$.

Завдання для самостійної роботи

10. Розв'язати задачі.
    1) Знайти закон зміни сили струму в колі з опором R та самоіндукцією L, якщо початкова сила струму I_0, а електрорушійна сила змінюється за законом $U=U_0\sin\omega t$.
    2) Деяка речовина перетворюється в іншу із швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Відомо, що кількість першої речовини дорівнювала 31,4 г через 1 год і 9,7 г через 3 год. Через який час після початку перетворення залишиться 1% початкової кількості ?
    3) Різниця потенціалів на затискачах котушки рівномірно падає від $E_0=2$ В до $E_1=1$ В протягом 10 сек. Який буде струм в кінці десятої секунди, якщо на початку досліду він був $16\frac{2}{3}$ А ? Опір котушки 0,12 Ом, коефіцієнт самоіндукції $L=0{,}1$ Гн.
    4) Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища. За 10 хв. тіло охолодилося від 100^0 до 60^0. Температура повітря підтримується рівною 20^0. За який час температура тіла знизиться до 25^0?
    5) Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщині шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар завтовшки 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини $h=9$ м?
    6) Сила струму в колі з опором R, самоіндукцією L і електрорушійною силою E задовольняє співвідношення $L\frac{dJ}{dt}+RI=E$. Знайти

залежність сили струму від часу t, якщо E зростає пропорційно часові, сила струму в початковий момент дорівнює нулю, а R і L – сталі величини.

7) Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/сек., його швидкість через 4 сек дорівнювала 1 м/сек. Коли швидкість човна зменшиться до 1 см/сек?
8) Швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна наявній ї кількості. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. За який час залишиться 1% від початкової кількості ?
9) В резервуарі міститься 100 л розчину, в якому є 10 кг солі. В резервуар неперервно подається вода із швидкістю 5 л/хв., яка перемішується з розчином. Суміш витікає з такою ж швидкістю. Скільки солі залишиться в резервуарі через 1 годину?
10) Кількість світла, яка поглинається шаром рідини малої товщини, пропорційна товщині шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Шар води товщиною 35 см поглинає половину початкової кількості світла. Яку частину світла поглине шар товщиною 2м ?
11) Сила опору повітря при падінні тіла з парашутом пропорційна квадрату швидкості руху. Знайти граничну швидкість падіння.
12) В моторному човні, який рухається прямолінійно зі швидкістю 5 м/с, виключається мотор. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний квадрату швидкості човна, причому коефіцієнт пропорційності $k = m/50$, де m – маса човна. Через який час швидкість човна зменшиться вдвічі?
13) В резервуарі знаходиться 60 л розчину, який містить 5 кг солі. За кожну хвилину в резервуар вливається 3 л води і витікає 2 л розчину, причому концентрація солі підтримується рівномірною. Скільки солі залишиться у резервуарі через 40 хв ?
14) У воді з температурою 10^0 протягом 20 хв. тіло охолодилося від 100^0 до 60^0. За який час тіло охолодиться до 30^0, якщо за законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища.
15) Ланцюг довжиною 6 м зісковзує вниз з гладкої горизонтальної площадки. Не враховуючи опору, знайти, за який час зісковзне весь ланцюг, якщо в початковий момент звисав 1 м ланцюга.

16) Швидкість розпаду радію пропорційна наявній його кількості. Протягом року з кожного 1 г радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина початкової кількості радію.

17) Куля, рухаючись зі швидкістю $\upsilon_0 = 400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h = 20$ см і вилітає, маючи швидкість 100 м/с. Припускаючи, що сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості руху кулі, знайти час, за який куля проходить через стіну.

18) У приміщенні цеху об'ємом $10800\, м^3$ повітря містить $0,12\%$ вуглекислого газу. Вентилятори подають свіже повітря, що містить $0,04\% CO_2$, з швидкістю $1500\, м^3/хв$. Припускаючи, що концентрація CO_2 в усіх частинах приміщення в кожний момент часу однакова, знайти вміст CO_2 через 10 хв після початку роботи вентиляторів.

19) Моторний човен рухається зі швидкістю 18 км/год. Через 5 хв після виключення мотору його швидкість зменшилась до 6 км/год. Знайти відстань, яку пройшов човен за 15 хв після виключення мотору, якщо опір води пропорційний швидкості руху човна.

20) Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища. Знайти залежність температури Т від часу t, якщо тіло, нагріте до T_0 градусів, внесено у приміщення, температура якою стала і дорівнює a градусів.

21) Кількість світла, яка поглинається при проходженні через тонкий шар води, пропорційна товщині шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Знаючи, що при проходженні шару води товщиною 2м поглинається $1/3$ початкової кількості світла, знайти, яка частина цієї кількості дійде до глибини 10м.

22) Локомотив рухається по горизонтальній ділянці шляху зі швидкістю 90 км/год. За який час і на якій відстані він буде зупинений гальмом, якщо опір рухові локомотива після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги.

23) Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій при достатньому запасі їжі пропорційна їх кількості. За який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з початковою їх кількістю?

24) Швидкість радіоактивного розпаду пропорційна наявній кількості речовини. Відомо, що через 30 днів розпадається 50% радіоактивної речовини. Через скільки днів залишиться 1% початкової кількості речовини?

25) У резервуар, в якому є 100 л 10%-ного розчину солі, кожну хвилину вливається 30 л води та із нього витікає 20 л суміші. Яка кількість солі залишиться у резервуарі через 10 хв (вважати, що суміш неперервно переміщується).

26) Силу опору повітря при падінні тіла можна вважати пропорційною квадрату швидкості тіла. Знайти закон руху тіла, якщо початкова швидкість дорівнює нулю.

27) Вітер, проходячи через ліс і зазнаючи опору дерев, втрачає швидкість. На нескінченно малому шляху ця втрата пропорційна швидкості вітру на початку цього шляху та довжині шляху. Знайти швидкість вітру, що пройшов у лісі 150 м, знаючи, що початкова швидкість була 12 м/с, а після проходження у лісі шляху $s = 1$м швидкість зменшилась до 11,8 м/с.

28) Сповільнююча дія тертя на диск, що обертається у рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Знайти залежність цієї кутової швидкості від часу, якщо відомо, що диск, який почав обертатися зі швидкістю 100 об/хв., через 1 хв обертається зі швидкістю 60 об/хв.

29) Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій при достатньому запасі їжі пропорційна їх кількості. Через 12 годин після початку досліду чисельність деякої популяції бактерій виросла в 3 рази. У скільки разів збільшиться кількість бактерій через 3 доби?

30) Відомо, що швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості і що половина його початкової кількості розпадається протягом 1600 років. Визначити, який процент даної кількості m_0 радію розпадеться протягом 400 років.

Тема 4: Диференціальні рівняння вищих порядків (основні поняття). Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку.

4.1. Основні поняття і означення. Задача Коші

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*. Зокрема, диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (39)$$

де x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – невідома функція; F – відома функція.

У рівняння n-го порядку (39) похідна n-го порядку $y^{(n)}$ має справді входити, тоді як наявність у ньому решти змінних, тобто $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$, необов'язкова.

Рівняння (39), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається *неявним диференціальним рівнянням*.

Нормальним або явним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння (39), розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (40)$$

Розглядатимемо в основному саме такі рівняння.

Розв'язком рівняння (40) на деякому інтервалі $(a;b)$ називається n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння перетворює його в тотожність по $x \in (a;b)$, тобто

$$\forall x \in (a;b): \varphi^{(n)}(x) \equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Графік розв'язку диференціального рівняння (39) або (40) називається його *інтегральною кривою*.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається задача Коші або задача з початковими умовами. Для рівняння (40) ця задача ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (40) знайти такий розв’язок $y = y(x)$, $x \in (a;b)$, який при $x = x_0 \in (a;b)$ задовольняє такі умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

або

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0, ..., y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \qquad (40)$$

де $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – довільні наперед задані дійсні числа.

Умови (41) називають *початковими умовами для рівняння* (40). Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (42)$$

початкові умови при $x = x_0$ мають вигляд

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\big|_{x=x_0} = y'_0. \qquad (43)$$

Існування і єдиність розв’язку задачі Коші визначаються теоремою Коші.

Теорема 2. *Якщо функція $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ і її частинні похідні по аргументах $y, y', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $G \subset R_{n+1}$, то для кожної точки $\left(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}\right) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (40), який задовольняє початкові умови (41).*

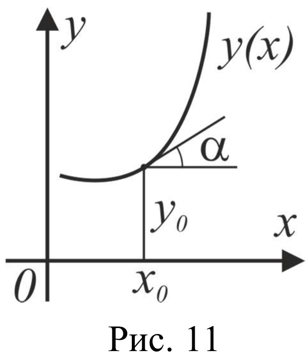

Рис. 11

Приймемо дану теорему без доведення. Слід звернути увагу на те, що в цій теоремі мова йде про єдиність розв’язку в $(n+1)$-вимірному просторі: інакше кажучи, єдиність розв’язку рівняння (40) з умовами (41) на відміну від диференціального рівняння першого порядку не означає, що через задану точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (40). Так, для рівняння (42) єдиність розв’язку з умовами (43) означає, що через точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (42) з кутовим коефіцієнтом дотичної в цій точці, який дорівнює $tg\alpha = y'_0$ (рис. 11). Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної.

Нарешті, зупинимось на поняттях загального та частинного розв’язку рівняння (40). Як ми вже бачили, загальний розв’язок рівняння першого порядку знаходиться за допомогою операції інтегрування і містить одну довільну сталу. В загальному випадку розв’язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв’язок рівняння (40) містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right). \tag{44}$$

Якщо загальний розв’язок знаходиться в неявній формі:

$$\Phi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0, \tag{45}$$

то його називають *загальним інтегралом рівняння* (40).

Частинний розв’язок або частинний інтеграл знаходять із загального, якщо у співвідношенні (44) або (45) кожній довільній сталій $C_1, C_2, ..., C_n$ надати конкретного числового значення. З погляду геометрії загальним розв’язком рівняння (40) є n- *параметрична сім'я інтегральних кривих*, залежних від n параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$, а частинний розв’язок – окрема крива з цієї сім'ї.

Зауважимо, що не кожний розв’язок рівняння (40), який містить n довільних сталих, є загальним розв’язком. Розв’язок (44) диференціального рівняння (40), який містить n довільних сталих, називається *загальним розв'язком*, якщо можна знайти такі єдині сталі $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, ..., $C_n = C_{n0}$, що частинний розв’язок $y = \varphi\left(x, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}\right)$ задовольняє початкові умови (41).

Таким чином, розв’язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння n-го порядку – це означає: 1) знайти його загальний розв’язок; 2) із загального розв’язку виділити частинний розв’язок, який задовольняє початкові умови, якщо такі умови задані.

4.2. Диференціальні рівняння n-го порядку, які інтегруються в квадратурах

Рівняння n-го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо деякі класи таких рівнянь.

1. Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{46}$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = f(x) \text{ або } d\left(y^{(n-1)}\right) = f(x)dx$$

та інтегруючи, одержимо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

де C_1 – стала інтегрування.

Аналогічно знайдемо

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2;$$

$$d\left(y^{(n-3)}\right) = \left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2\right)dx,$$

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 – сталі інтегрування. Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння (46):

$$y = \int\left(\ldots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right)\ldots\Big)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

2. Розглянемо рівняння виду

$$F\left(x, y^{(n)}\right)=0. \qquad (47)$$

Якщо задане рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то маємо вже розглянутий випадок **1**. Припустимо, що рівняння (47) можна розв'язати відносно x:

$$x=f\left(y^{(n)}\right). \qquad (48)$$

Якщо покласти $y^{(n)}=t$ – то рівняння (48) набере вигляду $x=f(t)$, звідки $dx=f'(t)dt$. Підставляючи значення $y^{(n)}$ і dx у тотожність $d\left(y^{(n-1)}\right)=y^{(n)}dx$, будемо мати

$$d\left(y^{(n-1)}\right)=tf'(t)dt,\ y^{(n-1)}=\int t\,f'(t)dt+C_1. \qquad (49)$$

Інтегруючи рівняння (49) тим самим методом, що й рівняння (46), і враховуючи щоразу, що $dx=f'(t)dt$, одержимо розв'язок рівняння (47) в параметричній формі.

Приклад. Розв'язати рівняння $(y'')^3+3y''-x=0$.

Маємо

$$y''=t,\ x=t^3+3t,\ dx=\left(3t^2+3\right)dt;$$

$$y'=\int t\left(3t^2+3\right)dt+C_1=\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+C_1;$$

$$dy=\left(\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+C_1\right)dx=\left(\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+C_1\right)\left(3t^2+3\right)dt=$$

$$=3\left(\frac{3}{4}t^6+\frac{9}{4}t^4+\left(C_1+\frac{3}{2}\right)t^2+C_1\right)dt;$$

$$y=\frac{9}{28}t^7+\frac{27}{20}t^5+\left(C_1+\frac{3}{2}\right)t^3+3C_1t+C_2.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + 3t\,,\ y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1 t + C_2\,.$$

4.3. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є *метод пониження порядку*. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1. Нехай задано диференціальне рівняння виду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0\,, \qquad (50)$$

яке не містить явно шуканої функції. Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти $y^{(k)} = z$; тоді $y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', ..., y^{(n)} = z^{(n-k)}$, тому одержуємо рівняння

$$F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0\,.$$

Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць. Окремим випадком рівняння (50) є рівняння

$$F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

яке за допомогою нової змінної $z = y^{(n-1)}, z' = y^{(n)}$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$F(x, z, z') = 0\,.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = z(x, C_1)$ виду (46), яке інтегрується в квадратурах.

2. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{51}$$

яке не містить явно незалежної змінної x.

Рівняння (51) допускають пониження порядку на одиницю. Справді, покладемо $y' = z$, де (на відміну від попереднього випадку) новою невідомою функцією є функція від y : $z = z(y)$; тоді за правилом диференціювання складної функції маємо:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z = z'_y z,$$

тобто порядок другої похідної понизився на одиницю. Аналогічно одержуємо

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(z'_y z\right) = \frac{d}{dy}\left(z'_y z\right)\frac{dy}{dx} = z\left(z''_{yy}z + \left(z'_y\right)^2\right)$$

тощо. Методом індукції можна довести, що порядок усіх наступних похідних також понижується на одиницю.

Таким чином, від рівняння (51) n-го порядку приходимо до рівняння

$$F\left(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0$$

$(n-1)$-го порядку.

Окремим випадком рівняння (51) є рівняння

$$F\left(y, y', y''\right) = 0, \tag{52}$$

яке підстановкою $y' = z,\ y'' = \dfrac{dz}{dy}z$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку:

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z\right) = 0.$$

Розв’язування типових задач

Задача 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $y^{(4)} = \cos 2x$.

Розв’язання. Послідовно одержимо

$$y''' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1;$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \right) dx + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2 \right) dx + C_3 = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \right) dx + C_4 =$$

$$= \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4.$$

Задача 2. Матеріальна точка маси m падає вертикально під дією сили земного тяжіння. Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент часу точка мала швидкість v_0. Падіння вважати вільним, тобто опором середовища знехтувати.

Розв’язання. Нехай $S = S(t)$ – шлях який пройшла точка за час t; $\frac{dS}{dt} = v, \frac{d^2S}{dt^2} = w$ – відповідно швидкість і прискорення руху. На тіло діє сила $P = mg$, де g – прискорення вільного падіння. Тоді за другим законом Ньютона

$$mw = P \text{ або } \frac{d^2S}{dt^2} = g.$$

Маємо диференціальне рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ відносно невідомої функції $S(t)$. Згідно з умовою задачі початкові умови мають вигляд

$$S(0) = 0, \frac{dS(0)}{dt} = v(0) = v_0.$$

Послідовно інтегруючи, одержимо

$$\frac{dS}{dt}=gt+C_1,\ S=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Скориставшись початковими умовами, знаходимо $C_1=v_0, C_2=0$. Таким чином, отримуємо відомі з фізики формули для швидкості і шляху при вільному падінні тіла:

$$v=gt+v_0,\ S=\frac{gt^2}{2}+v_0t.$$

Задача 3. Розв’язати рівняння $y''+3y'=e^{2x}$.

Розв’язання. Покладемо $z=y'$, тоді $z'=y''$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z=z(x)$:

$$z'+3z=e^{2x}.$$

Розв’язавши це рівняння, знайдемо $z(x)=C_1e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$, тоді $y'=C_1e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$, звідки

$$y=-\frac{C_1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{10}e^{2x}+C_2.$$

Задача 4. Тіло маси m падає вертикально з деякої висоти без початкової швидкості. При падінні тіло зазнає опору повітря, пропорційного квадрату швидкості тіла. Знайти закон руху тіла.

Розв’язання. Нехай $S=S(t)$ – шлях, пройдений тілом за час t від початку руху, $\frac{dS}{dt}=v, \frac{d^2S}{dt^2}=w$ – швидкість і прискорення руху. На тіло діють сили: $P=mg$ – вага тіла (в напрямі руху) і $F=kv^2=k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$ – опір повітря (проти напряму руху). За другим законом Ньютона маємо: $mw=P-F$ або $m\frac{d^2S}{dt^2}=mg-k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$, де $k>0$ – коефіцієнт пропорційності.

Маємо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно невідомої функції $S(t)$. Згідно з умовою задачі маємо такі початкові умови:

$$S(0)=0,\ \frac{dS(0)}{dt}=v(0)=0.$$

Покладемо $\frac{dS}{dt}=v$, тоді $\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$ і одержуємо рівняння

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2 \text{ або } \frac{m}{k}\frac{dv}{dt}=a^2-v^2,$$

де $a^2=\frac{mg}{k}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо

$$\frac{dv}{a^2-v^2}=\frac{k}{m}dt,$$

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v}=kt+C_1.$$

Оскільки $v(0)=0$, то $C_1=0$; тому $\ln\frac{a+v}{a-v}=\frac{2akt}{m}$, звідки

$$v=a\frac{e^{\frac{akt}{m}}-e^{-\frac{akt}{m}}}{e^{\frac{akt}{m}}+e^{-\frac{akt}{m}}}=a\,th\frac{akt}{m}=a\,th\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

Таким чином, для визначення невідомої функції $S(t)$ маємо рівняння

$$\frac{dS}{dt}=a\,th\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$S=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2.$$

Оскільки $S(0)=0$, то $C_2=0$; тому шуканий закон руху має вигляд

$$S(t)=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2 y''' = \left(y''\right)^2$.

Розв'язання. Введемо нову функцію $z = y''$ і отримаємо рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z\left(x\right)$:

$x^2 z' = z^2$ або $x^2 dz = z^2 dx.$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Одержимо: $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x^2}$; $\quad \displaystyle\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2}$;

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{C_1}; \qquad \frac{1}{z} = \frac{C_1 + x}{C_1 x};$$

$$z = \frac{C_1 x}{x + C_1}; \qquad y'' = \frac{C_1 x}{x + C_1}.$$

В результаті послідовного інтегрування отримаємо:

$$y' = \int \frac{C_1 x}{x + C_1} dx = C_1 \int \left(1 - \frac{C_1}{x + C_1}\right) dx = C_1 \left(x - C_1 \ln\left|x + C_1\right|\right) + C_2;$$

$$y = C_1 \int \left(x - C_1 \ln\left|x + C_1\right|\right) dx + C_2 \int dx = C_1 \left(\frac{x^2}{2} - C_1 \left(x \ln\left|x + C_1\right| - \int \frac{x}{x + c_1} dx\right)\right) +$$

$$+ C_2 x + C_3 = C_1 \left(\frac{x^2}{2} - C_1 \left(x \ln\left|x + C_1\right| - x + C_1 \ln\left|x + C_1\right|\right)\right) + C_2 x + C_3.$$

Позначивши $C_1^2 + C_2$ через $\tilde{C}_2$, остаточно одержимо:

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} - C_1^2 \left(x + C_1\right) \ln\left|x + C_1\right| + \tilde{C}_2 x + C_3.$$

Диференціальне рівняння другого порядку вигляду $F\left(y, y', y''\right) = 0$ зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = z\left(y\right)$. В цьому випадку $y'' = \dfrac{dz}{dy} z.$

Задача 6. Розв’язати рівняння $yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0$.

Розв’язання. Маємо рівняння виду $F\left(y, y', y''\right) = 0$. Поклавши $y' = z,\ y'' = \dfrac{dz}{dy}z$, отримаємо

$$yz\frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0 \ \text{ або } \ z\left(y\frac{dz}{dy} - 2z\right) = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$z = 0,\ y\frac{dz}{dy} - 2z = 0.$$

З першого маємо $y' = 0$, звідки $y = C$. У другому рівнянні відокремлюються змінні

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y};\ \ln|z| = 2\ln|y| + \ln|C_1|,\ z = C_1y^2,\ C_1 \neq 0.$$

Оскільки $z = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2,\ \frac{dy}{y^2} = C_1dx,\ -\frac{1}{y} = C_1x + C_2.$$

Замінивши C_1 на $-C_1$, C_2 на $-C_2$, знайдемо другий розв'язок даного рівняння $y = \dfrac{1}{C_1x + C_2}$

Отже, задане рівняння має розв'язки $y = C$ та $y = \dfrac{1}{C_1x + C_2}$.

Задача 7. *Задача про другу космічну швидкість*. Знайти найменшу швидкість, з якою потрібно кинути тіло вертикально вгору, щоб воно не повернулось на Землю. Опором повітря знехтувати.

Розв’язання. Позначимо через M і m відповідно масу Землі і масу тіла. Згідно закону тяжіння Ньютона, сила F притягання, що діє на тіло, дорівнює

$F = k\dfrac{Mm}{r^2}$, де r – відстань між центром Землі і центром маси тіла; k — гравітаційна стала.

Враховуючи, що на тіло діють лише сила інерції і сила тяжіння, запишемо диференціальне рівняння руху тіла:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2} \text{ або } \frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}$$

Знак мінус беремо тому, що з часом швидкість руху зменшується, а це означає, що прискорення від’ємне.

Знайдене диференціальне рівняння не містить аргументу t, тобто це рівняння виду $F\left(y, y', y''\right) = 0$. Розв’яжемо його з початковими умовами: $r = R, \dfrac{dr}{dt} = v_0$ при $t = 0$, де R – радіус Землі; v_0 – швидкість кидання.

Покладемо $\dfrac{dr}{dt} = v\left(r\right) = v$, тоді

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v,$$

де V – швидкість руху тіла.

Підставляючи ці величини в рівняння, отримуємо $v\dfrac{dv}{dr} = -k\dfrac{M}{r^2}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо загальний розв’язок цього рівняння: $\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{kM}{r} + C_1$.

Згідно з початковими умовами на поверхні Землі $v\left(R\right) = v_0$, тому

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}.$$

Підставивши знайдене значення C_1 в загальний розв’язок, отримаємо $\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{kM}{r} + \left(\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R}\right)$, звідки $\dfrac{kM}{r} + \left(\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R}\right) > 0$.

За умовою задачі вихід тіла із гравітаційного поля Землі означає, що $r \to \infty$ при $t \to \infty$. Оскільки $\frac{kM}{r} \to 0$ при $r \to \infty$, то одержана нерівність виконуватиметься для довільного r лише у випадку, коли

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \ge 0, \text{ або } v_0^2 \ge \frac{2kM}{R}.$$

Із закону тяжіння випливає, що прискорення вільного падіння дорівнює

$$g(r) = \frac{F}{m} = \frac{kM}{r^2}.$$

На поверхні Землі $r = R$, тому $g = g(R) = \frac{kM}{R^2}$.

Отже, швидкість кидання повинна задовольняти нерівність

$$v_0^2 \ge \frac{2kM}{R} = 2gR \text{ або } v_0 \ge \sqrt{2gR}.$$

Оскільки $g = 981 см/с^2$, $R = 63 \cdot 10^7$ см, то найменша швидкість кидання, яка забезпечить вихід тіла із гравітаційного поля Землі (друга космічна швидкість), дорівнює $v_0 = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \cdot 10^5 см/с = 11{,}2 км/с$.

Задача 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

Розв'язання. Задане рівняння не містить явно незалежної змінної x, тому введемо нову функцію $z(y)$: $y' = z;\ y'' = \frac{dz}{dy} z.$

Отримаємо рівняння першого порядку:

$$2yz\frac{dz}{dy} - 3z^2 = 4y^2 \text{ або } \frac{dz}{dy} = \frac{3z^2 + 4y^2}{2yz},$$ яке є однорідним рівнянням.

Зробимо підстановку: $z = uy$. Тоді $\frac{dz}{dy} = \frac{du}{dy}y + u$. Одержимо рівняння $\frac{du}{dy}y + u = \frac{3u^2 + 4}{2u}$, в якому можна відокремити змінні:

$$\frac{du}{dy}y = \frac{u^2+4}{2u}; \quad \frac{2udu}{u^2+4} = \frac{dy}{y}; \quad \int \frac{d\left(u^2+u\right)}{u^2+4} = \int \frac{dy}{y}; \quad \ln\left(u^2+4\right) = \ln|y| + \ln|C_1|;$$

$$u^2+4 = C_1 y; \;\; u = \pm\sqrt{C_1 y - 4}; \quad z = \pm y\sqrt{C_1 y - 4}.$$

Повернемося до початкової невідомої функції $y(x)$: $\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{C_1 y - 4}$ або $dy = \pm y\sqrt{C_1 y - 4}dx.$

Знову отримали рівняння першого порядку. Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{dy}{y\sqrt{C_1 y - 4}} = \pm dx; \;\; \int \frac{dy}{y\sqrt{C_1 y - 4}} = \pm \int dx\,.$$

Знайдемо інтеграл, що міститься у лівій частині отриманої рівності. Зробимо заміну $\sqrt{C_1 y - 4} = t;\;\; C_1 y - 4 = t^2;\;\; y = \frac{t^2+4}{C_1};\;\; dy = \frac{2}{C_1}tdt.$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{C_1 y - 4}} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = arctg\frac{t}{2} + \tilde{C} = arctg\frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} + \tilde{C}.$$

Остаточно одержимо: $arctg\frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = \pm\left(x + C_2\right).$

Спростимо цей вираз: $\frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = \pm tg\left(x + C_2\right);\quad \frac{C_1 y - 4}{4} = tg^2\left(x + C_2\right);$

$C_1 y = 4\left(tg^2\left(x + C_2\right) + 1\right);\;\; C_1 y = \frac{4}{\cos^2\left(x + C_2\right)};\qquad y = \frac{\tilde{C}_1}{\cos^2\left(x + C_2\right)}$ (тут позначено: $\tilde{C}_1 = \frac{4}{C_1}$).

Отже,загальний розв’язок заданого рівняння має вигляд: $y = \frac{\tilde{C}_1}{\cos^2\left(x + C_2\right)}.$

Завдання для самостійної роботи

11. Розв’язати диференціальні рівняння.

1) $y'' = xe^{-2x}$;
2) $xy''' = 1$;
3) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
4) $y''' = \sin^2 x$;
5) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$;
6) $y'' = \dfrac{1}{2x+1}$;
7) $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x$;
8) $y''' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$;
9) $y''' = \sin^2 x$;
10) $\sqrt{1+x^2}\, y'' = 1$;
11) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12) $y'' = \sin^3 x$;
13) $y'' \sin^3 x = \sin 2x$;
14) $y'' = x \cdot 2^x$;
15) $y''' = \cos^3 x$;
16) $y''' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}$;
17) $y'' = \sin^2 x \cdot \cos x$;
18) $y^{IV} = \cos^2 x$;
19) $y''' = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$;
20) $y^{IV} = \sin^2 2x$;
21) $y'' = xe^{-x}$;
22) $y'' = \dfrac{1}{4+x^2}$;
23) $y'' = \dfrac{1}{x+3}$;

24) $y'' = x + \sin^2 x$;

25) $y'' = xe^x - 1$;

26) $y''' = \cos^2 \dfrac{x}{3} + x^2$;

27) $y''' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x+1}}$;

28) $y'' = tg^2 2x$;

29) $y'' = xe^{3x}$;

30) $y'' = ctg^2 3x$.

12. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $xy''' + y'' = \sqrt{x}$;
2) $(1 + \sin x)\, y''' = y'' \cos x$;
3) $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$;
4) $xy''' + y'' = 1$;
5) $y''' x \ln x = y''$;
6) $y'' tgx - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$;
7) $xy''' + y'' = x + 1$;
8) $(1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3$;
9) $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$;
10) $ctg\, 2x \cdot y''' + 2y'' = 0$;
11) $th\, x \cdot y''' = y''$;
12) $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$;
13) $xy''' + y'' + x = 0$;
14) $y''' tgx = 2y''$;
15) $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$;
16) $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
17) $x^4 y'' + x^3 y' = 4$;
18) $x^2 y'' + xy' = 1$;

19) $(x-1)y''-y'=x(x-1)^2$;

20) $y''=\dfrac{y'}{x}\left(1+\ln\dfrac{y'}{x}\right)$;

21) $y'''tgx=y''+1$;

22) $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$;

23) $y''ctgx+y'=\cos x$;

24) $y''\,tg\,x-y'=\dfrac{1}{\sin x}$;

25) $xy''-y'-x\sin\dfrac{y'}{x}=0$;

26) $(1+e^x)\,y''+y'=0$;

27) $y'''=2(y''-1)\,ctg\,x$;

28) $(1+x^2)\,y''+2xy'=12x^3$;

29) $(x+1)\,y'''+y''=x+1$;

30) $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x$.

13. Знайти розв'язок задачі Коші.

1) $y''y^3+1=0;\ y(1)=-1;\ y'(1)=-1$;

2) $yy''-\left(y'\right)^2=0;\ y(0)=1;\ y'(0)=2$;

3) $y''=2\sin^3 y\cos y;\ y(1)=\dfrac{\pi}{2};\ y'(1)=1$;

4) $y^2+(y')^2-2yy''=0;\ y(0)=1;\ y'(0)=1$;

5) $yy''+(y')^2=1;\ y(0)=1;\ y'(0)=1$;

6) $y''=50y^3;\ y(3)=1;\ y'(3)=5$;

7) $y''+2\sin y\cos^3 y=0;\ y(0)=0;\ y'(0)=1$;

8) $y''=32\sin^3 y\cdot\cos y;\ y(1)=\dfrac{\pi}{2};\ y'(1)=4$;

9) $y^3y''=y^4-16;\ y(0)=2\sqrt{2};\ y'(0)=\sqrt{2}$;

10) $3y'y''=(y')^3+y+1;\ y(0)=-2;\ y'(0)=0$;

11) $y''=(y')^2-y;\ y(1)=-\dfrac{1}{4};\ y'(1)=\dfrac{1}{2}$;

12) $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 4$;

13) $4y^3y'' = 16y^4 - 1;\ y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

14) $yy'' - y'(1 + y') = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1$;

15) $y''y^3 + 49 = 0;\ y(3) = -7;\ y'(3) = -1$;

16) $y'' = 18\sin^3 y\cos y;\ y(1) = \dfrac{\pi}{2};\ y'(1) = 3$;

17) $y'' - 50\sin^3 y\cos y = 0;\ y(1) = \dfrac{\pi}{2};\ y'(1) = 5$;

18) $4y^3y'' = y^4 - 16;\ y(0) = 2\sqrt{2};\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

19) $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 5$;

20) $y'' - 8y^3 = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2$;

21) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0;\ y(0) = e;\ y'(0) = \dfrac{1}{2}$;

22) $y'' = 8\sin^3 y\cos y;\ y(1) = \dfrac{\pi}{2};\ y'(1) = 2$;

23) $y''y^3 + 25 = 0;\ y(2) = -5;\ y'(2) = -1$;

24) $y'' = e^{2y};\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1$;

25) $4y^3y'' = y^4 - 1;\ y(0) = \sqrt{2};\ y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

26) $yy'' - (y')^2 = y^2;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0$;

27) $2yy'' + y^2 = \left(y'\right)^2;\ y(0) = y'(0) = 1$;

28) $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 2$;

29) $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 3$;

30) $y''y^3 + 16 = 0;\ y(1) = 2;\ y'(1) = 2$.

Тема 5: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

5.1. Основні означення і поняття

Рівняння виду

$$b_0(x)y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)y=\varphi(x), \qquad (53)$$

де $b_0(x),b_1(x),\ldots,b_n(x),\varphi(x)$ – задані функції, називається *лінійним диференціальним рівнянням* n*-го порядку*.

Термін «лінійне рівняння» пов'язаний з тим, що рівняння (53) містить невідому функцію $y=y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені.

Функції $b_i(x),\ i=0,1,\ldots,n$, називаються *коефіцієнтами даного рівняння*, а функція $\varphi(x)$ – його вільним членом. Якщо вільний член $\varphi(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (53) називається *однорідним*, якщо $\varphi(x)\neq 0$, то рівняння (53) називається *неоднорідним*. Коефіцієнт $b_0(x)\neq 0$ в своїй області визначення, бо в протилежному випадку рівняння (53) не було б рівнянням n-го порядку. Поділивши дане рівняння на $b_0(x)$, одержимо

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x), \qquad (54)$$

де

$$a_i(x)=\frac{b_i(x)}{b_0(x)},\ i=1,2,\ldots,n;\ f(x)=\frac{\varphi(x)}{b_0(x)}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння виду (53) завжди можна ввести до виду (54). У зв'язку в цим ми надалі розглядатимемо лише такі рівняння.

Якщо в деякому інтервалі $(a;b)$ (скінченному чи нескінченному) коефіцієнти $a_i(x)$ і вільний член $f(x)$ – це неперервні функції, то рівняння (54) при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ x_0\in(a;b), \qquad (55)$$

має єдиний розв'язок, який задовольняє ці умови.

Справді, записавши рівняння (54) у вигляді $y^{(n)}=f(x)-a_1(x)y^{(n-1)}-\ldots-a_n(x)y$, бачимо, що воно задовольняє всі умови теореми 2. Можна довести, що розв'язок рівняння (54), який задовольняв умови (55), існує і єдиний на всьому інтервалі $(a;b)$ (для рівняння (53) умови теореми 2 можуть не виконуватись в тих точках, де $b_0(x)=0$).

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти і вільний член рівняння (54) на деякому інтервалі $(a;b)$ є неперервними функціями.

5.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{56}$$

і встановимо деякі властивості його розв'язків.

Очевидно, одним із розв'язків рівняння (56) є $y\equiv 0$. Цей розв'язок називають *нульовим* або *тривіальним*. Надалі під задачею розв'язання однорідного диференціального рівняння розумітимемо задачу відшукання його нетривіальних розв'язків.

Теорема 1. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (56), то розв'язком цього рівняння є також функція*

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{57}$$

де C_1,C_2 – довільні сталі.

Підставивши функцію (57) в рівняння (56), матимемо:

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+a_1(x)\big(C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x)\big)+$$

$$+a_2(x)\big(C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\big)=$$

$$=C_1\Big[y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\Big]+$$

$$+C_2\Big[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\Big].$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (56), то вирази в квадратних дужках тотожно дорівнюють нулю, а це означає, що функція (57) є розв'язком рівняння (56).

Функція (57) містить дві довільні сталі і є розв’язком рівняння (56), тому природно виникає запитання: чи не є розв’язок (57) загальним розв'язком рівняння (56)? Щоб відповісти на це запитання, введемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними на проміжку* $(a;b)$, якщо тотожність

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0, \tag{58}$$

де α_1,α_2 – дійсні числа, справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1=\alpha_2=0.$$

Якщо хоча б одне з чисел α_1 чи α_2 відмінне від нуля і виконується тотожність (58), то функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними на проміжку* $(a;b)$.

Неважко переконатись, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ тоді і тільки тоді лінійно залежні на проміжку $(a;b)$, коли існує таке стале число λ, що для всіх $x\in(a;b)$ виконується рівність

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda \text{ тобто } y_1(x)=\lambda y_2(x).$$

Інакше кажучи, дві функції тоді і тільки тоді лінійно залежні, коли вони пропорційні. Наприклад, нехай $y_1(x)=x, y_2(x)=2x, y_3(x)=x^2$, тоді функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні, а $y_1(x)$ і $y_3(x)$ – лінійно незалежні:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{1}{2}=const;\ \frac{y_1(x)}{y_3(x)}=\frac{1}{x}\neq const.$$

Якщо $y_1=y_1(x)$ та $y_2=y_2(x)$ – функції від x, то визначник

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$$

називається визначником Вронського або вронскіаном цих функцій і позначається символом $W(y_1,y_2)$ або $W(x)$.

Теорема 2. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– диференційовні і лінійно залежні на проміжку* $(a;b)$*, то визначник Вронського на цьому проміжку тотожно дорівнює нулю.*

Нехай, наприклад, в тотожності (58) $\alpha_1 \neq 0$, тоді $y_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$;

тому

$$\forall x \in (a;b):\ W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Якщо функції* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– лінійно незалежні розв'язки рівняння* (56) *на проміжку* $(a;b)$*, то визначник Вронського цих функцій в жодній точці даного проміжку не дорівнює нулю.*

Доведемо теорему методом від супротивного. Припустимо, що існує точка $x_0 \in (a;b)$, в якій $W(x_0) = 0$.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0, \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \qquad (59)$$

де λ_1, λ_2 – невідомі числа, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (56). Оскільки визначник системи (59) $W(x_0) = 0$, то вона має ненульовий розв'язок. Позначимо його через α_1, α_2 (серед чисел α_1, α_2 хоча б одне число відмінне від нуля) і введемо функцію

$$Y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Ця функція за теоремою 1 є розв'язком рівняння (56), причому, згідно з системою (59), задовольняє початкові умови

$$Y(x_0) = 0, Y'(x_0) = 0. \qquad (60)$$

Проте функцією, яка задовольняє і рівняння (56), і початкові умови (60), є також функція $y(x) \equiv 0$. Оскільки для диференціального рівняння (56) виконуються всі умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку, то розв'язки $Y(x)$ та $y\equiv 0$ збігаються, тобто

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0.$$

Ця рівність означає, що розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежні на проміжку $(a;b)$. Дійшли суперечності. Отже,

$$\forall x\in(a;b):\ W(x)\neq 0.$$

З теорем 2 і 3 випливає такий критерій лінійної незалежності розв'язків диференціального рівняння: для того щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (56) були лінійно незалежними на заданому проміжку, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Тепер ми можемо дати відповідь на поставлене раніше запитання. Встановимо умови, за яких функція (57) буде загальним розв'язком рівняння (56).

Теорема 4. *(Про структуру загального розв'язку однорідного рівняння.) Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два лінійно незалежні на проміжку $(a;b)$ розв'язки рівняння (56), то функція*

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{61}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі, є його загальним розв'язком.

Згідно з теоремою 2 функція (61) є розв'язком рівняння (56) за будь-яких значень сталих C_1 і C_2. Щоб довести, що цей розв'язок загальний, покажемо що з нього можна виділити такий єдиний частинний розв'язок, який задовольняє довільно задані початкові умови

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \tag{62}$$

де $x_0\in(a;b)$.

Підставивши початкові умови (62) в рівність (61), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=y_0, \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=y_0', \end{cases}$$

в якій C_1 та C_2 – невідомі числа. Визначником цієї системи є визначник Вронського $W\left(x_0\right)$. Оскільки $y_1\left(x\right)$ та $y_2\left(x\right)$ – лінійно незалежні функції, то згідно з теоремою 2 $W\left(x_0\right) \neq 0$, тому дана система має єдиний розв'язок $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$. Розв'язок $y = C_{10}y_1\left(x\right) + C_{20}y_2\left(x\right)$ і є тим частинним розв'язком рівняння (56), який задовольняє початкові умови (62).

Як уже говорилося, не кожне диференціальне рівняння другого порядку розв'язується в квадратурах. Те саме стосується лінійного рівняння (56) із змінними коефіцієнтами $a_1\left(x\right)$ і $a_2\left(x\right)$. Проте якщо відомий один частинний розв'язок рівняння (56), то можна знайти і загальний його розв'язок.

Теорема 5. *Якщо відомий який-небудь частинний ненульовий розв'язок рівняння* (56)*, то це рівняння розв'язується в квадратурах.*

Нехай $y_1 = y_1\left(x\right)$ – ненульовий розв'язок рівняння (56). Покладемо $y = y_1 z$, де z – невідома функція від x, тоді $y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$. Підставляючи значення y, y' та y'' в рівняння (56), будемо мати

$$\left[y_1'' + a_1\left(x\right)y_1' + a_2\left(x\right)y_1\right]z + \left(2y_1' + a_1\left(x\right)y_1\right)z' + y_1 z'' = 0.$$

Оскільки y_1 – розв'язок рівняння (56), то вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, тому останнє рівняння набуває вигляду

$$\left(2y_1' + a_1\left(x\right)y_1\right)z' + y_1 z'' = 0.$$

Покладемо $z' = u\left(x\right)$, де u – нова невідома функція від x. Приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'y_1 + \left(2y_1' + a_1\left(x\right)y_1\right)u = 0.$$

Маємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + a_1\left(x\right)y_1}{y_1}dx,$$

$$u = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx}.$$

Оскільки $z' = u$ та $y = y_1 z$, то

$$y = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx + C_2 y_1,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Довести, що функції $y_1 = e^{2x}$ і $y_2 = e^{-2x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $y'' - 4y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

Розв'язання. Підставляючи функції y_1 та y_2 в задане рівняння, переконуємося, що кожна з них перетворює рівняння на тотожність, отже є його розв'язком. Оскільки $\frac{y_1}{y_2} = e^{4x} \neq const$, то функції y_1 та y_2 – лінійно незалежні. Тоді, згідно з теоремою 3, загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Задача 2. Довести, що функції $y_1 = e^{3x}$ і $y_2 = xe^{3x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0,$ і знайти загальний розв'язок цього рівняння.

Розв'язання. Підставляючи функції y_1 та y_2 в задане рівняння, переконуємося, що кожна з них перетворює рівняння в тотожність:

$$y_1' = 3e^{3x};\ y_1'' = 9e^{3x};\ 9e^{3x} - 18e^{3x} + 9e^{3x} \equiv 0;$$

$$y_2' = e^{3x} + 3xe^{3x};$$

$$y_2'' = 3e^{3x} + 3\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right);\quad 3e^{3x} + 3\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right) - 6e^{3x} - 18xe^{3x} + 9xe^{3x} \equiv 0.$$

Оскільки $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \cos t,$ то розв'язки y_1 та y_2 лінійно незалежні. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння $y = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x},$ де C_1, C_2 – довільні сталі.

Якщо для лінійного рівняння другого порядку $y'' + a_1(x) + a_2(x)y = 0$ відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$, то його другий розв'язок, лінійно незалежний з першим, можна знайти за формулою:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx.$$

Задача 3. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, яке має частинний розв'язок $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 5 покладемо $y = y_1 z$, тоді матимемо рівняння $z'\left(2y_1' + \frac{2}{x}y_1\right) + y_1 z'' = 0$. Підставимо замість y_1 його значення і розв'яжемо відносно функції z:

$$z'\left(2\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x}z'' = 0;$$

$$2z'\cos x + z''\sin x = 0;\ 2z'\cos x + \frac{d}{dx}(z')\sin x = 0;$$

$$\frac{dz'}{z'} = -2\frac{\cos x}{\sin x}dx,\ z' = \frac{C_1}{\sin^2 x},\ z = C_2 - C_1\,ctg\,x.$$

Отже, $y = y_1 z = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1\,ctg\,x)$.

Задача 4. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння $y'' + (tgx - 2ctgx)y' + 2yctg^2 x = 0,$ яке має частинний розв'язок $y_1 = \sin x.$

Розв'язання. Знайдемо за наведеною формулою другий розв'язок цього рівняння, який є лінійно незалежним з першим розв'язком.

$$a_1(x) = tgx - 2ctgx;$$

$$e^{-\int a_1(x)dx} = e^{\int (2ctgx - tgx)dx} = e^{2\ln\sin x + \ln\cos x} = e^{\ln\left(\sin^2 x\cos x\right)} = \sin^2 x\cos x.$$

$$y_2 = \sin x \int \cos dx = \sin^2 x.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x.$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + 2y' - xy = 0,$ яке має частинний розв'язок $y_1 = \dfrac{e^x}{x}.$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $y'' + \dfrac{2}{x} y' - y = 0$ і знайдемо другий розв'язок y_2 за наведеною формулою:

$$y_2 = \frac{e^x}{x} \int \frac{x^2}{e^{2x}} e^{-\int \frac{2dx}{x}} dx = \frac{e^x}{x} \int \frac{x^2}{e^{2x}} e^{-2\ln|x|} dx = \frac{e^x}{x} \int \frac{x^2}{e^{2x}} e^{\ln\left(x^{-2}\right)} dx =$$
$$= \frac{e^x}{x} \int e^{-2x} dx = \frac{e^x}{x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) = \frac{-e^{-x}}{2x}.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$y = C_1 \dfrac{e^x}{x} + C_2 \left(-\dfrac{e^{-x}}{2x} \right)$ або $y = C_1 \dfrac{e^x}{x} + \tilde{C}_2 \dfrac{e^{-x}}{x},$ де $C_1, \tilde{C}_2$ – довільні сталі.

Задача 6. Рівняння $y'' + \dfrac{x^2 - 2}{2x - x^2} y' + \dfrac{2(1-x)}{2x - x^2} y = 0,$ має розв'язок $y_1 = e^x.$ Знайти розв'язок задачі Коші для цього рівняння з початковими умовами $y(3) = 1,\ y'(3) = 0.$

Розв'язання. Знайдемо другий розв'язок цього рівняння, лінійно незалежний з першим. Розглянемо інтервал $(2;\infty).$

$$a_1(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - x};$$

$$-\int a_1(x) dx = \int \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x} dx = \int \left(1 + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \right) dx = \int dx + \int \frac{d\left(x^2 - 2x\right)}{x^2 - 2x} = x + \ln\left(x^2 - 2x\right).$$

$$y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{x + \ln\left(x^2 - 2x\right)} dx = e^x \int \left(x^2 - 2x\right) e^{-x} dx.$$

Інтегруючи двічі за частинами, отримаємо:

$$y_2 = e^x\left(-e^{-x}\left(x^2 - 2x\right) - 2\left(x-1\right)e^{-x} - 2e^{-x}\right) = -e^x e^{-x} x^2 = -x^2.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 x^2.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 x.$$

Для знаходження довільних сталих C_1 та C_2 отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 e^3 + 9C_2 = 1, \\ C_1 e^3 + 6C_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $C_1 = -2e^{-3}, C_2 = \dfrac{1}{3}$.

Отже, розв'язок заданої задачі Коші має вигляд: $y = -2e^{x-3} + \dfrac{1}{3}x^2$.

5.3. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку

Розглянемо тепер неоднорідне лінійне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1\left(x\right)y' + a_2\left(x\right)y = f\left(x\right), \tag{63}$$

де $a_1\left(x\right), a_2\left(x\right), f\left(x\right)$ – задані і неперервні на $\left(a;b\right)$ функції.

Лінійне однорідне рівняння

$$y'' + a_1\left(x\right)y' + a_2\left(x\right)y = 0, \tag{64}$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною неоднорідного рівняння (63), надалі називатимемо відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема *(про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння). Загальним розв'язком рівняння* (63) *є сума його довільного частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* (64).

Нехай $y^*(x)$ – частинний розв'язок рівняння (63), а $\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – загальний розв’язок рівняння (64). Переконаємось, що функція

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) \qquad (65)$$

– розв’язок рівняння (63). Підставляючи функцію (65) в рівняння (63), одержимо

$$y^{*\prime\prime}(x) + \overline{y}''(x) + a_1(x)\left(y^{*\prime}(x) + \overline{y}'(x)\right) + a_2(x)\left(y^*(x) + \overline{y}(x)\right) =$$

$$= \left(y^{*\prime\prime}(x) + a_1(x) y^{*\prime}(x) + a_2(x) y^*(x)\right) +$$

$$+ \left[\overline{y}''(x) + a_1(x)\overline{y}'(x) + a_2(x)\overline{y}(x)\right] = f(x).$$

Оскільки вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а у круглих – функції $f(x)$, то функція (65) є розв’язком рівняння (63).

Покажемо тепер, що функція (65) – загальний розв’язок рівняння (63). Для цього доведемо, що з розв'язку (65) можна одержати розв’язок рівняння (63), який задовольняє задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \qquad (66)$$

де $x_0 \in (a;b)$.

Підставивши умови (66) у функцію (65), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0); \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' + y^{*\prime}(x_0), \end{cases}$$

де C_1, C_2 – невідомі.

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$ для функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ в точці x_0. Оскільки ці функції лінійно незалежні, то $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдиний розв’язок $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$. Таким чином, одержали розв’язок $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + y^*(x)$ рівняння (63), який задовольняє початкові умови (66).

З теореми випливає, що для знаходження загального розв’язку рівняння (63) потрібно знайти який-небудь його частинний розв’язок, а також загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння. Обидві ці задачі є складними. Проте якщо відомий загальний розв’язок однорідного рівняння (64), то частинний розв’язок рівняння (63) можна знайти, скориставшись так званим методом варіації довільних сталих, який належить Лагранжу.

5.4. Метод варіації довільних сталих

Нехай

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (67)$$

– загальний розв’язок однорідного рівняння (64), відповідного рівнянню (63) Замінимо у формулі (67) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$, $C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \qquad (68)$$

була розв’язком рівняння (63). Знайдемо похідну

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову, щоб

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0. \qquad (69)$$

З урахуванням умови (69) похідна y' набуде вигляду

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Знайдемо другу похідну

$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Підставивши значення y, y', y'' в рівняння (63), одержимо

$$C_1(x)\left[y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x) \right] +$$

$$+C_2(x)\left[y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x) \right] +$$

$$+C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв’язки однорідного рівняння (64), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \qquad (70)$$

Таким чином, функція (68) буде тоді частинним розв’язком рівняння (63), коли функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольнятимуть систему рівнянь (69) і (70):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0; \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases} \qquad (71)$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x)$ для лінійно незалежних розв’язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (64), тому $W(x)\neq 0$. Тоді система (71) має єдиний розв’язок $C_1'=\varphi(x)$ та $C_2'=\psi(x)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – деякі функції від x. Інтегруючи ці функції, знаходимо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, а потім за формулою (68) складаємо частинний розв’язок рівняння (63).

При знаходженні частинних розв’язків може бути корисною наступна теорема.

Теорема (про накладання розв'язків). *Якщо права частина рівняння* $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ *дорівнює сумі двох функцій:* $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, *а* $y_1(x)$ *та* $y_2(x)$ *– розв'язки рівнянь*

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x) \text{ та } y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_2(x),$$

то функція $y=y_1(x)+y_2(x)$ *є розв'язком даного рівняння.*

Справді,

$$y_1''(x)+y_2''(x)+a_1(x)\big(y_1'(x)+y_2'(x)\big)+a_2(x)\big(y_1(x)+y_2(x)\big)=$$

$$=y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)+y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+$$

$$+a_2(x)y_2(x)=f_1(x)+f_2(x)\equiv f(x).$$

Це означає, що коли можна знайти розв’язки рівнянь, правими частинами яких є окремі доданки заданої правої частини, то можна дуже просто – у вигляді суми розв’язків – знайти розв’язок даного рівняння.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Рівняння $y''+4y=x$ має частинний розв'язок $y_1=\dfrac{x}{4}$, рівняння $y''+4y=e^x$ – розв'язок $y_2=\dfrac{e^x}{5}$. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''+4y=x+e^x$.

Розв'язання. Згідно з теоремою шуканий розв'язок має вигляд $y=y_1+y_2=\dfrac{x}{4}+\dfrac{e^x}{5}$.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$, якщо $\overline{y}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Розв'язання. Запишемо частинний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y=C_1(x)\sin 2x+C_2(x)\cos 2x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему рівнянь виду (71):

$$\begin{cases} C_1'\sin 2x+C_2'\cos 2x=0; \\ 2C_1'\cos 2x-2C_2'\sin 2x=\dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $C_1'=\dfrac{1}{2}$, $C_2'=-\dfrac{1}{2}tg2x$. Інтегруючи, одержуємо $C_1=\int\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{x}{2}$, $C_2=-\int\dfrac{1}{2}tg2xdx=\dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x|$.

Запишемо частинний розв'язок даного рівняння:

$$y^*=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|.$$

Отже, $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|$

– загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Таким самим буде результат, якщо під час інтегрування C_1' та C_2' ввести довільні сталі $\overline{C}_1$ та $\overline{C}_2$:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1,\ C_2 = \frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| + \overline{C}_2;$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + \overline{C}_1\right)\sin 2x + \left(\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| + \overline{C}_2\right)\cos 2x =$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln\left|\cos 2x\right| + \overline{C}_1 \sin 2x + \overline{C}_2 \cos 2x.$$

Тема 6: Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Як уже зазначалося, основною задачею в диференціальних рівняннях є знаходження їхнього загального розв'язку. Ця задача найповніше вивчена для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

6.1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (72)$$

де p, q – дійсні числа.

Ейлер запропонував шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad (73)$$

де k – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (73) в рівняння (72), отримаємо

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (74)$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (74), то функція (73) буде розв'язком рівняння (72). Квадратне рівняння (74) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (72).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2. Можливі три випадки:

I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа $\left(k_1 \neq k_2\right)$;

II. k_1 і k_2 – комплексні числа $\left(k_{1,2} = \alpha \pm \beta i\right)$;

III. k_1 і k_2 – дійсні і рівні числа $\left(k_1 = k_2\right)$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку частинними розв’язками рівняння (72) є функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що при $k_1 \neq k_2$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const.$$

Згідно з теоремою 4 (попередня тема) загальний розв’язок рівняння (72) знаходять за формулою

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (75)$$

II. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:*

$$k_1 = \alpha + \beta i, \; k_2 = \alpha - \beta i.$$

Підставивши значення k_1 та k_2 у формулу (73), знайдемо розв’язки

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

маємо

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right);$$

$$e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Зауважимо, що коли функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв’язком рівняння (72), то розв’язками будуть також функції $u(x)$ та $v(x)$. Справді, підставивши функцію $z(x)$ в рівняння (72), одержимо:

$$u'' + v''i + p\left(u' + v'i\right) + q\left(u + vi\right) \equiv 0,$$

або

$$\left(u'' + pu' + qu\right) + i\left(v'' + pv' + qv\right) = 0.$$

Остання тотожність можлива, коли вирази в дужках дорівнюють нулю. Це означає, що функції u та v – розв'язки рівняння (72). Згідно з цим зауваженням частинними розв'язками рівняння (72) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = tg\beta x \neq const,$$

тому загальний розв'язок рівняння (72) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x\right). \qquad (76)$$

III. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2 = k$.

За формулою (73) одержимо один з розв'язків:

$$y = e^{kx}.$$

Другий розв'язок шукатимемо у вигляді $y_2 = ue^{kx}$, де u – невідома функція від x. Знайшовши y_2' і y_2'' та підставивши їх у рівняння (72), будемо мати

$$\left(u'' + 2u'k + uk^2\right)e^{kx} + p\left(u' + uk\right)e^{kx} + que^{kx} = 0,$$

або

$$u'' + \left(2k + p\right)u' + \left(k^2 + pk + q\right)u = 0.$$

Оскільки k – корінь рівняння (74), то $k^2 + pk + q = 0$ і за теоремою Вієта $2k = -p$, тому $2k + p = 0$ і $u'' = 0$, звідки $u = C_1x + C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1, C_2 = 0$ (нас цікавить який-небудь розв'язок $u\left(x\right) \neq 0$), знайдемо другий частинний розв'язок рівняння (72):

$$y_2 = xe^{kx}.$$

Розв'язки y_1 та y_2 – лінійно незалежні, тому загальний розв'язок рівняння (72) має вигляд

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right). \qquad (77)$$

Розв’язування типових задач

Задача 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знайдемо його корені $k_1 = 2, k_2 = 3$. За формулою $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ шуканий розв’язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Задача 2. Розв’язати рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$ має комплексні корені $k_{1,2} = -2 \pm 3i$. Загальний розв’язок отримуємо за формулою $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x\right)$:

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\right).$$

Задача 3. Знайти розв’язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

Розв’язання. Знайдемо спочатку загальний розв’язок. Характеристичне рівняння $k^2 + 6k + 9 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = -3$. За формулою $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$ маємо загальний розв'язок $y = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Скористаємось початковими умовами. Оскільки

$$y' = -3e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right) + C_2 e^{-3x}, \text{ то } \begin{cases} C_1 = 0; \\ -3C_1 + C_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0, C_2 = 2$.

Знаходимо шуканий розв'язок: $y = 2xe^{-3x}$.

6.2. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (78)$$

де p, q – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Загальний розв’язок такого рівняння дорівнює сумі частинного розв’язку рівняння (78) і загального розв’язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв’язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (78) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих. Проте для рівнянь із спеціальною правою частиною частинний розв’язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

І. Нехай права частина в рівнянні (78) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \qquad (79)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Можливі такі випадки:

а) число α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (80)$$

Тоді диференціальне рівняння (78) має частинний розв’язок виду

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x} = \left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n\right)e^{\alpha x}, \qquad (81)$$

де $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (81) в рівняння (78), після скорочення на $e^{\alpha x}$ будемо мати

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) \equiv P_n(x), \qquad (82)$$

де $Q_n''(x)$ – многочлен степеня $n-2$, $Q_n'(x)$ – многочлен степеня $n-1$, а $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ – многочлени степеня n. Таким чином, зліва і справа в тотожності (82) стоять многочлени степеня n. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо $n+1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

Не зупиняючись далі на доведеннях, вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок рівняння (78), залежно від виду правої частини $f(x)$ цього рівняння;

б) якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (80), тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (78) треба шукати у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}; \qquad (83)$$

в) якщо число α є двократним коренем рівняння (80), то частинний розв'язок рівняння (78) шукають у вигляді

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (84)$$

Об'єднаємо випадки а) – в): якщо права частина рівняння (78) має вигляд (79), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r = 0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (78) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (85)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, $R_m(x)$ – многочлен степеня m; α та β – дійсні числа. (Функція (79) є окремим випадком функції (85) і утворюється з неї при $\beta = 0$).

Частинний розв'язок рівняння (78) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x\right), \qquad (86)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s – найвищий степінь многочленів $R_m(x)$ та $P_n(x)$, тобто $s = \max(n,m)$; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (78) має вигляд

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \qquad (87)$$

де A, B – відомі дійсні числа, то частинний розв’язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r\left(a\cos\beta x + b\sin\beta x\right), \qquad (88)$$

де a, b – невідомі коефіцієнти; r – число коренів характеристичного рівняння (80), які дорівнюють βi.

Зауваження. 1. Шукані многочлени $Q_n(x)$ у формулах (81), (83) і (84) мають бути повними, тобто містити всі степені x від 0 до n, незалежно від того, чи повним є заданий многочлен $P_n(x)$. Те саме стосується многочленів $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ у формулі (86), причому невизначені коефіцієнти при одних і тих же степенях x у цих многочленах повинні бути, взагалі кажучи, різними.

Зауваження 2. Якщо права частина рівняння (78) є сумою декількох різних за структурою функцій виду (79) або (85), то для відшукання частинного розв’язку потрібно використати теорему про накладання розв’язків.

Зауваження 3. Використаний метод підбору окремого частинного розв’язку рівняння (78) можна застосовувати лише для певних диференціальних рівнянь, а саме для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною виду (79) або (85). В інших випадках частинний розв’язок треба шукати методом варіації довільних сталих.

Розв’язування типових задач

Задача 1. Розв’язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд

$\overline{y}(x) = e^x(C_1 + C_2 x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0\cdot x}$, причому $\alpha = 0$, $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$, то за формулою (81) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x)e^{0\cdot x}$, тобто $y^* = A + Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)' = B$, $(y^*)'' = 0$ і підставивши їх у рівняння, одержимо

$$-2B + A + Bx = 2x + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, будемо мати систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2; \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$

звідки $B = 2, A = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = 7 + 2x$, тому

$y = \overline{y}(x) + y^*(x) = e^x(C_1 + C_2 x) + 2x + 7$ є шуканим загальним розв'язком.

Задача 2. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_0(x)e^{3x}$, причому $\alpha = 3, \alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$y^* = Q_0(x)e^{3x}$, тобто $y^* = Ae^{3x}$,

де A – невідомий коефіцієнт.

Знайшовши похідні $(y^*)' = 3Ae^{3x}$, $(y^*)'' = 9Ae^{3x}$ і підставивши їх у рівняння, отримаємо

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x},$$

звідки $A=4$, тому $y^*=4e^{3x}$ – частинний розв'язок даного рівняння, а $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+4e^{3x}$ – його загальний розв'язок.

Задача 3. Розв'язати рівняння $y''+9y=\left(54x^2+1\right)e^{3x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+9=0$ має корені $k_{1,2}=\pm 3i$, тому $\overline{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Права частина даного рівняння має вигляд $P_2\left(x\right)e^{3x}$. Оскільки $\alpha=3$, $\alpha\neq k_1$, $\alpha\neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^*=Q_2\left(x\right)e^{3x}$, тобто

$$y^*=\left(A+Bx+Cx^2\right)e^{3x},$$

де A,B,C – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $\left(y^*\right)'$ та $\left(y^*\right)''$ і підставивши їх в дане рівняння, матимемо після зведення подібних членів і скорочення на e^{3x}:

$$18Cx^2+\left(18B+12C\right)x+\left(18A+6B+2C\right)=54x^2+1.$$

Звідси

$$\begin{cases} 18C=54; \\ 18B+12C=0; \\ 18A+6B+2C=1, \end{cases}$$

$$A=\frac{7}{18}, B=-2, C=3,$$

отже, $y^*=\left(3x^2-2x+\dfrac{7}{18}\right)e^{3x}$ – частинний розв'язок даного рівняння, а $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\left(3x^2-2x+\dfrac{7}{18}\right)e^{3x}$ – загальний розв'язок.

Задача 4. Розв'язати рівняння $y''-2y'-3y=\left(x+2\right)e^{3x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2-2k-3=0$ має корені $k_1=-1,\ k_2=3$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1\left(x\right)e^{3x}$, причому $\alpha=3=k_2, \alpha\neq k_1$ тобто $\alpha=3$ є простим коренем характеристичного рівняння, то згідно з формулою $y^*=xQ_n\left(x\right)e^{\alpha x}$ частинний розв'язок треба шукати у вигляді $y^*=xQ_1\left(x\right)e^{3x}$, а саме:

$$y^*=x\left(A+Bx\right)e^{3x},$$

де A,B – невідомі коефіцієнти.

Знайшовши $\left(y^*\right)'$ та $\left(y^*\right)''$ і підставивши y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ в дане рівняння, після спрощень знаходимо

$$8Bx+2B+4A=x+2.$$

Далі маємо

$$\begin{cases} 8B=1; \\ 2B+4A=2, \end{cases} \quad B=\frac{1}{8}, A=\frac{7}{16};$$

$y^*=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x\right)e^{3x}$ – частинний розв'язок даного рівняння;

$y=C_1e^{-x}+\left(C_2+\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x\right)e^{3x}$ – загальний розв'язок.

Задача 5. Розв'язати рівняння $y''+4y=5\sin 2x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+4=0$ має корені $k_{1,2}=\pm 2i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\overline{y}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$. Права частина даного рівняння $f\left(x\right)=5\sin 2x=5\sin 2x+0\cdot\cos 2x$ є функцією виду $f\left(x\right)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, де $A=0, B=5, \beta=2$. Крім того, число $\beta i=2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою $y^*=x^r\left(a\cos\beta x+b\sin\beta x\right)$ частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^*=x\left(a\cos 2x+b\sin 2x\right),$$

де a, b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $\left(y^*\right)'$ та $\left(y^*\right)''$ і підставивши $\left(y^*\right)''$ та y^* в дане рівняння, після спрощень одержимо

$$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ та $\cos 2x$ в лівій і правій частині цієї рівності, знаходимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5; \\ 4b = 0, \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{5}{4}, b = 0$. Отже $y^* = -\frac{5}{4}x\cos 2x$ – частинний розв’язок даного рівняння, а $y = \overline{y} + y^* = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x$ – загальний розв’язок.

Задача 6. Знайти розв’язок рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^x + 2x + 3$, який задовольняє початковим умовам: $y(0) = 3, y'(0) = -1$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\overline{y} = e^x\left(C_1 + C_2x\right)$. Права частина рівняння є сумою двох різних за структурою функцій $f_1(x) = 3e^x$ та $f_2(x) = 2x + 3$, тому за теоремою про накладання розв’язків частинний розв'язок даного рівняння дорівнює $y^* = y_1^* + y_2^*$, де y_1^* та y_2^* – частинні розв'язки рівнянь $y'' - 2y' + y = 3e^x$ та $y'' - 2y' + y = 2x + 3$ відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді $y_1^* = x^2Ae^x$, оскільки $r = 2$ (число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha = 1$, дорівнює 2). Підставивши y_1^*, $\left(y_1^*\right)'$, $\left(y_1^*\right)''$ в перше рівняння, після спрощень знайдемо $2A = 3$, тому

$$y_1^* = \frac{3}{2}x^2e^x.$$

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y_2^* = A + Bx$, звідки $y_2^* = 2x + 7$. Отже,

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{3}{2} x^2 \right) + 2x + 7$$

– загальний розв’язок даного рівняння.

Знайдемо частинний розв’язок, який задовольняє задані початкові умови. Продиференціюємо загальний розв’язок:

$$y' = e^x \left(C_1 + C_2 + C_2 x + 3x + \frac{3}{2} x^2 \right) + 2 .$$

Підставивши в загальний розв’язок і його похідну початкові умови $x = 0,\ y = 3,\ y' = -1$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 7 = 3; \\ C_1 + C_2 + 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = -4, C_2 = 1$. Отже, $y = e^x \left(\frac{3}{2} x^2 + x - 4 \right) + 2x + 7$ – шуканий розв’язок.

Задача 7. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 9y = 2e^{3x} \cos x$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 9 = 0$ має корені $k_1 = -3,\ \ k_2 = 3,$ тому загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння має вигляд: $\overline{y}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$.

Оскільки правою частиною рівняння є функція виду $f(x) = e^{\alpha x} \left(P_m(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x \right)$, причому $\alpha = 3,\ \ \beta = 1$ та число $3 + i$ не є коренем характеристичного рівняння $(r = 0)$, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$y^*(x) = e^{3x} \left(A \cos x + B \sin x \right)$, де A та B – невідомі коефіцієнти.

Знайдемо $\left(y^*(x) \right)''$ та підставимо $\left(y^*(x) \right)''$ та $y^*(x)$ в задане рівняння.

$$\left(y^* \right)' = 3e^{3x} \left(A \cos x + B \sin x \right) + e^{3x} \left(-A \sin x + B \cos x \right) =$$

$$= e^{3x}\left(\left(3A+B\right)\cos x+\left(3B-A\right)\sin x\right);$$

$$\left(y^*\right)'' = 3e^{3x}\left(\left(3A+B\right)\cos x+\left(3B-A\right)\sin x\right)+$$

$$+e^{3x}\left(-\left(3A+B\right)\sin x+\left(3B-A\right)\cos x\right)=e^{3x}\left(\left(8A+6B\right)\cos x+\left(8B-6A\right)\sin x\right)$$

$$e^{3x}\left(\left(8A+6B\right)\cos x+\left(8B-6A\right)\sin x\right)-9e^{3x}\left(A\cos x+B\sin x\right)=2e^{3x}\cos x.$$

Після спрощень отримаємо:

$\left(6B-A\right)\cos x+\left(-B-6A\right)\sin x=2\cos x,$ звідки

$$\begin{cases} 6B-A=2, \\ -B-6A=0. \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи: $A=-\dfrac{2}{37},\quad B=\dfrac{12}{37}.$

Отже, частинний розв’язок заданого неоднорідного рівняння $y'\left(x\right)=e^{3x}\left(-\dfrac{2}{37}\cos x+\dfrac{12}{37}\sin x\right),$ а загальний розв’язок цього рівняння

$$y\left(x\right)=\overline{y}\left(x\right)+y^*\left(x\right)=c_1e^{-3x}+c_2e^{3x}+\frac{2e^{3x}}{37}\left(6\sin x-\cos x\right).$$

Задача 8. Розв’язати рівняння $y''+y=tg\,x$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$, тому $\overline{y}=C_1\sin x+C_2\cos x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Права частина рівняння $f\left(x\right)=tg\,x$ не є функцією спеціального виду (79) або (85), тому частинний розв’язок даного рівняння методом підбору шукати не можна.

Знайдемо цей розв’язок методом Лагранжа. Складемо систему виду (71) і розв’яжемо її:

$$\begin{cases} C_1'\sin x+C_2'\cos x=0; \\ C_1'\cos x-C_2'\sin x=tg\,x, \end{cases}$$

$$C_1' = \sin x,\ C_2' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$C_1 = \int \sin x dx = -\cos x + \overline{C}_1;$$

$$C_2 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ – довільні сталі. При $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$ отримаємо частинний розв'язок:

$$y^* = -\sin x \cos x + \left(\sin x - \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x,$$

тоді $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Задача 9. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = tg^2 x.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені: $k^2 + 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm i.$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд:

$\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$ де C_1, C_2 – довільні сталі; $y_1 = \cos x;\quad y_2 = \sin x$.

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо за формулою:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Оскільки $y_1' = -\sin x,\ y_2' = \cos x$, то для знаходження $C_1'(x),\ C_2'(x)$ отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tg^2 x. \end{cases}$$

Застосуємо формули Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \;\; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tg^2 x & \cos x \end{vmatrix} = -tg^2 x \sin x = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tg^2 x \end{vmatrix} = \cos x tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Отже, $C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \quad C_2'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$

Звідси отримаємо:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin x\left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \int \sin x dx =$$

$$= -\frac{1}{\cos x} - \cos x + \overline{C}_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} - \int cox dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + \overline{C}_2.$$

Підставивши знайдені значення $C_1(x), C_2(x)$, одержимо загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + \overline{C}_1\right)\cos x + \left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + \overline{C}_2\right)\sin x;$$

$$y = -1 - \cos^2 x + \overline{C}_1 \cos x + \sin x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin^2 x + \overline{C}_2 \sin x.$$

Остаточно, $y = \overline{C}_1 \cos x + \overline{C}_2 \sin x + \sin x \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 2$, де $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ – довільні сталі.

Задача 10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ дійсні та рівні: $k_1 = k_2 = -2.$

Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\overline{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}.$$

Оскільки для даної задачі $y_1 = e^{-2x},\ y_2 = xe^{-2x},\ y_1' = -2e^{-2x},\ y_2' = e^{-2x} - 2xe^{-2x},$ то отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)xe^{-2x} = 0, \\ -2C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = e^{-2x}\ln x. \end{cases}$$

Скоротивши обидва рівняння на $e^{-2x},$ одержимо:

$$\begin{cases} C_1'(x) + xC_2'(x) = 0, \\ -2C_1'(x) + C_2'(x)(1 - 2x) = \ln x. \end{cases}$$

З першого рівняння маємо: $C_1'(x) = -xC_2'(x).$ Підставивши цей вираз у друге рівняння, знайдемо: $C_2'(x) = \ln x.$ Тому $C_1'(x) = -x\ln x.$

$$C_1(x) = -\int x\ln x dx = -\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + \overline{C}_1;$$

$$C_2(x) = \int \ln x dx = x\ln x - x + \overline{C}_2.$$

Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y = -\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)e^{-2x} + \overline{C}_1 e^{-2x} + \left(x^2\ln x - x^2\right)e^{-2x} + \overline{C}_2 x e^{-2x} \text{ або}$$

$$y = \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + \overline{C}_1 + \overline{C}_2 x\right)e^{-2x}.$$

Задача 11. Знайти розв'язок рівняння $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$, який задовольняє початкові умови: $y(0) = \frac{\pi}{4}$, $y'(0) = -\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k^2 + 5k + 6 = 0$ дійсні та різні: $k_1 = -3$, $k_2 = -2$. Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$.

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x)e^{-3x} + C_2(x)e^{-2x}.$$

Оскільки $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_1' = -3e^{-3x}$, $y_2' = -2e^{-2x}$, то для знаходження $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-3x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -3C_1'(x)e^{-3x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо: $C_1'(x) = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$, $C_2'(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Проінтегрувавши кожний з отриманих виразів, знайдемо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx = -\int\left(e^x - \frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx = -\int e^x dx + \int \frac{d\left(e^x\right)}{1+\left(e^x\right)^2} =$$

$$= -e^x + arctg e^x + \overline{C}_1.$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + \overline{C}_2.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y(x) = \left(arctg e^x - e^x + \overline{C}_1\right)e^{-3x} + \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + \overline{C}_2\right)e^{-2x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє задані початкові умови.

$$y'(x)=\left(\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-e^{x}\right)e^{-3x}+\left(arctge^{x}-e^{x}+\overline{C}_1\right)e^{-3x}(-3)+$$

$$+\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}e^{-2x}+\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+\overline{C}_2\right)e^{-2x}(-2).$$

Підставивши у вирази $y(x)$ та $y'(x)$ $x=0,\ y=\dfrac{\pi}{4},\ y'=-\dfrac{3\pi}{4}$, отримаємо систему рівнянь для визначення довільних сталих $\overline{C}_1$ та $\overline{C}_2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}-1+\overline{C}_1+\overline{C}_2+\dfrac{1}{2}\ln 2,\\ -\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\pi}{4}+3-3C_1+\dfrac{1}{2}-\ln 2-2\overline{C}_2,\end{cases} \text{або} \begin{cases}\overline{C}_1+\overline{C}_2=1-\dfrac{1}{2}\ln 2,\\ 3\overline{C}_1+2\overline{C}_2=3-\ln 2.\end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, одержимо: $\overline{C}_1=1,\ \overline{C}_2=-\dfrac{1}{2}\ln 2.$

Отже, шуканий частинний розв’язок заданого рівняння має вигляд:

$$y=\left(arctge^{x}-e^{x}+1\right)e^{-3x}+\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+e^{2x}\right)-\ln 2\right)e^{-2x}.$$

Завдання для самостійної роботи

14. Розв’язати диференціальні рівняння.

1) $y''-6y'+8y=4/(1+e^{-2x}),\ y(0)=1+2\ln 2,\ y'(0)=6\ln 2$;
2) $y''+3y'=9e^{3x}/\left(1+e^{3x}\right),\ y(0)=\ln 4,\ y'(0)=3(1-\ln 2)$;
3) $y''+4y=8ctg\ 2x,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$;
4) $y''-9y'+18y=9e^{3x}/(1+e^{-3x}),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;
5) $y''-3y'=9e^{-3x}/(3+e^{-3x}),\ y(0)=4\ln 4,\ y'(0)=3(3\ln 4-1)$;
6) $y''+6y'+8y=4e^{-2x}/(2+e^{2x}),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;
7) $y''+16y=16/\sin 4x,\ y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2\pi$;
8) $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}ctg\dfrac{x}{2};\ y(\pi)=2,\ y'(\pi)=\dfrac{1}{2}$;

9) $y'' - 3y' + 2y = 1/(3 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$;

10) $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

11) $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$;

12) $y'' + 4y = 16/\sin 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\pi$;

13) $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 3\ln 2$;

14) $y'' - 6y' + 8y = 4/(2 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$;

15) $y'' + 9y = 9/\sin 3x$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$;

16) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^{x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

17) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}/(1 + e^{-x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

18) $y'' + y' = e^{x}/(2 + e^{x})$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 9$;

19) $y'' + 16y = 16/\cos 4x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

20) $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\sin \pi x$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$;

21) $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x})$, $y(0) = 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$;

22) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

23) $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$;

24) $y'' + 4y = 4/\sin 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$;

25) $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^{x} + 1)$, $y(0) = 2\ln 2$, $y'(0) = -3\ln 2$;

26) $y'' + y = 1/\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

27) $y'' - 2y' + y = e^{x}/\sqrt{4 - x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

28) $y'' + 4y = 4/\cos 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

29) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$, $y(1) = e^{-2}$, $y'(1) = 2e^{-2}$;

30) $y'' + y = 4\,ctg\,x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

15. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $y'' - 2y' + 5y = 5\cos 2x$;

2) $y'' - 6y' + 13y = 2e^{3x}\cos 4x$;

3) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$;

4) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin x - 2\cos x)$;

5) $y'' + y = 2\sin x + 3\cos x$;

6) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\left(\sin 2x + \cos 2x\right)$;

7) $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\sin 2x$;

8) $y'' + 2y' + 10y = -e^{x}\cos 3x$;

9) $y'' + 4y = -\sin x + 2\cos x$;

10) $y'' + 9y = \sin 3x - 2\cos 3x$;

11) $y'' + 16y = 2\ \sin 4x$;

12) $y'' + 2y' + 26y = 5e^{-x}\cos 2x$;

13) $y'' - 8y' + 17y = 4e^{x}\sin x$;

14) $y'' - 2y' + y = -e^{x}\cos x$;

15) $y'' + y = (2\sin 4x - 3\cos 4x)e^{-x}$;

16) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{x}\sin x$;

17) $y'' + 8y' + 17y = e^{-4x}\cos 2x$;

18) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$;

19) $y'' + y' = e^{-x}\cos 5x + 4e^{-x}$;

20) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x$;

21) $y'' - 10y' + 26y = 5e^{x}(\cos 5x + \sin 5x)$;

22) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\sin 8x$;

23) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$;

24) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\cos x$;

25) $y'' + 4y = 8\sin 2x - 4\cos 2x$;

26) $y'' - 2y' + 10y = 3e^{x}\cos 3x$;

27) $y'' - 4y' + 8y = 3e^{2x}\cos x$;

28) $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$;

29) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$;

30) $y'' - 4y' + 13y = 4e^{2x}(\sin x - 2\cos x)$.

16. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $y'' + y = \sin x - 3\cos x + 2e^{x}$;
2) $y'' + 9y = 18ch3x - 18\cos 3x$;
3) $y'' - y = 3\sin x + 5\cos x + 4e^{x}$;
4) $y'' + 16y = 8\sin 4x - 16ch4x$;
5) $y'' - 2y' + 10y = 2shx + \cos 5x$;
6) $y'' + 81y = 3\sin 9x + \cos 9x + 54e^{9x}$;
7) $y'' + 4y' = 8sh4x + 16\cos 4x$;
8) $y'' - 36y = 36\sin 6x - 72e^{6x}$;
9) $y'' + 2y' + 17y = 4e^{-x}\cos 4x$;
10) $y'' + 3y' = 3ch3x + 9\sin 3x$;
11) $y'' - 49y = 14e^{7x} - 49(\sin 7x + \cos 4x)$;
12) $y'' + 9y' = 81e^{-9x} + 9\cos 9x$;
13) $y'' + 4y = 16\cos 2x - 4\sin 2x + 4e^{2x}$;
14) $y'' + 64y = 8(\sin 8x - \cos 8x) - 32e^{8x}$;
15) $y'' + 3y' = 2sh3x + 9\cos 3x$;
16) $y'' + 25y = 50e^{-5x} + 10\cos 5x$;
17) $y'' + y = 2chx + 4\sin x$;
18) $y'' + 36y = e^{-6x} + 12\cos 6x + 18\sin 6x$;
19) $y'' - 4y' + 5y = 2sh2x$;
20) $y'' - 36y = 36e^{-6x} + 6\cos 3x$;
21) $y'' + 4y = 2sh2x + 4\cos 2x$;
22) $y'' - 4y = 12e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$;
23) $y'' + 9y = 9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$;
24) $y'' - 64y = 32\cos 8x - 64e^{8x}$;
25) $y'' + 5y' = 50sh5x + \cos 5x$;
26) $y'' + 2y' = 2sh2x + \sin 2x$;
27) $y'' + 49y = 7\sin 7x + 14\cos 7x - 14e^{7x}$;
28) $y'' + 4y' + 13y = e^{-2x} + \cos 3x$;
29) $y'' - 3y' = e^{3x} - 6\sin 3x$;
30) $y'' + 25y = 10e^{5x} - 20\sin 5x$.

Тема 7: Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

Застосуємо методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь вищих порядків. Не зупиняючись детально на теорії, сформулюємо необхідні твердження і розглянемо приклади.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \qquad (89)$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – дійсні числа.

Характеристичним для рівняння (89) називається алгебраїчне рівняння n-го степеня виду

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0, \qquad (90)$$

де k – невідоме дійсне чи комплексне число.

Як відомо, рівняння (90) має n коренів. Позначимо ці корені через $k_1, k_2, ..., k_n$.

Теорема. *Кожному простому кореню k рівняння (90) відповідає частинний розв'язок e^{kx} рівняння (89), а кожному кореню k кратності $m > 1$ відповідає m частинних розв'язків виду $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$.*

Кожній парі $\alpha \pm \beta i$ простих комплексно-спряжених коренів рівняння (90) відповідає два частинних розв'язки $e^{\alpha x}\sin\beta x$ та $e^{\alpha x}\cos\beta x$ рівняння (89), а кожній парі $\alpha \pm \beta i$ комплексно-спряжених коренів кратності $p > 1$ відповідає $2p$ частинних розв'язків виду

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ ...,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ ...,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Загальна сума кратностей всіх коренів рівняння (90) дорівнює n, тому кількість всіх частинних розв'язків рівняння (89), складених згідно з цією теоремою, дорівнює n, тобто збігається з порядком рівняння (89). Позначимо ці частинні розв'язки через $y_1, y_2, ... y_n$. Можна показати, що знайдені частинні розв'язки є лінійно незалежними, тому загальний розв'язок рівняння (89) знаходиться за формулою

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n. \qquad (91)$$

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати рівняння $y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^5 + 4k^3 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = k_3 = 0,\ k_4 = 2i,\ k_5 = -2i$. Згідно з теоремою маємо частинні розв'язки: $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$, $y_4 = \cos 2x, y_5 = \sin 2x$. Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо за формулою $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

Задача 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0;\ k^2\left(k-1\right) + 4\left(k-1\right) = 0;$$

$$\left(k-1\right)\left(k^2+4\right) = 0;\ k_1 = 1;\quad k_{2,3} = \pm 2i.$$

Згідно з теоремою маємо такі частинні розв'язки:

$$y_1 = e^x,\quad y_2 = \cos 2x,\quad y_3 = \sin 2x.$$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Задача 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0.$

Розв'язання. Знайдемо корені характеристичного рівняння $k^4 - 8k^2 + 16 = 0.$

Записавши його у вигляді $(k^2 - 4)^2 = 0,$ отримаємо:

$k_{1,2} = \pm 2;\ k_{3,4} = \pm 2.$ Частинні розв'язки заданого диференціального рівняння мають вигляд: $y_1 = e^{2x},\ y_2 = xe^{2x},\ y_3 = e^{-2x}, y_n = xe^{-2x}.$

Загальний розв’язок цього рівняння визначається формулою:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}.$$

Задача 4. Знайти загальний розв’язок рівняння $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$k^4 + 18k^2 + 81 = 0;\ \left(k^2 + 9\right)^2 = 0;\quad k_{1,2} = \pm 3i;\ k_{3,4} = \pm 3i.$$

Згідно з наведеним правилом отримаємо наступні частинні розв’язки диференціального рівняння:

$$y_1 = \cos 3x,\ y_2 = x\cos 3x,\ y_3 = \sin 3x,\ \ y_4 = x\sin 3x.$$

Загальний розв’язок заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 x\cos 3x + C_3 sm 3x + C_4 x\sin 3x.$$

Задача 5. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені $k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0$.

Шляхом безпосередньої підстановки у рівняння переконуємося, що $k_1 = 1$ є коренем цього рівняння. Ліву частину характеристичного рівняння розкладемо на множники:

$$k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = k^3 - k^2 - 3k^2 + 3k + 2k - 2 =$$

$$= k^2\left(k-1\right) - 3k\left(k-1\right) + 2\left(k-1\right) =$$

$$= \left(k-1\right)\left(k^2 - 3k + 2\right) = \left(k-1\right)^2\left(k-2\right).$$

Отримаємо: $k_1 = k_2 = 1;\ \ k_3 = 2$.

Частинні розв’язки диференціального рівняння мають вигляд: $y_2 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = e^{2x}$.

Загальний розв’язок цього рівняння $y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right) + C_3 e^{2x}$.

Задача 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^4 + 4k^3 + 10k^2 + 12k + 5 = 0.$ Легко перевірити, що $k_1 = -1$ є коренем цього рівняння. Ліву частину характеристичного рівняння запишемо у вигляді:

$$k^4 + k^3 + 3k^3 + 3k^2 + 7k^2 + 7k + 5k + 5 =$$

$$= k^3(k+1) + 3k^2(k+1) + 7k(k+1) + 5(k+1) = (k+1)\left(k^3 + 3k^2 + 7k + 5\right) =$$

$$= (k+1)\left(k^2(k+1) + 2k(k+1) + 5(k+1)\right) = (k+1)^2\left(k^2 + 2k + 5\right).$$

Отже, характеристичне рівняння набуває вигляду:

$$(k+1)^2\left(k^2 + 2k + 5\right) = 0.$$

Звідси отримуємо: $k_1 = k_2 = -1; \quad k_{3,4} = -1 \pm 2i$.

Згідно з правилом маємо наступні частинні розв'язки диференціального рівняння: $y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x},\ y_3 = e^{-x}\cos 2x, \quad y_4 = e^{-x}\sin 2x.$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y = e^{-x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{-x}\left(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x\right).$$

Завдання для самостійної роботи

17. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$;
2) $y''' + y'' + y' + y = 0$;
3) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$;
4) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$;
5) $y''' - 5y'' + 3y + 9y = 0$;
6) $y^{IV} - 16y = 0$;
7) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$;

8) $y''' - y = 0$;

9) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$;

10) $y^{IV} + y' = 0$;

11) $y''' + y = 0$;

12) $y''' + y'' + 9y' + 9y = 0$;

13) $y''' - y'' - y' + y = 0$;

14) $y^{IV} + 9y'' = 0$;

15) $y^{IV} - y' = 0$;

16) $y^{IV} + 4y = 0$;

17) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$;

18) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$;

19) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$;

20) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$;

21) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$;

22) $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$;

23) $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$;

24) $y^{IV} + 4y'' + 4y = 0$;

25) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$;

26) $y^{IV} - y = 0$;

27) $4y''' - 8y'' + 5y' = 0$;

28) $4y''' + 4y'' + y' = 0$;

29) $y''' - 3y' + 2y = 0$;

30) $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Нехай тепер задано неоднорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (92)$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – неперервна на деякому проміжку функція.

Як і для рівнянь другого порядку, загальним розв’язком рівняння (92) є функція

$$y = \overline{y}(x) + y^*(x),$$

де $\overline{y}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (89), а $y^*(x)$ – частинний розв'язок рівняння (92).

Побудову загального розв'язку $\overline{y}(x)$ рівняння (89) з'ясовано. Проаналізуємо знаходження частинного розв'язку $y^*(x)$. Якщо права частина $f(x)$ рівняння (92) є функцією спеціального виду (85), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати за формулою (86). Якщо права частина $f(x)$ не є функцією виду (85), то для знаходження $y^*(x)$ застосовують метод варіації довільних сталих. Стосовно рівняння (92) суть цього методу така.

Нехай функція (91) є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (89). Знаходимо частинний розв'язок рівняння (92) за тією ж формулою (91), вважаючи, що величини $C_1, C_2, ..., C_n$ – функції від x, тобто покладемо

$$y^*(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n, \qquad (93)$$

де $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ – невідомі функції.

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0, \\ .... \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + ... + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + ... + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо похідні $C_i'(x)$, $i = 1, 2, ..., n$, а потім інтегруванням і самі функції $C_i(x)$. Якщо взяти всі сталі інтегрування рівними нулю і підставити функції $C_i(x)$ в рівність (93), то матимемо частинний розв'язок рівняння (92); якщо у рівність (93) підставити функції $C_i(x) + \overline{C}_i$, де $\overline{C}_i$ – довільні сталі, то відразу одержимо загальний розв'язок.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$.

Розв'язання. Маємо неоднорідне лінійне рівняння третього порядку. Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 + k = 0$ має корені $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\overline{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x$. Правою частиною даного рівняння є функція виду (87), де $A = B = 4, \beta = 1$. Оскільки число $1 \cdot i = i$ не є коренем характеристичного рівняння ($r = 0$), то окремий розв'язок шукаємо у вигляді (88):

$$y^* = a\cos x + b\sin x,$$

де a, b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ і підставивши їх у дане рівняння, після спрощень отримаємо

$$2a\cos x + 2b\sin x = 4\cos x + 4\sin x,$$

звідки $a = b = 2$, тому $y^* = 2\cos x + 2\sin x$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння, а $y = \overline{y} + y^* = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + 2(\sin x + \cos x)$ – загальний розв'язок. Продиференціювавши його двічі, знайдемо

$$y' = \left(C_2 + C_3(1 + x)\right)e^x + 2(-\sin x + \cos x);$$

$$y'' = \left(C_2 + C_3(2 + x)\right)e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Скориставшись початковими умовами $y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2, \\ C_2 + C_3 + 2 = 2, \\ C_2 + 2C_3 - 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд $y = 1 + (x - 1)e^x + 2(\cos x + \sin x)$.

Задача 2. *(Задача про биття вала.)* Для швидкого обертання тонкого і довгого вала характерне, як показує досвід, таке явище: при збільшенні кутової швидкості ω вона досягає такого значення $\omega = \omega_1$, при якому вал не зберігає прямолінійної форми, а починає, як кажуть, бити; якщо і далі збільшувати швидкість $\omega > \omega_1$, то биття спочатку припиняється, а потім знову виникає при $\omega = \omega_2 > \omega_1$ тощо. Швидкості $\omega_1, \omega_2, \ldots$ називають критичними швидкостями обертання вала. Обчислити ці швидкості.

Розв'язання. Відомо, що величина y прогину вала, закріпленого в точках $x = 0$ і $x = l$, задовольняє рівняння

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P\omega^2}{g}y,$$

де E – коефіцієнт пружності; I – момент інерції поперечного перерізу вала; P – вага одиниці довжини вала і g – прискорення сили тяжіння.

Поклавши $q = \sqrt[4]{\dfrac{P\omega^2}{gEI}}$, отримаємо рівняння $y^{IV} - q^4 y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^4 - q^4 = 0$ має корені $\pm q, \pm qi$, тому загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \cos qx + C_4 \sin qx.$$

На кінцях вал закріплено, тому маємо початкові умови

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

які приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0; \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \cos ql + C_4 \sin ql = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \cos ql - C_4 \sin ql = 0. \end{cases}$$

Розв'язок $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ цієї системи відповідає випадку, коли вал зберігає прямолінійну форму: $y = 0$.

Знайдемо тепер ті значення q, для яких система рівнянь має ненульові розв'язки. З перших двох рівнянь маємо $C_1 = -C_2, C_3 = 0$. Підставляючи ці значений в останні два рівняння, отримуємо $C_1 = C_2 = C_3 = 0,\ C_4 \sin ql = 0$. Оскільки $C_4 \neq 0$, то $\sin ql = 0$, звідки $q = \dfrac{\pi n}{l},\ n \in N$.

Скориставшись значенням q, знайдемо шукані критичні швидкості:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{P}},\ n \in N.$$

Задача 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$k^3 + k = 0,\ k\left(k^2 + 1\right) = 0,\ k_1 = 0,\ k_{2,3} = \pm i.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\overline{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x.$$

Похідні $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x)$ визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = f(x). \end{cases}$$

Для даної задачі

$y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$;

$y_1' = 0,\ y_2' = -\sin x,\ y_3' = \cos x$;

$y_1'' = 0,\ y_2'' = -\cos x,\ y_3'' = -\sin x$.

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0, \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0, \\ -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера: $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\; C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\; C_3'(x) = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Отже, $C_1'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x},\; C_2'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x},\; C_3'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$

$$C_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \overline{C}_1;$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + \overline{C}_2;$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - tgx + \overline{C}_3.$$

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y = \frac{1}{\cos x} + \overline{C}_1 + \left(\ln|\cos x| + \overline{C}_2\right)\cos x + \left(x - tgx + \overline{C}_3\right)\sin x \text{ або}$$

$$y = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cos x + \overline{C}_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln|\cos x| + (x - tgx)\sin x.$$

Завдання для самостійної роботи

18. Розв'язати диференціальні рівняння.

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;
2) $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$;
3) $y''' - y' = x^2 + x$;
4) $y''' - y'' = 6x + 5$;
5) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$;
6) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$;
7) $y''' + y'' = 5x^2 - 1$;
8) $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = x - 3$;
9) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$;
10) $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$;
11) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;
12) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$;
13) $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$;
14) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$;
15) $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$;
16) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$;
17) $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$;
18) $y^{IV} + y''' = 12x + 6$;
19) $y''' + 13y'' + 12y' = x + 1$;
20) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 4x^2$;

21) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$;

22) $y^{IV} + y'' = x^2 + x$;

23) $4y'' - y = x^3 - 24x$;

24) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;

25) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$;

26) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$;

27) $y''' + y'' = 6x$;

28) $y'' + 9y = 18x^2 - 9x - 5$;

29) $y''' + 4y' = 8x - 12x^2$;

30) $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

19. Розв’язати диференціальні рівняння.

1) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = \left(16x + 20\right) e^x$;

2) $y''' - y'' - 5y' - 3y = \left(8x + 4\right) e^x$;

3) $y''' + 6y'' + 9y' = \left(2x + 3\right) e^{-x}$;

4) $y''' + y'' - 6y' = \left(10x + 7\right) e^{2x}$;

5) $y''' + 4y'' + 3y' = \left(1 - x\right) e^{-x}$;

6) $y''' + 2y'' - 3y' = \left(4x + 3\right) e^x$;

7) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = \left(3 - 2x\right) e^x$;

8) $y''' - 2y'' - 3y' = (4x - 7)e^{-x}$;

9) $y''' - 4y'' + 3y' = 4x\, e^x$;

10) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = \left(5 - 4x\right) e^{-x}$;

11) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = \left(x - 1\right) e^{-x}$;

12) $y''' - 4y'' + 3y' = -2xe^x$;

13) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (3x + 4)e^x$;

14) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$;

15) $y''' - 3y'' - y' + 3y = (1 - 2x)e^x$;

16) $y''' - y'' - 4y' + 4y = (5 - 4x)e^x$;

17) $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$;

18) $y''' + 4y'' + 4y' = (3x + 5)e^x$;

19) $y''' - y'' - 9y' + 9y = (3-4x)e^{x}$;

20) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (x+2)e^{-x}$;

21) $y''' - 6y'' + 11y' - 6 = xe^{-x}$;

22) $y''' - y'' - y' + y = (3x+7)e^{2x}$;

23) $y''' - 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{x}$;

24) $y''' - 2y'' + y' = (2x+5)e^{2x}$;

25) $y''' - 3y' - 2y = -4xe^{x}$;

26) $y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^{x}$;

27) $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^{x}$;

28) $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$;

29) $y''' - 3y'' + 2y' = (2x+1)e^{-x}$;

30) $y''' - 3y'' + 4y = (18x-21)e^{-x}$.

Тема 8: Застосування Лінійних диференціальних рівнянь до вивчення коливних явищ.

Задача 1. Маятник, довжина якого l і маса m, відхилений від положення рівноваги на деякий малий кут θ_0. Знайти закон коливання маятника і період коливання в припущенні, що опір середовища відсутній.

Розв'язання. Нехай за час t маятник відхилений від положення рівноваги на кут $\theta(t)$, пройшовши по дузі кола з радіусом l шлях $s(t)$. Маятник рухається під дією сили $\vec{f}$, модуль якої $\left|\vec{f}\right| = mg\sin\theta$. Диференціальне рівняння, яке описує рух даного маятника, має вигляд:

$m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$, тобто $\dfrac{d^2s}{dt^2} + g\sin\theta = 0$, де g – прискорення сили тяжіння.

Оскільки $s = l\theta$, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, $\sin\theta \approx \theta$ то рівняння набуває вигляду:

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$. Початкові умови даної задачі такі: $\theta\big|_{t=0} = \theta_0$, $\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

Отримане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + \dfrac{g}{l} = 0.$ Оскільки $\dfrac{g}{l} > 0$, то отримаємо: $k_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,i$.

Загальний розв'язок одержаного диференціального рівняння

$$\theta(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Задовольнивши початкові умови, знайдемо довільні сталі C_1 та C_2.

$$\theta'(t) = -C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Для визначення C_1 та C_2 отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \theta_0 = C_1, \\ 0 = C_2\sqrt{\dfrac{g}{l}}. \end{cases}$$ Отже, $C_1 = \theta_0$, $C_2 = 0$.

Коливання маятника відбувається за законом $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$.

Знайдемо період коливання T:

$$\theta(t+T) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}(t+T)\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \sqrt{\frac{g}{l}}T\right);$$

$\theta(t+T) \equiv \theta(t)$ за умови, що $\sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi.$

Отже, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$

Задача 2. Розв’язати задачу 1, враховуючи опір повітря, який пропорційний до швидкості руху маятника.

Розв’язання. Модуль сили опору дорівнює $\lambda\frac{ds}{dt}$, де λ – коефіцієнт пропорційності, $\lambda > 0$.

Рух маятника в цьому випадку описується диференціальним рівнянням $m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta - \lambda\frac{ds}{dt}$, тобто $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{ds}{dt} + g\sin\theta = 0$.

Після перетворень це рівняння матиме вигляд: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + \frac{\lambda}{m}k + \frac{g}{l} = 0.$$

Корені цього рівняння: $k_{1,2} = -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{g}{l}}.$

Маятник буде здійснювати коливання за умови: $\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{g}{l} < 0$.

Позначимо: $\frac{g}{l} - \frac{\lambda^2}{4m^2} = a^2$.

Тоді корені характеристичного рівняння мають вигляд: $k_{1,2} = -\frac{\lambda}{2m} \pm ai.$

Загальний розв'язок отриманого лінійного однорідного диференціального рівняння

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda t}{2m}} \left(C_1 \cos at + C_2 \sin at \right).$$

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє задані початкові умови.

$$\theta'(t) = -\frac{\lambda}{2m} e^{-\frac{\lambda t}{2m}} \left(C_1 \cos at + C_2 a \cos at \right) + e^{-\frac{\lambda t}{2m}} \left(-C_1 a \sin at + C_2 a \cos at \right).$$

$$\begin{cases} \theta_0 = C_1, \\ 0 = -\frac{\lambda}{2m} C_1 + aC_2. \end{cases}$$

Отже, $C_1 = \theta_0$, $C_2 = \frac{\lambda \theta_0}{2ma}$.

Коливання маятника в цьому випадку відбувається за законом:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\lambda t}{2m}} \left(\cos at + \frac{\lambda}{2ma} \sin at \right), \text{ де } a = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\lambda}{4m^2}}.$$

Період коливання $T = \frac{2\pi}{a}$.

Задача 3. Визначити закон руху матеріальної точки з масою m, що рухається по прямій під дією сили $\vec{F}$, яка напрямлена до початку відрахунку переміщень і модуль якої пропорційний відстані точки від початку відрахунку, якщо опір середовища відсутній, але на точку діє зовнішня сила, модуль якої $\left|\vec{F}_1\right| = A \sin wt$.

Розв'язання. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі Ox і в момент часу t її відстань від початку координат дорівнює $x(t)$.

Оскільки $\left|\vec{F}\right| = ax,$ де a- коефіцієнт пропорційності, $a > 0$, то рух матеріальної точки описується диференціальним рівнянням $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -ax + A\sin wt$, тобто $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{a}{m}x = \dfrac{A}{m}\sin wt.$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + \dfrac{a}{m} = 0.$

Оскільки $\dfrac{a}{m} > 0$, то корені цього рівняння $k_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a}{m}}\,i$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$\overline{x}(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t\right).$$

Загальний розв'язок отриманого неоднорідного рівняння $x(t) = \overline{x}(t) + x^*(t).$

Розглянемо два випадки:

1) $w \neq \sqrt{\dfrac{a}{m}}$.

В цьому випадку частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$x^*(t) = B\cos wt + C\sin wt,$ де B, C – сталі величини, які потрібно визначити.

$$\left(x^*\right)' = -Bw\sin wt + Cw\cos wt,$$

$$\left(x^*\right)'' = -Bw^2\cos wt - Cw^2\sin wt .$$

Підставляючи вирази для x^* та $\left(x^*\right)''$ в одержане неоднорідне диференціальне рівняння, отримаємо:

$$-Bw^2\cos wt - cw^2\sin wt + \frac{a}{m}B\cos wt + \frac{a}{m}C\sin wt = \frac{A}{m}\sin wt\,.$$

Звідси: $\begin{cases} C\left(\dfrac{a}{m} - w^2\right) = \dfrac{A}{m}, \\ B\left(\dfrac{a}{m} - w^2\right) = 0, \end{cases}$

тобто $B = 0, \quad C = \dfrac{A}{a - mw^2}\,.$

Отже $x^*(t) = \dfrac{A}{a - mw^2}\sin wt\,.$

В цьому випадку матеріальна точка рухається за законом:

$$x(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t\right) + \frac{A}{a - mw^2}\sin wt\,.$$

2) $w = \sqrt{\dfrac{a}{m}}\,.$

В цьому випадку частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді: $x^*(t) = (b\cos wt + c\sin wt)t\,.$

$$\left(x^*\right)' = b\cos wt + c\sin wt + (-bw\sin wt + cw\cos wt)t\,;$$

$$\left(x^*\right)'' = 2(-bw\sin wt + cw\cos wt) + \left(-bw^2\cos wt - cw^2\sin wt\right)t\,.$$

Підставивши вирази для $x^*(t)$та $\left(x^*(f)\right)''$ в неоднорідне диференціальне рівняння, одержимо:

$$-2bw\sin wt + 2c\cos wt + \left(-bw^2\cos wt - cw^2\sin wt\right)t + w^2(b\cos wt + c\sin wt)t = \frac{A}{m}\sin wt$$

звідки

$$-2bw\sin wt + 2cw\cos wt = \frac{A}{m}\sin wt.$$

Отже, $-2bw = \dfrac{A}{m}, \quad 2cw = 0,$ тобто $b = -\dfrac{A}{2mw}, \;\; c = 0.$

Матеріальна точка в цьому випадку рухається за законом:

$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{a}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}t\right) - \frac{At}{2\sqrt{ma}}\cos\left(\sqrt{\frac{a}{m}}t\right)$, де C_1 та C_2 – довільні сталі, які визначаються з початкових умов.

Тема 9: Системи диференціальних рівнянь

У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знайти не одну, а зразу декілька невідомих функцій, які пов'язані між собою кількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Приклади

1. Нехай матеріальна точка маси m має криволінійну траєкторію руху в просторі. Потрібно визначити закон руху точки, тобто залежність координат x, y, z від часу t, коли на неї діє сила $\vec{F}$.

Якщо $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x; y; z)$ – радіус-вектор рухомої точки, то її швидкість і прискорення знаходяться за формулами:

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = (x'; y'; z'),\ \vec{w} = \vec{r}''(t) = (x''; y''; z'').$$

Сила $\vec{F}$, під дією якої рухається точка, взагалі кажучи, є функцією часу, координат точки і проекцій швидкості на осі координат: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}')$. Тому згідно з другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\vec{r}'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}').$$

Це векторне рівняння еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' = F_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' = F_z(t, x, y, z, x', y', z'). \end{cases}$$

Наведені диференціальні рівняння утворюють систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох невідомих функцій $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

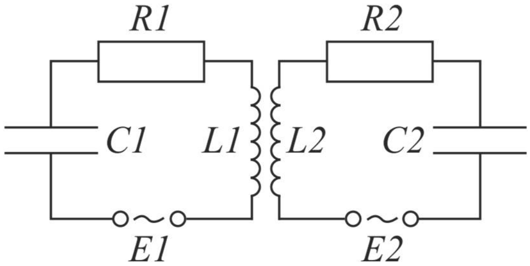

Рис. 12

2. Розглянемо два електричних контури. Припустимо, що ці контури знаходяться в електромагнітному зв'язку: зміна струму в одному контурі індукує електрорушійну силу в другому (рис. 12).

Із курсу фізики відомо, що за певних умов індукована напруга в першому контурі дорівнює $-a\dfrac{di_2}{dt}$, а в другому $-a\dfrac{di_1}{dt}$, де a – коефіцієнт взаємної індуктивності, $i_1 = i_1(t), i_2 = i_2(t)$ – сила струму відповідно в першому і другому контурах. Якщо в обох контурах відсутня зовнішня електрорушійна сила, то зміна струму в контурах регулюватиметься диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} L_1 i_1' + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_0^t i_1 dt + a i_2' = 0; \\ L_2 i_2' + R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_0^t i_2 dt + a i_1' = 0, \end{cases}$$

або, після диференціювання по t,

$$\begin{cases} L_1 i_1'' + R_1 i_1' + \dfrac{1}{C_1} i_1 + a i_2'' = 0; \\ L_2 i_2'' + R_2 i_2' + \dfrac{1}{C_2} i_2 + a i_1'' = 0. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами відносно двох невідомих функцій $i_1(t)$ та $i_2(t)$.

Розглянемо деякі найпростіші системи диференціальних рівнянь. У цьому параграфі незалежну змінну позначатимемо буквою t, а невідомі функції – через $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, або (якщо їх не більше трьох) через $x(t), y(t), z(t)$.

9.1. Нормальні системи рівнянь

Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \qquad (94)$$

або

$$x_k' = f_k\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right),\ k = 1, 2, ..., n.$$

Іншими словами, якщо в лівій частині рівнянь системи стоять похідні першого порядку, а праві частини рівнянь зовсім не містять похідних, то така система називається нормальною. Розв'язком системи (94) називається сукупність функцій $x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)$, які задовольняють кожне з рівнянь цієї системи.

Важливість вивчення саме нормальної системи випливає з того, що до неї в багатьох випадках зводяться системи і рівняння вищих порядків. Наприклад, система другого порядку

$$\begin{cases} x'' = 2x' + y' - x + y; \\ \quad y'' = y' + x \end{cases}$$

введенням нових змінних $x' = u, y' = v, x'' = u', y'' = v'$ зводиться до нормальної системи

$$\begin{cases} \quad x' = u; \\ \quad y' = v; \\ u' = 2u + v - x + y; \\ \quad v' = v + x. \end{cases}$$

Таким самим способом – введенням нових змінних – будь-яке диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, зводиться до еквівалентної нормальної системи n рівнянь першого порядку.

Справді, нехай задано рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\right).$$

Покладемо

$$y = x_1, y' = x_2, ..., y^{(n-1)} = x_n,$$

тоді

$$y' = x_1' = x_2, y'' = x_2' = x_3, ..., y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n, y^{(n)} = x_n'.$$

Отримали нормальну систему

$$x_i' = x_{i+1},\ i = 1, 2, ..., n-1;\ x_n' = f\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

еквівалентну заданому рівнянню.

Покажемо, що можливий і зворотний перехід: нормальну систему рівнянь можна замінити одним рівнянням, порядок якого дорівнює числу рівнянь системи. Нехай задана нормальна система (94). Продиференціюємо по t будь-яке, наприклад, перше рівняння:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+...+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $x_1', x_2', ..., x_n'$ з системи (94), отримаємо

$$x_1''=F_2\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right).$$

Аналогічно знаходимо похідні до n-го порядку включно:

$$x_1'''=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+...+\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}=F_3\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right),$$

…………………………..

$$x_1^{(n)}=F_n\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right).$$

Одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1'=f_1\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right), \\ x_1''=F_2\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right), \\ .... \\ x_1^{(n)}=F_n\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right). \end{cases} \tag{95}$$

Якщо з перших $n-1$ рівнянь системи (95) знайти (коли це можливо) змінні

$$\begin{aligned} &x_2=\varphi_2\left(t,x_1,x_1',...,x_1^{(n-1)}\right), \\ &x_3=\varphi_3\left(t,x_1,x_1',...,x_1^{(n-1)}\right), \\ &....................................... \\ &x_n=\varphi_n\left(t,x_1,x_1',...,x_1^{(n-1)}\right) \end{aligned} \tag{96}$$

і підставити їхні значення в останнє рівняння, то одержимо рівняння n-го порядку відносно змінної x_1:

$$x_1^{(n)} = \Phi\left(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(n-1)}\right). \qquad (97)$$

Нехай

$$x_1 = \psi_1\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right), \qquad (98)$$

(де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі) – розв’язок рівняння (97). Продиференціювавши його $n-1$ разів і підставивши значення похідних $x_1', x_1'', ..., x_1^{(n-1)}$ в рівняння (96), будемо мати

$$\begin{cases} x_2 = \psi_2\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ x_3 = \psi_3\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \psi_n\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right). \end{cases} \qquad (99)$$

Можна довести, що сукупність функцій (98), (99) буде загальним розв’язком системи (95).

Для нормальної системи (95) справджується теорема Коші про існування і єдиність розв’язку: *якщо в деякій області* G *функції* $f_k\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $k = 1, 2, ..., n$, *системи (95) неперервні разом з усіма своїми похідними* $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$, $i, k = 1, 2, ..., n$, *то для будь-якої точки* $\left(t_0, x_{10}, ..., x_{n0}\right) \in G$ *існує єдиний розв'язок* $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, *який задовольняє початкові умови:*

$$x_1\left(t_0\right) = x_{10},\ x_2\left(t_0\right) = x_{20},\ ...,\ x_n\left(t_0\right) = x_{n0}.$$

Для інтегрування системи (95) можна застосувати метод, за допомогою якого ця система була зведена до рівняння (97). Цей метод називають методом виключення змінних.

Розв’язування типових задач

Задача 1. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$

Розв’язання. Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Підставимо в це рівняння значення похідної y' із другого рівняння системи:

$$x'' = -7x' + \left(-2x - 5y\right).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y = x' + 7x$ і підставивши його в знайдене рівняння, отримаємо

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Маємо лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Інтегруючи його, одержуємо

$$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Оскільки $y = x' + 7x$, то

$$y = -6e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-6t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right) +$$

$$+7e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) = e^{-6t}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t\right).$$

Отже, загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right),$$

$$y = e^{-6t}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t\right).$$

Задача 2. Розв’язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - 3y = 3t^2. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо задану систему у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y + 3t^2. \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння по $t: x'' = -2x' + 4y'$. Підставимо в це рівняння значення похідної y' з другого рівняння системи:

$$x'' = -2x' + 4\left(-x + 3y + 3t^2\right).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y = \frac{1}{4}\left(x' + 2x\right)$і підставивши його в отримане рівняння, одержимо: $x'' - x' - 2x = 12t^2$.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його загальний розв'язок $x(t) = \overline{x}(t) + x^*(t)$, де $\overline{x}(t)$- загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $x^*(t)$ – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Оскільки корені характеристичного рівняння $k^2 - k - 2 = 0$ дійсні та різні: $k_1 = -1, k_2 = 2,$ то $\overline{x}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$x^*(t) = At^2 + Bt + c,$ звідки $\left(x^*\right)' = 2At + B,$ $\left(x^*\right) = 2A.$ Підставляючи ці вирази у задане рівняння, отримуємо:

$$2A - 2At - B - 2At^2 - 2Bt - 2C = 12t^2$$

або $-2At^2 - \left(2A + 2B\right)t + 2A - B - 2C = 12t^2$.

Коефіцієнти A, B, C знаходимо зі системи:

$$\begin{cases} -2A = 12, \\ 2A + 2B = 0, \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$$

Отже, $A = -6,$ $B = 6,$ $C = -9.$

Остаточно отримаємо: $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 6t^2 + 6t - 9.$

Оскільки $y(t) = \frac{1}{4}\left(x' + 2x\right),$ то

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(-C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 12t + 6 + 2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 12t^2 + 12t - 18\right)$$ або

$$y(t)=\frac{1}{4}C_1e^{-t}+C_2e^{2t}-3t^2-3.$$

Таким чином, загальний розв'язок даної системи має вигляд:

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}-6t^2+6t-9, \qquad y(t)=\frac{1}{4}C_1e^{-t}+C_2e^{2t}-3t^2-3.$$

Задача 3. Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x-y+\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+2y+\cos t, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови: $x(\pi)=1,\ \ y(\pi)=2.$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок цієї системи. Продиференціюємо перше рівняння по $t: x''=-2x'-y'+\cos t$ і підставимо в це рівняння значення похідної y' з другого рівняння:

$$x''=-2x'-4x-2y-\cos t+\cos t.$$

Оскільки $y=-x'-2x+\sin t,$ то одержимо рівняння:

$x''=-2x'-4x+2x'+4x-2\sin t$ або $x''=-2\sin t.$

Інтегруючи двічі обидві частини цього рівняння, отримаємо його загальний розв'язок: $x(t)=C_1t+C_2+2\sin t.$

Використавши формулу $y=-x'-2x+\sin t,$ знайдемо:

$$y(t)=-C_1-2\cos t-2C_1t-2C_2-4\sin t$$

або $y(t)=-C_1(2t+1)-2C_2-3\sin t-2\cos t.$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x(t)=C_1t+C_2+2\sin t,$$

$$y(t)=-C_1(2t+1)-2C_2-3\sin t-2\cos t.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо значення сталих C_1 та C_2. Для визначення C_1 та C_2. отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2 = 1, \\ -C_1(2\pi+1) - 2C_2 + 2 = 2, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} C_1\pi + C_2 = 1, \\ C_1(2\pi+1) + 2C_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$C_1 = -2, \qquad C_2 = 2\pi + 1.$

Підставляючи ці значення в загальний розв'язок системи, одержимо шуканий частинний розв'язок цієї системи, який задовольняє задані початкові умови:

$x(t) = -2t + 2\pi + 1 + 2\sin t$, $\quad y(t) = 2(2t+1) - 2(2\pi+1) - 3\sin t - 2\cos t,$ або після деяких спрощень:

$$x(t) = 2(\pi - t) + 2\sin t + 1,$$
$$y(t) = 4(t - \pi) - 3\sin t - 2\cos t.$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо по t перше рівняння і замінюємо похідні y' i z' їхніми виразами з другого та третього рівнянь:

$$x'' = -x' + y' + z';$$
$$x'' = -x' + x - y + z + x + y + z,$$
$$x'' = -x' + 2x + 2z.$$

Отримане рівняння знову диференціюємо по $t : x''' = -x'' + 2x' + 2z'$ і замінюємо z' його виразом з третього рівняння.

Одержимо рівняння: $x''' = -x'' + 2x' + 2x + 2y + 2z.$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ x'' = -x' + 2x + 2z \end{cases}$$ виражаємо y та z через x, x', x'':

$$y = \frac{1}{2}\left(-x'' + x' + 4x\right), \quad z = \frac{1}{2}\left(x'' + x' - 2x\right).$$

Підставляючи одержані вирази у попереднє рівняння, отримаємо:

$x''' = -x'' + 2x' + 2x - x'' + x' + 4x + x'' + x' - 2x,$ тобто $x''' + x'' - 4x' - 4x = 0.$

Знаходимо корені характеристичного рівняння $k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0.$

$k^2\left(k+1\right) - 4\left(k+1\right) = 0; \quad \left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k-2\right) = 0;$

$k_1 = -1, \; k_2 = -2, \quad k_3 = 2.$

Отже, $x\left(t\right) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}.$

Оскільки $y = \frac{1}{2}\left(-x'' + x' + 4x\right),$ то одержимо:

$$y\left(t\right) = \frac{1}{2}\Big(-C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-2t} - 4C_3 e^{2t} - C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} +$$

$$+2C_3 e^{2t} + 4C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} + 4C_3 e^{2t}\Big).$$

тобто $y\left(t\right) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}.$

Аналогічно, $z\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(x'' + x' - 2x\right) =$

$$= \frac{1}{2}\Big(C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} + 4C_3 e^{2t} - C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{2t} - 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} - 2C_3 e^{2t}\Big),$$

тобто $z\left(t\right) = -C_1 e^{-t} + 2C_3 e^{2t}.$

Отже, загальний розв’язок заданої системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$x\left(t\right) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t},$$
$$y\left(t\right) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t},$$
$$z\left(t\right) = -C_1 e^{-t} + 2C_3 e^{2t}.$$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} 6\dfrac{dx}{dt} - x - 7y + 5z = 10e^t, \\ 2\dfrac{dy}{dt} + x + y - z = 0, \\ 3\dfrac{dz}{dt} - x + 2y - z = e^t. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо задану систему у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{6}\left(x + 7y - 5z + 10e^t\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(-x - y + z\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{3}\left(x - 2y + z + e^t\right). \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння по t і замінимо похідні $\dfrac{dy}{dt}$ та $\dfrac{dz}{dt}$ їхніми виразами з другого і третього рівнянь:

$$x'' = \frac{1}{6}\left(x' + 7y' - 5z' + 10e^t\right);$$

$$x'' = \frac{1}{6}\left(x' + \frac{7}{2}\left(-x - y + z\right) - \frac{5}{3}\left(x - 2y + z + e^t\right) + 10e^t\right);$$

$$x'' = \frac{1}{6}x' - \frac{31}{36}x - \frac{1}{36}y + \frac{11}{36}z + \frac{25}{18}e^t.$$

Отримане рівняння ще раз продиференцюємо по t і знову замінимо y' та z' їхніми виразами з другого і третього рівнянь:

$$x''' = \frac{1}{6}x'' - \frac{31}{36}x' - \frac{1}{36}y' + \frac{11}{36}z' + \frac{25}{18}e^t;$$

$$x''' = \frac{1}{6}x'' - \frac{31}{36}x' - \frac{1}{72}\left(-x - y + z\right) + \frac{11}{108}\left(x - 2y + z + e^t\right) + \frac{25}{18}e^t;$$

$$x''' = \frac{1}{6}x'' - \frac{31}{36}x' + \frac{25}{216}x - \frac{41}{216}y + \frac{19}{216}z + \frac{161}{108}e^t.$$

Із системи рівнянь

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{6}\left(x + 7y - 5z + 10e^t\right), \\ x'' = \frac{1}{6}x' - \frac{31}{36}x - \frac{1}{36}y + \frac{11}{36}z + \frac{25}{18}e^t \end{cases}$$

Виразимо y та z через t, x, x', x'':

$$y = \frac{5}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + 2x - 5e^t,$$
$$z = \frac{7}{2}x'' - \frac{1}{2}x' + 3x - 5e^t.$$

Підставляючи ці вирази в попереднє рівняння, одержимо:

$$x''' = \frac{1}{6}x'' - \frac{31}{36}x' + \frac{25}{216}x - \frac{41}{216}\left(\frac{5}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + 2x - 5e^t\right) +$$

$$+\frac{19}{216}\left(\frac{7}{2}x'' - \frac{1}{2}x' + 3x - 5e^t\right) + \frac{161}{108}e^t \quad \text{або } x''' = -x' + 2e^t.$$

Розв’яжемо отримане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами $x''' + x' = 2e^t$.

Загальний розв’язок цього рівняння $x(t) = \overline{x}(t) + x^*(t)$.

Оскільки характеристичне рівняння $k^3 + k = 0$ має корені $k_1 = 0,\ k_2 = i,\ k_3 = -i,$ то загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $\overline{x}(t) = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді: $x^*(t) = Ae^t.$

Оскільки $\left(x^*\right)' = \left(x^*\right)'' = \left(x^*\right)''' = Ae^t$, то $Ae^t + Ae^t = 2e^t$, звідки $A = 1.$

Отже, $x(t) = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + e^t.$

Знайдемо похідні:

$x'(t)$ *та* $x''(t)$:

$$x'(t) = -C_2 \sin t + C_3 \cos t + e^t,$$
$$x''(t) = -C_2 \cos t - C_3 \sin t + e^t.$$

Тоді:

$$y=\frac{5}{2}\left(-C_2\cos t-C_3\sin t+e^t\right)+\frac{1}{2}\left(-C_2\sin t+C_3\cos t+e^t\right)+$$

$$+2\left(C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+e^t\right)-5e^t=2C_1+\frac{1}{2}\left(C_3-C_2\right)\cos t-\frac{1}{2}\left(C_2+C_3\right)\sin t.$$

Аналогічно,

$$z=\frac{7}{2}\left(-C_2\cos t-C_3\sin t+e^t\right)-\frac{1}{2}\left(-C_2\sin t+C_3\cos t+e^t\right)+$$

$$+3\left(C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+e^t\right)-$$

$$-5e^t=3C_1-\frac{1}{2}\left(C_2+C_3\right)\cos t+\frac{1}{2}\left(C_2-C_3\right)\sin t+e^t.$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$x(t)=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+e^t,$$
$$y(t)=2C_1+\frac{1}{2}\left(C_3-C_2\right)\cos t-\frac{1}{2}\left(C_2+C_3\right)\sin t,$$
$$z(t)=3C_1-\frac{1}{2}\left(C_2+C_3\right)\cos t+\frac{1}{2}\left(C_2-C_3\right)\sin t+e^t.$$

9.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай задана нормальна система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Для зручності обмежимося трьома рівняннями

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+a_2y+a_3z;\\ \dfrac{dy}{dt}=b_1x+b_2y+b_3z;\\ \dfrac{dz}{dt}=c_1x+c_2y+c_3z,\end{cases}\qquad(100)$$

де a_i, b_i, c_i – сталі. Цю систему методом виключення змінних завжди можна звести до одного лінійного однорідного рівняння третього порядку із сталими коефіцієнтами. Розглянемо ще один метод розв'язування системи (100).

Шукатимемо окремі розв'язки системи у вигляді

$$x = \alpha e^{kt},\ y = \beta e^{kt},\ z = \gamma e^{kt}, \tag{101}$$

де α, β, γ, k – невизначені сталі, які треба знайти.

Підставивши функції (101) в систему (100) та скоротивши на множник $e^{kt} \neq 0$, отримаємо

$$\begin{cases} k\alpha = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma; \\ k\beta = b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma; \\ k\gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_1 - k)\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0; \\ b_1\alpha + (b_2 - k)\beta + b_3\gamma = 0; \\ c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{102}$$

Отримали алгебраїчну однорідну систему лінійних рівнянь. Щоб ця система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - k & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0. \tag{103}$$

Розкривши визначник, дістанемо алгебраїчне рівняння третього степеня відносно k, яке називається характеристичним рівнянням системи (100).

Розглянемо випадок, коли рівняння (103) має три дійсні різні корені k_1, k_2, k_3. Для кожного з цих коренів запишемо систему (102) і визначимо невідомі $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Можна довести, що загальний розв'язок системи (100) має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_2 e^{k_2 t} + C_3\alpha_3 e^{k_3 t}; \\ y = C_1\beta_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t} + C_3\beta_3 e^{k_3 t}; \\ z = C_1\gamma_1 e^{k_1 t} + C_2\gamma_2 e^{k_2 t} + C_3\gamma_3 e^{k_3 t}. \end{cases} \qquad (104)$$

Випадки, коли рівняння (103) має кратні або комплексні корені, складніші, і ми їх не розглядатимемо. У зв'язку з цим зауважимо, що характеристичне рівняння (103) системи (100) збігається з характеристичним рівнянням диференціального рівняння третього порядку, до якого зводиться система (100). Таким чином, якщо відомі корені рівняння (103), то завжди можна знайти загальний розв'язок рівняння третього порядку, до якого зводиться система (100), а потім і загальний розв'язок самої системи (100).

Отже, незалежно від структури коренів характеристичного рівняння, систему (100) завжди можна розв'язати, якщо тільки відомі ці корені.

Розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Цю систему можна звести до одного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо дану систему методом Ейлера. Частинні розв'язки системи будемо шукати у вигляді: $x(t) = \alpha e^{kt}$, $y(t) = \beta e^{kt}$, де α, β, k – невизначені сталі, які потрібно знайти.

Підставивши ці функції в задану систему і скоротивши на множник $e^{kt} \neq 0$, отримуємо:

$$\begin{cases} (5-k)\alpha + 2\beta = 0, \\ -4\alpha + (-1-k)\beta = 0. \end{cases}$$

Ця лінійна однорідна система має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ -4 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

Отримали характеристичне рівняння заданої системи, яке запишемо у вигляді: $k^2-4k+3=0$.

Корені характеристичного рівняння $k_1=1,\quad k_2=3.$

При $k_1=1$ для визначення α_1 та β_1 отримуємо систему:

$\begin{cases}4\alpha_1+2\beta_1=0,\\ -4\alpha_1-2\beta=0,\end{cases}$ яка еквівалентна рівнянню $4\alpha_1+2\beta_1=0.$

Одним з розв'язків цього рівняння є $\alpha_1=1,\ \beta_1=-2.$

Тому функції $x_1(t)=e^t,\quad y_1(t)=-2e^t$ є розв'язком заданої системи.

При $k_2=3$ для визначення α_2 та β_2 одержуємо систему:

$\begin{cases}2\alpha_2+2\beta_2=0,\\ -4\alpha_2-4\beta_2=0,\end{cases}$ яка еквівалентна рівнянню $2\alpha_2+2\beta_2=0,$ одним з розв'язків якого є $\alpha_2=1,\quad \beta_2=-1.$

Таким чином, знайдено що один розв'язок даної системи: $x_2(t)=e^{3t},\ y_2(t)=-e^{3t}.$

Можна довести, що ці розв'язки лінійно незалежні. Тому загальний розв'язок заданої системи має вигляд:

$\begin{array}{l}x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t),\\ y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t),\end{array}$ тобто $\begin{array}{l}x(t)=C_1e^t+C_2e^{3t},\\ y(t)=-2C_1e^t-C_2e^{3t},\end{array}$ де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-z,\\ \dfrac{dz}{dt}=2x-y.\end{cases}$$

Розв'язання. Частинні розв'язки заданої системи шукаємо у вигляді:

$x(t)=\alpha e^{kt},\ y(t)=\beta e^{kt},\ z=\gamma e^{kt},$ *де* α,β,γ,k – сталі величини, які потрібно визначити. Скоротивши на множник $e^{kt}\neq 0,$ отримаємо лінійну однорідну систему рівнянь для визначення $\alpha,\beta,\gamma.$

$$\begin{cases}(1-k)\alpha-\beta+\gamma=0,\\ \alpha+(1-k)\beta-\gamma=0,\\ 2\alpha-\beta-k\gamma=0.\end{cases}$$

Для того, щоб ця система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix}1-k & -1 & 1\\ 1 & 1-k & -1\\ 2 & -1 & -k\end{vmatrix}=0 \text{ або } k^3-2k^2-k+2=0.$$

Корені цього характеристичного рівняння $k_1=-1,\ k_2=1,\ k_3=2.$

При $k_1=-1$ отримуємо систему:

$$\begin{cases}2\alpha_1-\beta_1+\gamma_1=0,\\ \alpha_1+2\beta_1-\gamma_1=0,\\ 2\alpha_1-\beta_1+\gamma_1=0,\end{cases}$$

яка еквівалентна системі двох рівнянь:

$$\begin{cases}2\alpha_1-\beta_1+\gamma_1=0,\\ \alpha_1+2\beta_1-\gamma_1=0.\end{cases}$$

Звідси $\beta_1=-3\alpha_1,\quad \gamma_1=-5\alpha_1.$

Один з розв'язків цієї системи $\alpha_1=1,\ \beta_1=-3,\ \gamma_1=-5.$ Тому отримуємо один розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь: $x_1(t)=e^{-t},\ y_1(t)=-3e^{-t},\ z_1(t)=-5e^{-t}.$

При $k_2=1$ одержуємо:

$$\begin{cases}-\beta_2+\gamma_2=0,\\ \alpha_2-\gamma_2=0,\\ 2\alpha_2-\beta_2-\gamma_2=0,\end{cases}\qquad \text{звідки } \alpha_2=\beta_2=\gamma_2.$$

Один з розв'язків цієї лінійної системи $\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 1, \; \gamma_2 = 1,$ а розв'язком заданої системи диференціальних рівнянь є функції $x_2(t) = e^t, \; y_2(t) = e^t, \; z_2(t) = e^t.$

Аналогічно, кореню характеристичного рівня $k_3 = 2$ відповідає система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ 2\alpha_3 - \beta_3 - 2\gamma_3 = 0, \end{cases}$$ розв'язки якої виражаються співвідношенням: $\beta_3 = 0, \; \alpha_3 = \gamma_3.$

Один з розв'язків цієї системи $\alpha_3 = 1, \; \beta_3 = 0, \; \gamma_3 = 1.$ Функції $x_3(t) = e^{2t}, \; y_3(t) \equiv 0, \; z_3(t) = e^{2t}$ утворюють ще один розв'язок заданої системи.

Отримані три розв'язки заданої системи є лінійно незалежними. Тому загальний розв'язок цієї системи має вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t), \\ y(t) &= C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t), \\ z(t) &= C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) + C_3 z_3(t), \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \\ y(t) &= -3C_1 e^{-t} + C_2 e^t, \\ z(t) &= -5C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \end{aligned}$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Задача 3. Роз'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язання. Частинні розв'язки заданої системи шукаємо у вигляді:

$x(t) = \alpha e^{kt}, \; y(t) = \beta e^{kt}.$ Для визначення α та β отримуємо однорідну лінійну систему рівнянь

$$\begin{cases}(4-k)\alpha-3\beta=0,\\ 3\alpha+(4-k)\beta=0.\end{cases}$$

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix}4-k & -3\\ 3 & 4-k\end{vmatrix}=0,\ k^2-8k+25=0,\ k_{1,2}=4\pm 3i.$$

При $k_1=4+3i$ одержимо:

$$\begin{cases}-3i\alpha_1-3\beta_1=0,\\ 3\alpha_1-3i\beta_1=0,\end{cases}\ \text{звідки } \beta_1=-i\alpha_1.$$

Один з розв'язків цієї системи: $\alpha_1=1,\ \beta_1=-i$.

Функції $x_1(t)=e^{(4+3i)t}$, $y_1(t)=-ie^{(4+3i)t}$ утворюють комплексний розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь.

При $k_2=4-3i$ отримаємо:

$$\begin{cases}3i\alpha_2-3\beta_2=0,\\ 3\alpha_2+3i\beta_2=0,\end{cases}\ \text{звідки } \beta_2=i\alpha_2.$$

Один з розв'язків цієї системи: $\alpha_2=1,\ \beta_2=i$.

Функції $x_2(t)=e^{(4-3i)t}$, $y_2(t)=ie^{(4-3i)t}$ складають ще один комплексний розв'язок заданої системи. За формулою Ейлера отримаємо:

$$x_1(t)=e^{(4+3i)t}=e^{4t}(\cos 3t+i\sin 3t),$$
$$x_2(t)=e^{(4-3i)t}=e^{4t}(\cos 3t-i\sin 3t).$$

Якщо функція $z(t)=u(t)+iv(t)$ є розв'язком лінійного диференціального рівняння, то розв'язками будуть також функції $u(t)$ та $v(t)$.

Тому приймемо: $\tilde{x}_1(t)=e^{4t}\cos 3t,\ \tilde{x}_2(t)=e^{4t}\sin 3t.$

Аналогічно $y_1(t)=-ie^{(4+3i)t}=e^{4t}(\sin 3t-i\cos 3t)$, $y_2(t)=ie^{(4-3i)t}=e^{4t}(\sin 3t+i\cos 3t)$.

Звідки $\tilde{y}_1(t)=e^{4t}\sin 3t,\ \tilde{y}_2(t)=-e^{4t}\cos 3t.$

Загальний розв'язок заданої системи матиме вигляд:

$$x(t) = C_1\tilde{x}_1(t) + C_2\tilde{x}_2(t),$$
$$y(t) = C_1\tilde{y}_1(t) + C_2\tilde{y}_2(t),$$

тобто

$$x(t) = e^{4t}\left(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\right),$$
$$y(t) = e^{4t}\left(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t\right),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Завдання для самостійної роботи

20. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z; \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{x} - z; \\ \dfrac{dz}{dx} = e^{-x} + y. \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y + e^{-2t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 4z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2e^t. \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - y. \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y + 5t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t; \\ \dfrac{dy}{dt} + x = \sin t. \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^t; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x; \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x; \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z; \end{cases}$

29) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + y + 2z. \end{cases}$

30) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математичискому анализу (для втузов). – М.: Висшая школа, 1980.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика у трьох частинах: Навчальний посібник, Ч.3. – Харків: Веста, 2008.
3. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика. Посібник для студентів вищих навчальних закладів. У двох частинах. Ч.2. – К.: Техніка, 2004.
4. Шкіль М.І Математичний аналіз: Підручник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. У двох частинах, Ч2. – К.: Вища школа, 2005.