УДК 539.3

А. Сяський, докт. техн. наук; Н. Шевцова

Рівненський державний гуманітарний університет

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПЛАСТИН З КРИВОЛІНІЙНИМИ ОТВОРАМИ І РОЗІМКНЕНИХ НЕСИМЕТРИЧНИХ РЕБЕР ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Розглянуто загальну постановку задачі про часткове підсилення криволінійного отвору в пластинці несиметричним відносно серединної площини тонким пружним ребром змінної жорсткості на розтяг (стиск) та згин. Сформульовано диференціальний варіант граничних умов задачі. Побудовано систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта відносно контактних зусиль та моментів в зоні підсилення. Досліджено структуру розв'язку цієї системи.

A. Syasky; N. Shevtsova

CONTACT INTERACTION OF PLATES WITH CURVILINEAR HOLES AND DETACHED ASYMMETRICAL RIBS OF VARING STIFFNESS

The problem about the particular strengthened of the curvilinear hole in a plate asymmetrical by a middle plane the thin elastic rib of varying stiffness of stretching (compression) and bend is considered. The differential variant of limiting conditions are formulated. The system of four singular integral equations with cores of Hilbert concerning contact tensions and moments in the area of strengthened is built. The structure of decision of this system is explored.

Тонкостінні пластинчасті конструкції з отворами, контури яких підсилені пружними елементами у вигляді тонких ребер жорсткості, мають широке застосування в різних галузях машинобудування та будівництва.

Підсилювальні елементи, складаючи, як правило, порівняно незначну частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на їх міцність та жорсткість. Необхідність розрахунку таких конструкцій викликає посилений інтерес до розробки ефективних методів визначення їх напружено-деформованого стану.

Певна завершеність цієї проблеми при підсиленні отворів у пластинках замкненими симетричними ребрами, пружна рівновага яких описується теорією малих деформацій тонких криволінійних стрижнів, досягнута в роботах [1–3].

З конструктивних чи технологічних причин підсилювальні елементи можуть бути розташовані несиметрично відносно серединної площини пластинки. У цьому випадку розподіл напружень залежить не тільки від фізико-геометричних параметрів підсилення і зовнішнього навантаження, але й від ступеня несиметричності. Дослідженню впливу несиметричності замкненого підсилення контура отвору на напружено-деформований стан конструкції присвячені роботи [3–5].

Щодо проблеми часткового симетричного підсилення контура криволінійного отвору нескінченної пластинки, то окремі її аспекти досліджені в [6–9]. Задачі про часткове несиметричне його підсилення залишаються недослідженими.

В даній роботі здійснено загальну постановку задачі про часткове несиметричне підсилення контура гладкого криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці. Побудовано математичну модель задачі у вигляді системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта, досліджено структуру її розв'язку в околі торців підсилення.

Постановка задачі. Вивід основних рівнянь

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого L має форму правильного N – кутника із закругленими кутами.

Допустимо, що ділянка $L_1 \equiv [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ (α_0^*, β_0^* – полярні кути) контура L підсилена несиметричним відносно серединної площини пластинки тонким пружним ребром прямокутного поперечного перерізу сталої товщини $2h_0$ і змінної ширини $b_0(s)$, де s – дуга на L_1.

Систему прямокутних координат (x, y, z) оберемо так, щоб площина xOy співпадала з площиною осьової лінії Γ_1 підсилення, а вісь Oz була напрямлена вниз і проходила через центр отвору пластинки (рис. 1, 2). Серединну площину пластинки $z = z_0$ $(-h_0 + h \le z_0 \le h_0 - h)$ віднесемо до системи полярних координат (r, δ) з полюсом у центрі отвору, для якої полярна вісь співпадає з віссю симетрії контура L. Незалежно від виду навантаження при $z_0 \ne 0$ пластинка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану і згину.

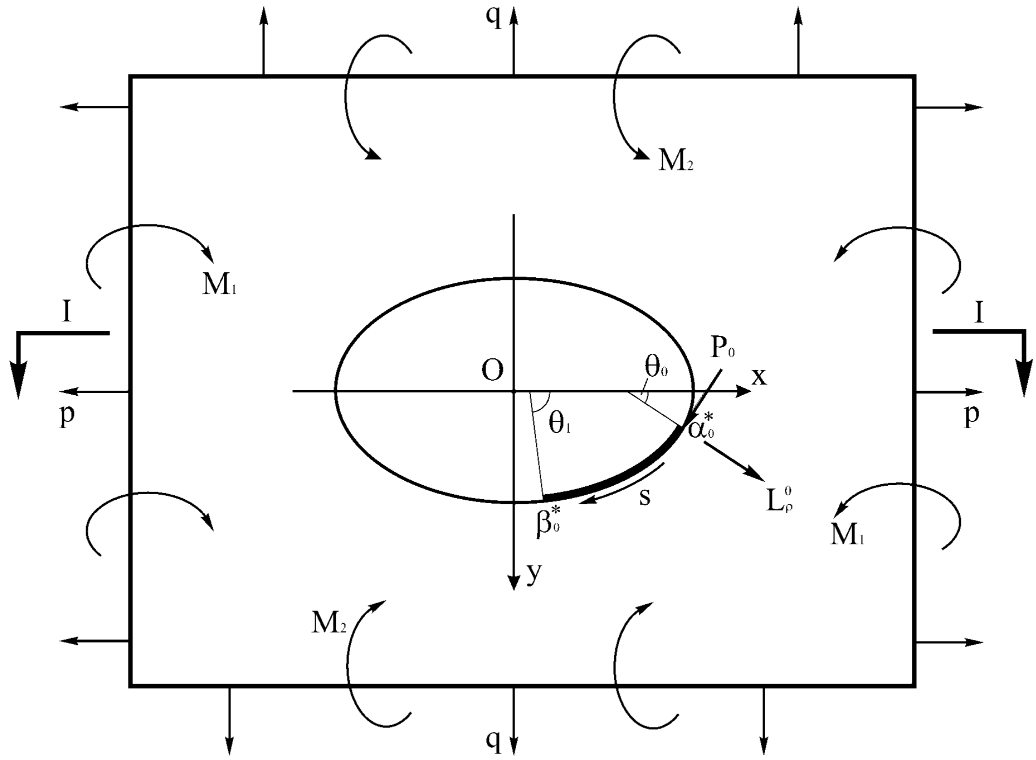

Рисунок 1 - Розрахункова схема пластинки.

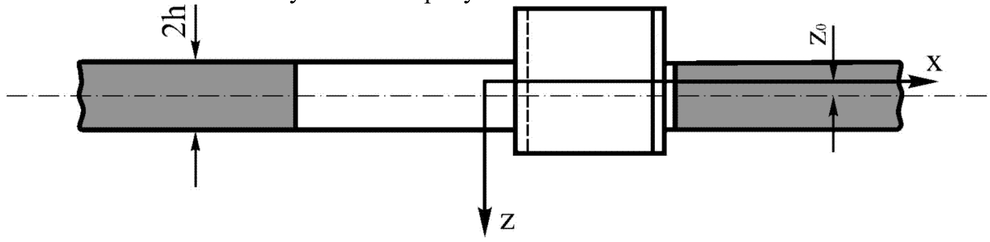

Рисунок 2 - Розріз I-I.

Підсилення вважається достатньо тонким, що дозволяє нехтувати його опором закручуванню і згину в площині xOy, а отже, моделювати його пружною лінією змінної жорсткості на розтяг (стиск) $E_0F(s)$ і згин $A(s)$ [1]. Іншими словами, будемо вважати, що в поперечних перерізах підсилення відсутні крутні моменти і згинальні моменти, вектор яких колінеарний осі Oz.

Пластинка перебуває в умовах двостороннього розтягу (стиску) зусиллями *p, q* та циліндричного згину моментами M_1, M_2, які прикладені на нескінченності і діють в напрямках координатних осей (в напрямку осі Ox діють зусилля p та моменти M_1). Зовнішнє навантаження на підсилення створюють сила P_0 і момент L_ρ^0, прикладені перпендикулярно до торця підсилення $\delta = \alpha_0^*$ в його центрі.

Умовно відділимо підсилення від пластинки, замінивши дію останньої нормальними T_ρ і дотичними $S_{\rho\lambda}$ зусиллями та нормальними згинальними M_ρ і узагальненими крутними $P = H_{\rho\lambda} + \int_0^s N_\rho ds$ моментами (N_ρ – поперечна сила, $H_{\rho\lambda}$ – крутний момент).

Розглянемо рівновагу елемента підсилення під дією системи сил, зображених на рис. 3. З боку пластинки на підсилення діють, зведені до осі Γ_1, зусилля T_ρ, $S_{\rho\lambda}$ і моменти $M_\rho - z_0 T_\rho$, $P - z_0 S_{\rho\lambda}$.

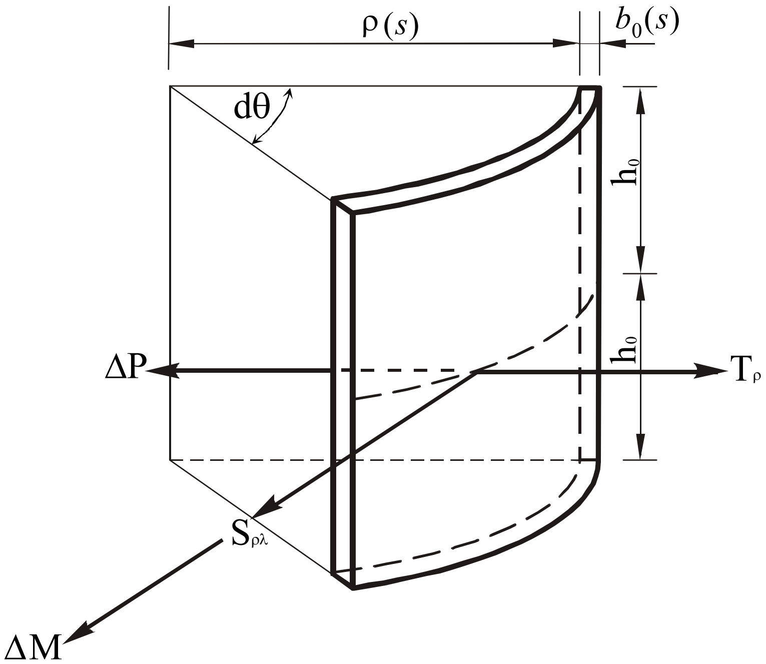

Рисунок 3 - Розрахункова схема елемента підсилення.

Використовуючи фізичні співвідношення Кірхгофа [1], умови рівноваги елемента підсилення при $z = 0$ можна записати у вигляді

$$T_\rho = \frac{E_0 F(s)}{\tilde{\rho}} \varepsilon_\lambda^c ; \qquad S_{\rho\lambda} = -\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho} T_\rho) ;$$

$$\Delta M = -\frac{A(s)}{\tilde{\rho}} X^c ; \qquad \Delta P = -\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho} \Delta M) . \qquad (1)$$

Тут введено позначення:
$\Delta M = M_\rho - z_0 T_\rho$; $\Delta P = P - z_0 S_{\rho\lambda}$; $\tilde{\rho}$ – змінний радіус кривини осі Γ_1; ε_λ^c – відносне видовження осі Γ_1; X^c –зміна її кривини в стичній площині.

Умову сумісності деформацій приймемо у вигляді рівності відносних видовжень волокон пластинки $\varepsilon_\lambda(z)$ і підсилення $\varepsilon_\lambda^c(z)$, які віддалені від площини xOy на відстань z. Враховуючи гіпотезу жорсткої нормалі для підсилення [1, 2], цю умову запишемо у вигляді

$$\varepsilon_\lambda + (z_0 - z) X = \varepsilon_\lambda^c - z X^c , \qquad -(z_0 + h) \le z \le z_0 + h , \qquad (2)$$

де ε_λ, X – відносне видовження контура L пластинки та зміна його кривини в стичній площині.

Оскільки умова (2) повинна виконуватися для довільних z з вказаного вище інтервалу, то при $z = 0$ повинно бути

$$\varepsilon_\lambda^c = \varepsilon_\lambda + z_0 X \; ; \qquad X^c = X . \tag{3}$$

Підставляючи (3) в умови (1), їх можна подати так:

$$T_\rho = \frac{E_0 F(s)}{\tilde{\rho}_0}\varepsilon_\lambda + 3\left(\frac{z_0}{h_0}\right)^2 \frac{\Delta M}{z_0}; \qquad S_{\rho\lambda} = -\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho}_0 T_\rho);$$

$$\Delta M = -\frac{A(s)}{\tilde{\rho}_0} X; \qquad \Delta P = -\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho}_0 \Delta M). \tag{4}$$

Крім співвідношень (4), повинні виконуватися умови рівноваги підсилення як жорсткого цілого [6, 7]

$$\int_{s_1}^{s_2} (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = -iP_0 e^{i\theta_0} \; ; \qquad \int_{s_1}^{s_2} (\Delta M + i\Delta P) e^{i\theta} ds = -iL_\rho^0 e^{i\theta_0} . \tag{5}$$

Тут s_1, s_2 – значення s, які відповідають полярним кутам α_0^*, β_0^*; θ– кут між нормаллю до контура L і віссю Ox; θ_0, θ_1– значення θ для торців ділянки підсилення; $i = \sqrt{-1}$.

Компоненти деформації контура L пластинки через контактні зусилля і моменти визначаються за формулами [7–9], які при заданому навантаженні можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2Eh}\left\{(1-\nu)T_\rho - \frac{1}{\pi\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left[I(\lambda,t)T_\rho(t) - J(\lambda,t)S_{\rho\lambda}(t)\right]dt + \frac{\alpha\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta\tilde{\vartheta}_\theta^0}{\alpha^2+\beta^2}\right\};$$

$$X - iY = \frac{k}{3+\nu}\left\{\frac{1}{\pi\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left[I(\lambda,t)+iJ(\lambda,t)\right]\left[M_\rho(t)+iP(t)\right]dt + \right.$$

$$\left. +(1+\nu)\left(M_\rho + iP\right) + \frac{\overline{\omega'(\sigma)}(X_0^* + iY_0^*)}{\alpha^2+\beta^2}\right\},$$

де (6)

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + i\tilde{\vartheta}_\theta^0 = (p+q)\left[1+\varepsilon(N-1)e^{-iN\lambda}\right] - 2(p-q)e^{-2i\lambda} +$$

$$+\frac{iP_0}{2\pi}\left[(3-\nu)e^{-i(\lambda-\theta_0)} + (1+\nu)\varepsilon(N-2)e^{-i((N-1)\lambda+\theta_0)}\right];$$

$$X_0^* + iY_0^* = \frac{3+\nu}{1+\nu}(M_1+M_2) + 2(M_2-M_1)\frac{1}{\sigma^2} - \varepsilon(N-1)\frac{1-\nu}{1+\nu}(M_1+M_2)\frac{1}{\sigma^N} -$$

$$-iC_1\left[(3+\nu)+(1-\nu)\,\varepsilon\,(N-1)\frac{1}{\sigma^N}\right] - \frac{i(1-\nu)}{2\pi}(L_\rho^0 + z_0 P_0)e^{-i(\lambda-\theta_0)}\left[1-\varepsilon(N-2)e^{-iN\lambda+2i(\lambda-\theta_0)}\right]; \tag{7}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi(\varepsilon^2+\chi)}\left[\varepsilon\int_{\alpha_0}^{\beta_0}(M_\rho^*\sin Nt + P^*\cos Nt) - \chi\int_{\alpha_0}^{\beta_0}P^*(t)dt\right]; \qquad \chi = \frac{3+\nu}{1-\nu};$$

$$I(\lambda,t) = R(\lambda,t) - Q(\lambda,t)\,ctg\,\frac{\lambda-t}{2}; \qquad J(\lambda,t) = Q(\lambda,t) + R(\lambda,t)\,ctg\,\frac{\lambda-t}{2};$$

$$R(\lambda,t)=\alpha(\lambda)\alpha(t)+\beta(\lambda)\beta(t);\qquad Q(\lambda,t)=\alpha(\lambda)\beta(t)-\beta(\lambda)\alpha(t);$$

$$M_\rho^*+iP^*=(M_\rho+iP)\,\omega'(\sigma);$$

$\omega(\xi)=R_0\left(\xi+\dfrac{\varepsilon}{\xi^N}\right)$ – функція, яка реалізує конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi=\rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка; $\sigma=e^{i\lambda}$; $\alpha+i\beta=\omega'(\sigma)$; R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності приймемо, що $R_0=1$); $k=\dfrac{D}{(1-\nu)}$; D – циліндрична жорсткість пластинки на згин; E,ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; $[\alpha_0,\beta_0]$ – образ ділянки $\left[\alpha_0^*,\beta_0^*\right]$ при відображенні $\omega(\xi)$; X, Y – деформації контура L пластинки при її циліндричному згині [6].

Підставляючи (6), (7) у граничні умови (4), приходимо до системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення зусиль T_ρ, $S_{\rho\lambda}$ і моментів M_ρ, P в зоні підсилення.

$$T_\rho=\frac{E_0F(\lambda)}{2Eh\tilde{\beta}_0}\left\{(1-\nu)T_\rho(\lambda)-\frac{1}{\pi(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0}\left[I(\lambda,t)T_\rho(t)-J(\lambda,t)S_{\rho\lambda}(t)\right]dt+\frac{\alpha\varepsilon_\lambda^0+\beta\mathrm{v}_0}{\alpha^2+\beta^2}\right\}+$$

$$+3\left(\frac{z_0}{h_0}\right)^2\frac{\Delta M}{z_0};\quad S_{\rho\lambda}=-\frac{\partial(\tilde{\beta}T_\rho)}{|\omega'(\sigma)|\partial\lambda};\quad \Delta P=-\frac{\partial(\tilde{\beta}\Delta M)}{|\omega'(\sigma)|\partial\lambda};\tag{8}$$

$$\Delta M=-\frac{A(\lambda)k}{(3+\nu)\tilde{\beta}_0}\left\{(1+\nu)M_\rho(\lambda)+\frac{1}{\pi\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0}\left[I(\lambda,t)M_\rho(t)-J(\lambda,t)P(t)\right]dt+\frac{\alpha X_0^*+\beta Y_0^*}{\alpha^2+\beta^2}\right\};$$

$$\lambda\in[\alpha_0;\beta_0].$$

Якщо розв'язок системи (8), який задовольняє умови (5), стане відомим, то зусилля T_λ і моменти M_λ, $H_{\rho\lambda}$ на контурі отвору пластинки можна визначити за формулами [1]

$$T_\lambda=\nu T_\rho+2Eh\varepsilon_\lambda;\quad M_\lambda=\nu M_\rho-\frac{1+\nu}{k}X;\quad H_{\rho\lambda}=-\frac{Y}{k}.\tag{9}$$

Внутрішні поздовжні зусилля N_λ і згинальні моменти L_ρ в поперечних перерізах підсилення, які віднесені до його осі, визначаються із співвідношень [1, 2]:

$$N_\lambda=E_0F(\lambda)\left(\varepsilon_\lambda+z_0X\right)=E_0F(\lambda)\left[\frac{T_\lambda-\nu T_\rho}{2Eh}-\frac{k}{1+\nu}\left(M_\lambda-\nu M_\rho\right)\right];$$

$$L_\rho=-A(\lambda)X=A(\lambda)\frac{k}{1+\nu}\left(M_\lambda-\nu M_\rho\right).\tag{10}$$

Сумарні максимальні напруження на контурі отвору пластинки визначаються за формулами:

$$\sigma_\rho=\frac{1}{2h}\left[T_\rho\pm\frac{3M_\rho}{z_0}\left(\frac{z_0}{h}\right)\right]=\frac{1}{2h^2}\left[z_0T_\rho\left(\frac{h}{z_0}\right)\pm 3M_\rho\right];$$

$$\sigma_\lambda=\frac{1}{2h}\left[T_\lambda\pm\frac{3M_\lambda}{z_0}\left(\frac{z_0}{h}\right)\right]=\frac{1}{2h^2}\left[z_0T_\lambda\left(\frac{h}{z_0}\right)\pm 3M_\lambda\right];\tag{11}$$

$$\tau_{\rho\lambda} = \frac{1}{2h}\left[S_{\rho\lambda} \pm \frac{3H_{\rho\lambda}}{z_0}\left(\frac{z_0}{h}\right)\right] = \frac{1}{2h^2}\left[z_0 S_{\rho\lambda}\left(\frac{h}{z_0}\right) \pm 3H_{\rho\lambda}\right].$$

Тут знак “–”відповідає верхній поверхні пластинки, а знак “+” – нижній.

Наближений розв’язок задачі

Залежності (5), (8) – (11) визначають повну систему рівнянь задачі про часткове несиметричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці, яка при $z_0 = 0$ визначає розв’язок двох незалежних задач для узагальненого плоского напруженого стану [7, 8] і циліндричного згину пластинки [6, 9]. Точний розв’язок системи (8) знайти не можливо. Для побудови наближеного розв’язку задачі необхідно встановити структуру величин T_ρ і ΔM в околі торців підсилення.

Враховуючи другу та четверту умови (4), знаходимо після інтегрування (5) і певних перетворень

$$T_\rho(\alpha_0) = -\Omega(\alpha_0)P_0;\quad T_\rho(\beta_0) = 0;\quad \Delta M(\alpha_0) = -\Omega(\alpha_0)L_\rho^0;\quad \Delta M(\beta_0) = 0, \qquad (12)$$

де

$$\Omega(\alpha_0) = \frac{|\omega'(\sigma_0)|^2 (1-N) + \alpha N}{|\omega'(\sigma_0)|^3}, \quad \sigma_0 = e^{i\alpha_0}.$$

Співвідношення (12) забезпечують тотожне виконання умов рівноваги підсилення. Вони залежать тільки від форми отвору та положення підсилення на контурі L і не залежать від матеріалів пластинки та підсилення.

У випадку відсутності зовнішнього навантаження на підсилення ($P_0 = L_\rho^0 = 0$) умови (12) приймають вигляд

$$T_\rho(\alpha_0) = T_\rho(\beta_0) = M_\rho(\alpha_0) = M_\rho(\beta_0) = 0. \qquad (13)$$

Якщо до торця $\lambda = \alpha_0$ підсилення передається тільки зосереджена сила P_0 або зосереджена пара сил з моментом L_ρ^0, то з (12) одержимо відповідно

$$T_\rho(\alpha_0) = -\Omega(\alpha_0)P_0;\quad M_\rho(\alpha_0) = \Omega(\alpha_0)P_0 z_0;\quad T_\rho(\beta_0) = M_\rho(\beta_0) = 0 \qquad (14)$$

або

$$T_\rho(\alpha_0) = T_\rho(\beta_0) = M_\rho(\beta_0) = 0;\qquad M_\rho(\alpha_0) = -\Omega(\alpha_0)L_\rho^0. \qquad (15)$$

Висновок. Система (8) має таку ж структуру, як і відповідні системи для узагальненого плоского напруженого стану [7, 8] і циліндричного згину пластинки [6]. З урахуванням співвідношень (12)–(14) для її наближеного розв’язку може бути застосований метод колокації.

Література

1. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – Киев: Наук. думка, 1964. – 384с.
2. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. – Киев: Наук. думка, 1971. – 268с.
3. Мартынович Т. Л., Юринец В. Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа. Изд–во при Львов. ун–те, 1984. –160с.
4. Флейшман Н. П., Кац М. Л. Деформация неоднородной пластинки с несимметричным криволинейным ребром переменной жесткости. В сб. Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1979, №34.– С. 44–47.
5. Мартинович Т. Л., Бутринський І. З. Несиметричне з натягом підсилення пружним стержнем кругового отвору безмежної пластинки. – Львів. політехн. ін-т, Львів, 1993. – 11с. – Деп. в ДНТБ України 21.12.93 №2509–Ук–93.
6. Сяський А. А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным отверстием //Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, №2. – С. 247–254.

7. Сяський А., Батишкіна Ю. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці //Вісник Тернопільського державного технічного університету, – Т. 9, №2. – 2004.– С. 5–12.
8. Сяський А., Батишкіна Ю. Передача сил до криволінійного отвору нескінченної пластинки стрижнями змінної жорсткості //Машинознавство. – 2004.– №6 (84). – С. 21–26.
9. Сяський А., Гаврюсєв С. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами //Вісник Тернопільського державного технічного університету, – Т. 11, № 1. – 2006. – С.12–17.

Одержано 01.06.2006 р.