УДК 519.876.5

М. Дивак, докт. техн. наук; Є. Марценюк

Тернопільський державний економічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ ІНТЕРВАЛЬНОЇ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Проведено дослідження властивостей області параметрів інтервальних моделей дискретних динамічних систем. Запропоновано принципи організації алгоритмів розв'язування інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь породжених задачами параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем на основі інтервальних даних.

M. Dyvak; Ye. Martsenyuk

RESEARCH OF PROPERTIES OF SET OF PARAMETERS OF INTERVAL DISCRETE MODEL OF DYNAMIC SYSTEM

Research of properties of parameter's set of interval model of the discrete dynamic systems is conducted. Principles of organization of algorithms of solving of the interval system of linear algebraic equalizations of generated are offered by the tasks of parameter's identification of models of the discrete dynamic systems on the basis of intervals data.

Вступ

Задачі ідентифікації дискретних динамічних моделей на основі експериментальних даних в достатній мірі розроблено і описано в теорії систем. Для знаходження параметрів динамічних моделей на основі експериментальних даних, які містять похибки, залежно від властивостей цих похибок застосовують один із підходів: стохастичний та теоретико-множинний або інтервальний.

У випадку використання стохастичного підходу необхідним є дослідження вибірки даних з метою встановлення статистичних характеристик випадкових похибок, яке за умов обмеженої вибірки даних є нереальним. Застосування інтервального підходу вимагає встановлення тільки граничних меж амплітуди похибок. В той же час застосування інтервального підходу вимагає нетрадиційних методів розв'язання задач параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем, а також нетрадиційних обчислювальних алгоритмів реалізації цих методів.

Розробці вказаних методів присвячені праці відомих українських та зарубіжних науковців: В.Кунцевича, А.Куржанського, М.Личака і т.д. [1,2]. Існуючі методи, як правило, полягають у розв'язуванні інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР), побудованих для заданої структури моделі, що описує рівняння динаміки та на основі експериментальних даних. Множину значень параметрів динамічної моделі, що є розв'язком ІСЛАР, наближено представляють інтервальними оцінками параметрів. Такий спосіб представлення розв'язків ІСЛАР не відзначається високою точністю. До того ж існуючі методи розв'язання ІСЛАР не враховують особливості їх побудови для динамічних систем. Як наслідок, алгоритми розв'язання задач параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем на основі інтервальних даних відзначаються високою обчислювальною складністю, а знайдені оцінки параметрів низькою точністю.

Метою даної праці є дослідження властивостей множини розв'язків ІСЛАР, породженою задачею параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем, і на цій основі побудова принципів організації алгоритмів розв'язування ІСЛАР.

1. Постановка задачі

Розглянемо особливості формування ІСЛАР при розв'язуванні задач параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем. Не порушуючи загальності, будемо розглядати лінійний динамічний об'єкт за умов повної спостережності, зі скалярним управлінням, а також за умов обмежених за амплітудою похибок експериментальних даних. Вказаний об'єкт можна представити такою системою дискретних рівнянь:

$$\vec{x}_{k+1} = G \cdot \vec{x}_k + Q \cdot \vec{u}_k + \vec{e}_{k+1} \qquad (1)$$

$$|e_{k+1}| \le \Delta, \Delta > 0 \quad \forall k = 0,...,N, \qquad (2)$$

де $\vec{x}_k \in R^m$ - вектор параметрів стану об'єкта в k-тий дискретний момент часу; $u_k \in R^{n=1}$ - вхідна змінна (управління) в k-тий дискретний момент часу;

$$G = \begin{pmatrix} g_{11}, \ldots, g_{1i}, \ldots, g_{1m} \\ \vdots \\ g_{i1}, \ldots, g_{ii}, \ldots, g_{im} \\ \vdots \\ g_{m1}, \ldots, g_{mi}, \ldots, g_{mm} \end{pmatrix}, Q = \left(\frac{0}{0 \ldots q} \right).;$$

G та Q – матриці, елементи яких є параметрами лінійної динамічної моделі; $\vec{e}_{k+1} = \left(e_{k+1,1},...,e_{k+1,i},...,e_{k+1,p}\right)^T$ - вектор випадкових похибок в $k+1$-ий момент часу з відомою максимальною амплітудою Δ.

Для розв'язання задачі ідентифікації параметрів моделі (елементів матриць G та Q) використовуємо експериментальні дані, які отримані в інтервальному вигляді:

$$u_k \to [\vec{x}^{-}_{k+1}, \vec{x}^{+}_{k+1}],\ k = 0,\ldots,N, \qquad (3)$$

де $\vec{x}^{-}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \vec{i} \cdot \Delta$ і $\vec{x}^{+}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} + \vec{i} \cdot \Delta$ - вектори нижніх та верхніх меж гарантованих інтервалів змінних стану, причому $\vec{x}_{k+1} \in [\vec{x}^{-}_{k+1}, \vec{x}^{+}_{k+1}] \forall k = 0,...,N; \vec{i}$ - вектор, всі компоненти якого дорівнюють "1"; N-кількість дискрет.

2. Аналіз множини параметрів дискретної динамічної моделі

Приймаючи до уваги умови $\vec{x}_{k+1} \in \left[\vec{x}^{-}_{k+1}, \vec{x}^{+}_{k+1}\right] \forall k = 0,...,N$ та із заміною в цих умовах $\vec{x}_{k+1}$ формулою $\vec{x}_{k+1} = G\ \vec{x} + Q\vec{u}$, отримаємо таку систему:

$$x^{-}_{i,k+1} \le g_{i,1} \cdot \left[x^{-}_{1,k}, x^{+}_{1,k}\right] + ... + g_{i,m} \cdot \left[x^{-}_{m,k}, x^{+}_{m,k}\right] + q_i \cdot u_k \le x^{+}_{i,k+1}; i = 1,...,m,\ k=0,...,N. \qquad (4)$$

Система (4) є інтервальною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі. Як видно, ІСЛАР (4) складається із m незалежних блоків, в кожному із яких N рівнянь, що дозволяють визначити елементи i-тої стрічки матриць G та Q. Тому, не порушуючи загальності, будемо розглядати окремий блок загальної ІСЛАР (4), який матиме такий вигляд:

$$x^{-}_{i,k+1} \le g_{i,1} \cdot \left[x^{-}_{1,k}, x^{+}_{1,k}\right] + ... + g_{i,m} \cdot \left[x^{-}_{m,k}, x^{+}_{m,k}\right] + q_i \cdot u_k \le x^{+}_{i,k+1}, \qquad k=0,...,N. \qquad (5)$$

В подальшому розгляді в ІСЛАР (5), для спрощення, будемо опускати індекс стрічки i, тобто розглядати систему у такому вигляді:

$$x^{-}_{k+1} \le g_1 \cdot \left[x^{-}_{1,k}, x^{+}_{1,k}\right] .. + g_m \cdot \left[x^{-}_{m,k}, x^{+}_{m,k}\right] + q \cdot u_k \le x^{+}_{k+1},\ k=0,...,N. \qquad (6)$$

Допустимий розв’язок $\vec{g}_{idop}=\left(g_{i1dop},...,g_{imdop},q\right)^T$ отриманої ІСЛАР (6), який забезпечуватиме гарантовані коридори прогнозування параметрів стану системи в $k=1,...,N$ моменти часу, шукатимемо у такому вигляді:

$$\vec{g}_{dop}\in\Omega_{dop}=\left\{\vec{g}\in R^m\middle|\left(\forall X_k\in[X_k]\right)\left(\exists\vec{y}_{k+1}\in[\vec{y}_{k+1}]\right)\left(\vec{g}^T\cdot X_k=\vec{y}_{k+1}\right)\right\},\tag{7}$$

де $\forall,\exists$ - квантори “загальності” та “існування” відповідно;

$$[X_k]^T=\begin{pmatrix}[x_{1,0}^-,x_{1,0}^+]\ ... & [x_{i,0}^-,x_{i,0}^+].. & [x_{m,0}^-,x_{m,0}^+] & u_0\\ \vdots & & & \\ [x_{1,k}^-,x_{1,k}^+]\ ... & [x_{i,k}^-,x_{i,k}^+].. & [x_{m,k}^-,x_{m,k}^+] & u_k\\ \vdots & & & \\ [x_{1,N-1}^-,x_{1,N-1}^+].. & [x_{i,N-1}^-,x_{i,N-1}^+].. & [x_{m,N-1}^-,x_{m,N-1}^+] & u_{N-1}\end{pmatrix}$$ - матриця гарантованих інтервалів m змінних стану в $k=0,...,N$ моменти часу та точно заданих управлінь $u_k\in R^{n=1}$;

$\vec{y}_{N+1=}(x_{1,...,}\ x_{k+1,...}\ x_{N+1})^T$– вектор, який має розмірність 1x$(N+1)$;

$[\vec{y}_{k+1}]=\left([x_1^-,x_1^+],...,[x_{k+1}^-,x_{k+1}^+],...,[x_{N+1}^-,x_{N_{+1}}^+]\right)^T$ - вектор гарантованих інтервалів i-тої змінної стану в $k+1=1,...,N+1$ моменти часу.

Аналіз області Ω_{dop} допустимих значень параметрів моделі показує, що для випадку дискретної моделі одночасне виконання умов $\forall X_k\in[X_k]$ та $\exists\vec{x}_{k+1}\in[\vec{x}_{k+1}]$ означає, що область Ω_{dop}, задана формулою (7), еквівалентна області:

$$\vec{g}_{dop}\in\Omega_{dop\forall\exists}=\left\{\vec{g}\in R^m\middle|\left(\forall X_k\in[X_k]\right),\left(\forall\vec{y}'_{k+1}\in[\vec{y}'_{k+1}]\right)\left(\exists x_{N+1}\in[x_{N+1}]\right)\left(\vec{g}^T\cdot X_k=\vec{y}_{k+1}\right)\right\},\tag{8}$$

де $\vec{y}'_{k+1}=(x_1,\dots,x_N)^T$.

Таким чином, властивості множини допустимих розв’язків Ω_{dop} ІСЛАР (7), яка породжена задачею параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем, співпадають із властивостями множини $\Omega_{dop\forall\exists}$ (8), яку з деяким наближенням можемо записати у такому вигляді:

$$\vec{g}_{dop}\in\Omega_{dop\forall\forall}=\left\{\vec{g}\in R^m\middle|\left(\forall X_k\in[X_k]\right),\left(\forall\vec{y}_{k+1}\in[\vec{y}_{k+1}]\right)\left(\vec{g}^T\cdot X_k=\vec{y}_{k+1}\right)\right\}.\tag{9}$$

Таке співпадання множин Ω_{dop} та $\Omega_{dop\ \forall\forall}$ розв’язків ІСЛАР, які породжені задачею параметричної ідентифікації моделі дискретних динамічних систем, є нетиповим для загального випадку ІСЛАР.

Важливим завданням, яке необхідно розв’язувати для побудови високоефективних алгоритмів параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем, є вибір початкового наближення $\vec{g}_0$ вектора параметрів моделі $\vec{g}\in\Omega_{dop\forall\exists}$.

Як правило, існуючі алгоритми [3,4] орієнтовані на вибір початкового наближення $\vec{g}_0$ ітераційної процедури за формулою

$$\vec{g}_0=(X_k^+)^{-1}\cdot\vec{y}_{k+1},\tag{10}$$

де $X_k^+=\begin{pmatrix}x^+_{10}\ \Lambda\ x^+_{m0} & u_0\\ \vdots & \\ x^+_{1m-1}\ \Lambda\ x^+_{mm-1} & u_{m-1}\end{pmatrix}$ - матриця верхніх меж інтервальних значень x_{ik}, отримана для m рівнянь, виділених із загальної ІСЛАР (6);

$\vec{y}_{k+1} = \left(\dfrac{x_1^- + x_1^+}{2}, ..., \dfrac{x_m^- + x_m^+}{2}\right)^T$ - вектор, компоненти якого - центри відповідних інтервалів $\left[x_{k+1}^-, x_{k+1}^+\right]$, $k = 0,...,m-1$ (у вибраних рівняннях).

Точка $\vec{g}_0$ є центром симетрії області параметрів, яка у свою чергу є розв'язком виділених m рівнянь із загальної системи (6) (див. рис.1).

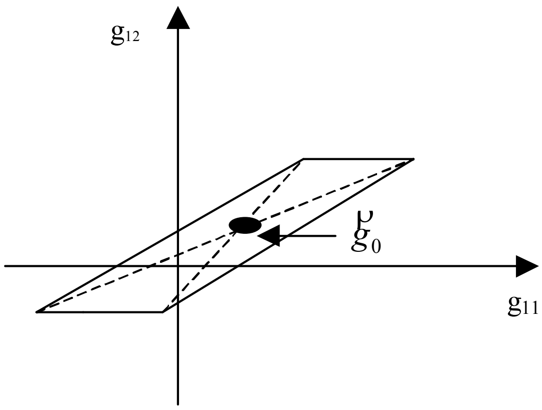

Рисунок 1 – Ілюстрація процедури вибору початкового наближення допустимого розв'язку ІСЛАР (N=m=2).

Дослідимо обґрунтованість існуючого підходу вибору початкового наближення $\vec{g}_0$ ітераційних процедур параметричної ідентифікації моделей дискретних динамічних систем. З цією метою скористаємося даними для ідентифікації моделі реального об'єкта, які наведені в праці [4]. Експериментальні дані із праці [4] для ідентифікації дискретної динамічної моделі у вигляді

$$x_{1k+1} = x_{1k} \cdot g_{11} + x_{21} \cdot g_{12} + q \cdot u_k \,, \tag{11}$$

наведені у таблиці 1.

Таблиця 1- Експериментальні дані для ідентифікації лінійної дискретної динамічної моделі

k	$x_{1,k+1}^-$	$x_{1,k+1}^+$	$x_{2,k+1}^-$	$x_{2,k+1}^+$	u_k
0	448	496	299	330	1107
1	471	521	343	380	1322
2	503	555	366	404	1413
3	397	440	282	313	1065
4	384	425	261	288	1013
5	426	471	340	376	1181
6	506	559	422	468	1388
7	611	675	464	513	1621
8	620	686	539	596	1816

Для спрощення, яке не впливає на результати досліджень властивостей розв'язку ІСЛАР, при формуванні цієї системи покладемо q=0. В результаті отримаємо таку ІСЛАР :

$$\begin{gathered}
503 \le g_{11}[471;521] + g_{12}[343;380] \le 555 \\
397 \le g_{11}[503;555] + g_{12}[366;404] \le 440 \\
384 \le g_{11}[397;440] + g_{12}[282;313] \le 425 \\
426 \le g_{11}[384;425] + g_{12}[261;288] \le 471 \\
471 \le g_{11}\,[448;496] + g_{12}\,[299;330] \le 521
\end{gathered} \tag{12}$$

$$506 \le g_{11}[426;471] + g_{12}[340;376] \le 559$$
$$611 \le g_{11}[506;559] + g_{12}[422;468] \le 675$$
$$629 \le g_{11}[611;675] + g_{12}[464;513] \le 696\,.$$

Спочатку, користуючись отриманою системою (12), виділимо ряд насичених блоків ІСЛАР:

$$1.\begin{cases} 503 \le g_{11}[471;521] + g_{12}[343;380] \le 555 \\ 397 \le g_{11}[503;555] + g_{12}[366;404] \le 440 \end{cases} \qquad (13)$$

$$2.\begin{cases} 503 \le g_{11}[471;521] + g_{12}[343;380] \le 555 \\ 384 \le g_{11}[397;440] + g_{12}[282;313] \le 425 \end{cases} \qquad (14)$$

$$3.\begin{cases} 397 \le g_{11}[503;555] + g_{12}[366;404] \le 440 \\ 384 \le g_{11}[397;440] + g_{12}[282;313] \le 425 \end{cases} \qquad (15)$$

Розв'язки ІСЛАР (13), (14), (15) наведені на рисунку 2.

Центри областей розв’язків цих систем обчислимо за допомогою таких рівнянь:

$$\vec{g}_0^{\,1} = \begin{pmatrix} 521 & 380 \\ 555 & 404 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 529 \\ 419 \end{pmatrix}, \vec{g}_0^{\,2} = \begin{pmatrix} 521 & 380 \\ 440 & 313 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 405 \\ 449 \end{pmatrix}, \vec{g}_0^{\,3} = \begin{pmatrix} 555 & 404 \\ 440 & 313 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 533 \\ 643 \end{pmatrix}$$

Як видно з рис.2, області, центри яких можуть бути обрані за початкове наближення розв’язку (9) загальної ІСЛАР (12), абсолютно різні, до того ж області не перетинаються, що ускладнює вибір того насиченого блоку, який дає найкраще наближення до розв'язку усієї ІСЛАР.

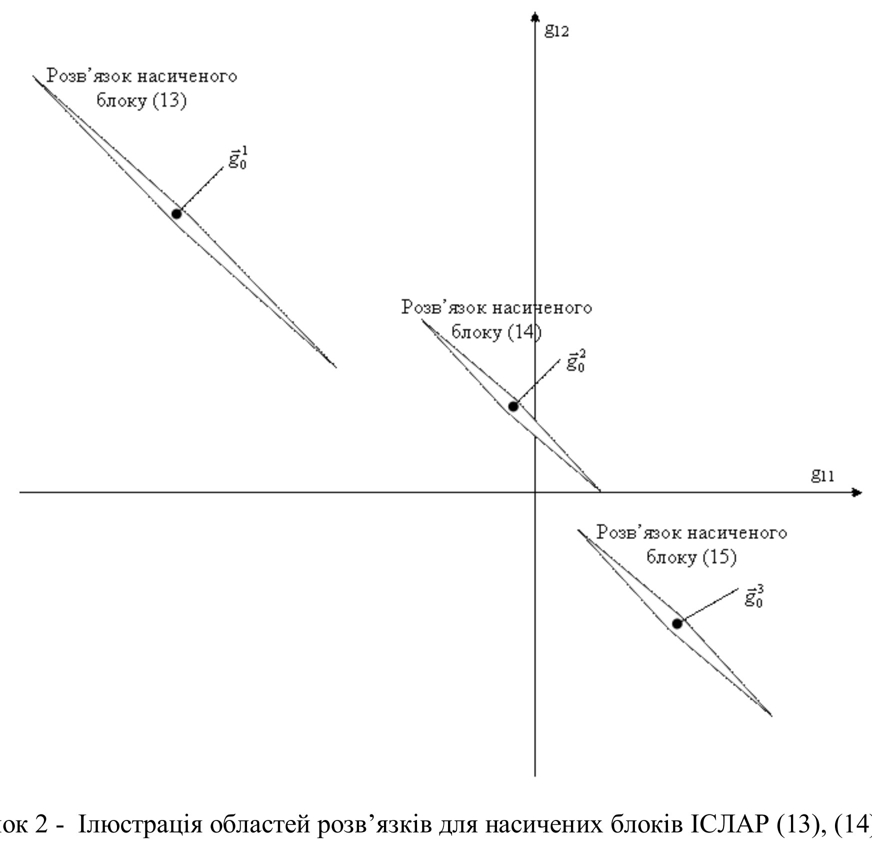

Рисунок 2 - Ілюстрація областей розв’язків для насичених блоків ІСЛАР (13), (14), (15).

Тепер знайдемо загальний розв'язок ІСЛАР (12) у вигляді множини (9).

Графічний розв'язок ІСЛАР отримуємо у вигляді, наведеному на рис. 3. Із рисунка видно, що загальний розв'язок утворений із двох незв'язаних областей, причому одна з областей є незамкненою, що суттєво ускладнює пошук допустимої області розв'язків ІСЛАР.

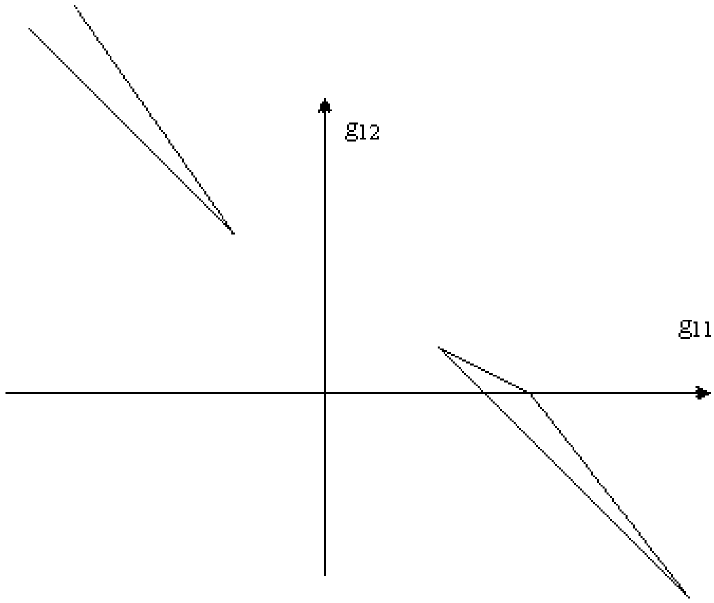

Рисунок 3 - Ілюстрація загального розв'язку ІСЛАР.

Зіставлення рисунків 2 та 3 також дозволяє зробити висновок, що принаймні початкове наближення $\vec{g}_0^{2}$ розв'язку (9) загальної ІСЛАР (12), знайдене із розв'язку системи (14), є надзвичайно грубим. Таким чином, для розробки високоефективних алгоритмів параметричної ідентифікації слід проводити попереднє дослідження ІСЛАР шляхом виділення насичених блоків та їх аналізу з метою вибору більш точного початкового наближення для ітераційних процедур і зниження їх часової складності.

Висновки

1. Для побудови алгоритмів параметричної ідентифікації дискретних динамічних моделей, суть яких полягає у розв'язуванні ІСЛАР, повинна враховуватись особливість формування ІСЛАР на основі інтервальних даних та структури рівняння динаміки, зокрема, еквівалентність областей розв'язків Ω_{dop}, $\Omega_{dop\ \forall\exists}$ та $\Omega_{dop\ \forall\forall}$.

2. Вибір початкової точки для розв'язування задач параметричної ідентифікації у відомих алгоритмах є необґрунтованим. При розробці алгоритмів параметричної ідентифікації слід проводити попередній аналіз ІСЛАР шляхом виділення насичених блоків, який дозволить покращити вибір початкової точки ітераційних процедур і зменшити часову складність алгоритмів.

Література

1. Кунцевич В., Лычак М.. Получение гарантированных оценок в задачах параметрической идентификации // Автоматика. – 1982. - №4. – С.49-59.
2. Куржанский А.Б.. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. – 1991. - №4. – С.3-26
3. Дивак М.П. Використання насиченого експерименту для оцінювання параметрів інтервальної моделі при аналізі інтервальних даних // Міжвузівський науково-технічний журнал Автоматика. Автоматизація. Електротехнічні комплекси і системи. -1999. - №2.- С.33-36.
4. M. Dyvak, I. Kalishchuk, Ye. Martsenyuk. Interval identification of dynamic model of realization of bakery produce //Proc. of International Conference Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science, TCSET'2006 -Lviv-Slavske: National University „Lviv Polytechnic". –2006. P. 159-163.

Одержано 27.06.2006 р.