УДК 519.866; 330.115

М.Бойчук[1], канд.фіз.-мат.наук; Н.Шмуригіна[2]

[1]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
[2]Буковинський університет

ОПТИМІЗАЦІЯ СТАТИЧНОГО МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ З УРАХУВАННЯМ КОНТРОЛЮ НАД ЗАБРУДНЕННЯМ З ЛАГАМИ

Запропоновано модель статистичного міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням з лагами. Проведено її дослідження, в результаті якого запропоновано алгоритми обчислення магістральних значень капіталу, інвестицій, невиробничого споживання, трудових ресурсів, валового випуску основної продукції та продукції допоміжного виробництва, кінцевої продукції, крайових керувань – значень інвестицій, а також точки перемикання керувань інвестиціями.

M. Boichuk, N. Shmurygina

OPTIMIZATION OF STATIC INTERSECTOR BALANCE TAKING INTO ACCOUNT CONTROL ABOVE CONTAMINATION WITH LAGS

The offered model of statistical intersector balance taking into account the control above contamination with lags. Its research, as a result of which the offered algorithms of calculation of main values of capital, investments, unproductive consumption, labour resources, gross issue of basic products and products of auxiliary production, eventual products, is conducted, regional managements – values of investments, and also points of switching of managements by investments.

Умовні позначення

$A=(a_{kj}),(n\times n)-$ матриця матеріальних витрат продукції k на випуск одиниці продукції j;

$B=(b_{kj}),(n\times m)-$ матриця витрат продукції k на знищення одиниці забруднювачів j;

$R=(r_{kj}),(m\times n)-$ матриця випуску забруднювачів k під час випуску одиниці продукції j;

$D=(d_{kj}),(m\times m)-$ матриця випуску забруднювачів k під час знищення одиниці забруднювачів j;

$X^{(1)},(n\times 1)-$ вектор-стовпець валового випуску основної продукції;

$X^{(2)},(m\times 1)-$ вектор-стовпець знищених забруднювачів (продукції допоміжного виробництва);

$Y^{(1)},(n\times 1)-$ вектор-стовпець кінцевої продукції;

$Y^{(2)},(m\times 1)-$ сталий заданий вектор-стовпець об’ємів незнищених забруднювачів;

$I,(n\times 1)-$ вектор-стовпець інвестицій, що вводяться в дію;

$V,(n\times 1)-$ вектор-стовпець введених інвестицій;

$Q=(q_{kj}),(n\times n)-$ матриця чистих капіталовкладень в основне виробництво, q_{kj} - частка вкладання капіталовкладень $j-$ою галуззю в $k-$у галузь;

$C-$ невиробниче споживання;

$K-$ основні виробничі фонди;

$L-$ трудові ресурси;

$\mu-$ норми амортизації капіталів;

$\sigma-$ норми амортизації інвестицій.

В даній роботі проводиться дослідження однієї з важливих, з прикладної точки зору, економічних задач – оптимізація статичного міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням з лагами. Процес описується моделлю економічної динаміки, в основу якої покладено міжгалузевий баланс, а потужності секторів описуються виробничими функціями.

Модель міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням з лагами набуває вигляду [1, 2]:

$$X_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}X_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{m}b_{kj}X_j^{(2)}+Y_k^{(1)},\ k\in\{1,...,n\},$$

$$X_k^{(2)}=\sum_{j=1}^{n}r_{kj}X_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{m}d_{kj}X_j^{(2)}-Y_k^{(2)},\ k\in\{1,...,m\},$$

$$Y_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}q_{kj}V_j+C_k,\ \dot{K}_k=V_k-\mu_k K_k,\ K_k(0)=K_{k0},\ k\in\{1,...,n\},$$

$$\dot{V}_k=\sigma_k I_k-\sigma_k V_k,\ V_k(0)=V_{k0},\ k\in\{1,...,n\},$$

$$\sum_{k=1}^{n}L_k\le N,\ 0\le X_k^{(1)}\le F_k(t,K_k,L_k),\ I_k\ge 0,\ V_k\ge 0,\ K_k\ge 0,\ C_k\ge C_k^{\min},\ k\in\{1,...,n\}. \qquad (1)$$

Перші три рівності описують міжгалузевий баланс з урахуванням контролю над забрудненням. Четверте і п’яте рівняння – рух капіталу та введених інвестицій.

Нерівності в п’ятому рядку означають обмеженість на сумарну робочу силу галузей, валову продукцію, ті, що вводяться та введені інвестиції, невиробниче споживання та капітал. Функції F_k є виробничими функціями кожної галузі з властивостями [3].

Критерієм оптимальності служить максимізація інтеграла

$$R(\pi)=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}g(t,C)dt\to\max_{\pi\in M}, \qquad (2)$$

де $M-$множина процесів, які допускають виконання умов (1); $\delta-$норма дисконтинування.

На функцію корисностей g накладають такі вимоги: двічі неперервно-диференційована за C та неперервна при $t\ge 0$; монотонно зростаюча за C; угнута за C; $\lim\limits_{C\to 0}\frac{\partial g}{\partial C}=\infty$, $\lim\limits_{C\to\infty}\frac{\partial g}{\partial C}=0$.

З точки зору теорії оптимального керування, в задачі (1)-(2) фазовою траєкторією виступає стан капіталів $K=(K_1,...,K_n)$, а керування має зміст розподілу введених та тих, що вводяться, інвестицій і робочої сили між галузями, кінцевого випуску продукції між інвестиціями, що вводяться та споживанням, загруженістю галузей і робочої сили, а також експорту та імпорту в допустимих квотах.

Матриця структури капіталовкладень $Q-$ невід’ємна, причому $q_{kj}>0$ при всіх $k>s$, $j\in\{1,...,n\}$. Галузі з номерами $k\le s$ такі, що для кожної $k\le s$ існує хоча б одне j, при якому $q_{kj}>0$, називаються фондоутворюючими. Для кожної галузі j знайдеться фондоутворююча галузь k така, що $q_{kj}>0$, причому $\sum_{k=1}^{n}q_{kj}=1$ для всіх $j\in\{1,...,n\}$.

1. Умови оптимальності процесу економічного розвитку

В задачі (1)-(2) роль параметрів стану відіграє вектор капіталу $K=(K_1,...,K_n)$, а інші змінні $X^{(1)},X^{(2)},Y^{(1)},V,I,L,C-$компоненти вектора керування.

З другого рівняння (1) виразимо $X^{(2)}$ і підставимо в перше рівняння, отримаємо

$$X_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n}(a_{kj}+z_{kj})X_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{m}u_{kj}Y_j^{(2)} + Y_k^{(1)},\ k\in\{1,...,n\}, \tag{3}$$

де матриці $U = B\cdot(E-D)^{-1}$, $Z = U\cdot R$.

Згідно з достатніми умовами оптимальності [2, с.382-385], треба оптимізувати дві функції:

$$R(t,K,C,V,I) = \sum_{k=1}^{n}\{\frac{\partial\varphi(t,K,V)}{\partial K_k}[-\mu_k K_k + V_k] + \frac{\partial\varphi(t,K,V)}{\partial V_k}[-\sigma_k V_k + \sigma_k I_k]\} + e^{-\delta t}g(t,C) +$$

$$+\frac{\partial\varphi(t,K,V)}{\partial t} \to \max,$$

$$\lim_{t\to\infty}\min_{K,V\ge 0}\varphi(t,K,V). \tag{4}$$

Невідому функцію φ будемо шукати у вигляді

$$\varphi(t,K) = \sum_{k=1}^{n}\{\psi_k^{(1)}(t)K_k + \psi_k^{(2)}V_k\},$$

де функції $\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}$ треба знайти і які є кусково-диференційованими функціями при $t\ge 0$. Тоді (4) набуває вигляду

$$R = \sum_{k=1}^{n}\{[\dot\psi_k^{(1)} - \mu_k\psi_k^{(1)}]K_k + [\dot\psi_k^{(2)} - \sigma_k\psi_k^{(2)} + \psi_k^{(1)}]V_k\} + \sum_{k=1}^{n}\psi_k^{(2)}\sigma_k I_k + e^{-\delta t}g(t,C) \to \max,$$

$$\lim_{t\to\infty}\min_{K_k\ge 0}\psi_k^{(1)}(t)K_k = 0,\ \lim_{t\to\infty}\min_{V_k\ge 0}\psi_k^{(2)}(t)V_k = 0\ \ \forall k\in\{1,...,n\}. \tag{5}$$

Застосуємо метод множників Лагранжа до функції R, маємо

$$\tilde R = \sum_{k=1}^{n}\{[\dot\psi_k^{(1)} - \mu_k\psi_k^{(1)}]K_k + [\dot\psi_k^{(2)} - \sigma_k\psi_k^{(2)} + \psi_k^{(1)}]V_k\} + \sum_{k=1}^{n}\psi_k^{(2)}\sigma_k I_k + e^{-\delta t}g(t,C) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(X_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{n}(a_{kj}+z_{kj})X_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{m}u_{kj}Y_j^{(2)} - \sum_{j=1}^{n}q_{kj}V_j - C_k\right) + \gamma\left(N - \sum_{k=1}^{n}L_k\right) \to \max_M. \tag{6}$$

Тут $\gamma(t\ge 0)$, $\lambda_k(t\ge 0)$, $k\in\{1,...,n\}$ - відповідні множники Лагранжа, які є кусково-неперервними функціями. Введемо позначення

$$G(t,C) = e^{-\delta t}g(t,C) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k C_k,\ h_k = \lambda_k - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(a_{jk}+z_{jk}),$$

$$\omega_k^{(1)} = \dot\psi_k^{(2)} - \sigma_k\psi_k^{(2)} + \psi_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{n}q_{jk}\lambda_j,\ \omega_k^{(2)} = \psi_k^{(2)}\sigma_k,$$

$$P_k = -\dot\psi_k^{(1)} + \mu_k\psi_k^{(1)},\ R_k(t,K,X^{(1)},L) = -P_k K_k + h_k X_k^{(1)} - \gamma L_k. \tag{7}$$

Тоді

$$\tilde R = \sum_{k=1}^{n}R_k(t,K,X^{(1)},L) + \sum_{k=1}^{n}\{\omega_k^{(1)}V_k + \omega_k^{(2)}I_k\} + G(t,C) + \gamma N + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{j=1}^{m}u_{kj}Y_j^{(2)}. \tag{8}$$

Задача (6) набуває вигляду в нових позначеннях

$$R_k(t,K,X^{(1)},L) \to \max_{\substack{0\le X_k^{(1)}\le F_k(t,K,L),\\ K_k\ge 0, L_k\ge 0}},\ G(t,C) \to \max_{C_k\ge C_k^{\min}}, \tag{9}$$

$$\max_{V_k\ge 0}\omega_k^{(1)}V_k = 0,\ \max_{I_k\ge 0}\omega_k^{(2)}I_k = 0\ \ \forall k,t. \tag{10}$$

Друга задача в (4) розпадається на дві такі задачі

$$\lim_{t\to\infty}\min_{K_k\ge 0}\psi_k^{(1)}(t)K_k=0,\ \lim_{t\to\infty}\min_{V_k\ge 0}\psi_k^{(2)}(t)V_k=0\ \ \forall k\in\{1,...,n\}. \tag{11}$$

Умови (11) є узагальненими для достатніх умов оптимальності на випадок нескінченного проміжку часу.

Пошук оптимального режиму економічного розвитку зводиться до максимізації функцій $R_k(t,K,X^{(1)},L)$ і $G(t,C)$ та підбору таких множників $\psi_k^{(1)}(t),\psi_k^{(2)}(t),\lambda_k(t),\gamma(t)$, щоб цей процес $\pi\in M$ виявився допустимим.

Введені тут математичні конструкції мають наочний економічний зміст.

Нехай в досліджуваній економічній системі маємо ринкові відношення. Обмін в моделі виробничих факторів проходить згідно з заданими цінами $\psi_k^{(1)}(t),\psi_k^{(2)}(t),\lambda_k(t),\gamma(t)$ відповідно за одиницю $k-$го продукту, виробничих фондів $k-$ї галузі та праці, які називаються об'єктивно зумовленими оцінками. Нехай заданий процес $\pi=\left\{X^{(1)}(t),X^{(2)}(t),Y^{(1)}(t),Y^{(2)}(t),K(t),V(t),I(t),t\ge 0\right\}$, який задовольняє тільки обмеження моделі (1) (нерівності 4 рядка). Це означає, що $k-$а галузь в момент часу t виробляє потік продукції $X_k^{(1)}$, використовуючи такі фонди K_k та трудові ресурси L_k, що $X_k^{(1)}\le F_k(t,K_k,L_k)$. Тоді величина $R_k(t,X^{(1)},K,L)$ є потоком прибутку галузі, який одержується як різниця між вартістю валового продукту та затратами, необхідними для виробництва продукції інших галузей $((a_{jk}+z_{jk})\lambda_j)X_k^{(1)}$ і робочої сили γL_k, а також вартістю вибутої частини виробничих фондів $P_k K_k$. Останнє зумовлено фізичним зношенням фондів $\mu_k\psi_k^{(1)}K_k$ і безпосередньою зміною їх цін $\dot{\psi}_k^{(1)}K_k$. Купівля набору продуктів C_k забезпечує потік корисності $e^{-\delta t}g(t,C)$. Наявність різниці між об'єктивною корисністю та закупівельною вартістю споживання, згідно з назначеними цінами $\lambda_k C_k$, зумовлюють прибуток $G(t,C)$. Останній природно назвати комерційним прибутком на відміну від виробничого прибутку R_k.

У частинному випадку, коли корисність має зміст фондів споживання, який виражений в цінах зовнішнього ринку $g=\sum_{k=1}^{n}\theta_k C_k$, цей прибуток $G=\sum_{k=1}^{n}(e^{-\delta t}\theta_k-\lambda_k)C_k$ зумовлений різницею між дисконтованою до початку моменту зовнішньою ціною $e^{-\delta t}\theta_k$ і ціною λ_k. Звідси, множники $\psi_k^{(1)},\psi_k^{(2)},\lambda_k,\gamma$ мають зміст дисконтованих до початку моменту внутрішніх цін відповідних факторів на описаному ринку. Зміст поточних цін мають величини:

$$\overline{\lambda}_k(t)=\lambda_k(t)e^{\delta t},\ \overline{\psi}_k^{(1)}(t)=\psi_k^{(1)}(t)e^{\delta t},\overline{\psi}_k^{(2)}(t)=\psi_k^{(2)}(t)e^{\delta t},\ \overline{\gamma}(t)=\gamma(t)e^{\delta t}.$$

Функція $\widetilde{R}$ є сумарним прибутком, утвореним виробничим прибутком галузей та комерційним прибутком. Додатковий доданок γN являє собою оплату робочої сили.

Режим розвитку економіки, визначений (9)-(11), назвемо оптимальним при даних цінах. Він забезпечує максимум всіх видів прибутку в кожний момент часу в умовах описаного вище механізму ринкової економіки з заданими цінами. При цьому має місце повна незалежність всіх видів прибутку: виробничого в кожній окремій галузі та комерційного.

Ціни $\zeta=(\psi^{(1)},\psi^{(2)},\lambda,\gamma)\in\Pi$ назвемо допустимими. Оптимальний при даних цінах план π може не задовольняти умови зв'язку моделі (1) (перші чотири рядки), тобто може бути незбалансованим. Тому для виконання достатніх умов оптимальності підбір цін повинен додатково забезпечити збалансованість оптимального при даних цінах плану π.

2. Властивості допустимих цін і оптимальних режимів розвитку економіки

1) Згідно з (9), споживання $C(t\ge 0)$ забезпечує максимум комерційного прибутку $G(t,C)$. Необхідною умовою існування цього максимуму є невід'ємність вектора $\lambda(t)$ при кожному $t\ge 0$. Якщо $g=\sum_{k=1}^{n}\theta_k C_k$, то внутрішні поточні ціни не нижчі за зовнішні: $\bar{\lambda}_k \ge \theta_k$, $k\in\{1,...,n\}$. При $C_k > C_k^{\min}$ маємо $\bar{\lambda}_k = \dfrac{\partial g(t,C)}{\partial C_k}$. Якщо ж $\bar{\lambda}_k > \dfrac{\partial g(t,C)}{\partial C_k}$, то $C_k = C_k^{\min}$. У випадку лінійної функції корисності $g=\sum_{k=1}^{n}\theta_k C_k$ значення $C_k > C_k^{\min}$ можливі тільки при такому $k=l$, для якого $\dfrac{\theta_l}{\bar{\lambda}_l}=\max_k \dfrac{\theta_k}{\bar{\lambda}_k}=1$. Надлишкова галузь l є єдиною.
2) Згідно з (9), оптимальний продукт галузі $X_k^{(1)}$, капітал K_k та робоча сила L_k повинні забезпечити максимум прибутку R_k. А це можливо при

$$X_k^{(1)}=\begin{cases} F_k\,(t,K_k,L_k),\ \textit{якщо}\ h_k>0,\\ 0,\ \textit{якщо}\ h_k<0,\\ \textit{невизначено},\ \textit{якщо}\ h_k=0.\end{cases} \quad (12)$$

Матриця $(A+Z)$ нерозкладувана, тобто для того, щоб $X_k^{(1)}>0$ хоча б для одного $k=l$, необхідно, щоб $X_k^{(1)}>0$ для всіх $k\in\{1,...,n\}$. Тому значення $X_k^{(1)}=0$ недопустимі і відповідно $h_k\ge 0$ для всіх $k\in\{1,...,n\}$ та $t\ge 0$.

Позначимо

$$\tilde{R}_k=\max_{0\le X_k^{(1)}\le F_k\,(t,K_k,L_k)} R_k=h_k F_k\,(t,K_k,L_k)-P_k\,K_k-\gamma L_k\,. \quad (13)$$

Враховуючи лінійну однорідність виробничих функцій F_k, можемо записати

$$\tilde{R}_k=\tilde{r}_k\,(t,k_k)L_k,$$

де $k_k=K_k/L_k-$ фондоозброєність, $\tilde{r}_k\,(t,k_k)=h_k\,f_k\,(t,k_k)-P_k\,k_k-\gamma-$ виробничий прибуток галузі за одиницю праці. Оскільки $L_k>0$ для всіх k та t, отримаємо необхідні та достатні умови максимуму $\tilde{R}_k$ за K_k та L_k

$$\tilde{r}_k\,(t,\hat{k}_k)=\max_k \tilde{r}_k\,(t,k_k) \quad (14)$$

для всіх k та t. Для існування такого $\hat{k}_k$ необхідно, щоб $P_k>0$, $\gamma>0$ для всіх k та t. Якщо $h_k>0$ та $f_k\,(t,k_k)>0$, $P_k>0$, $\gamma>0$, то існує $\hat{k}_k>0$.

3) Вектор $H=(h_1,...,h_n)$ виражається через вектор $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ матричною формулою

$$H = (E - A^T - Z^T)\lambda \,. \tag{15}$$

4) Із (12) згідно з (14) випливає повна загруженість галузей на оптимальному режимі:

$$X_k^{(1)} = F_k\,(t, K_k, L_k)\,,\ k \in \{1,\ldots,n\}\,;\ t \ge 0\,.$$

На основі властивості обмеженості на сумарну робочу силу маємо

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(t) = N(t)\,,\ t \ge 0\,.$$

5) Використовуючи (13) та (14), одержимо

$$h_k \frac{\partial F_k\,(t, K_k, L_k)}{\partial L_k} = \gamma\,,\ h_k \frac{\partial F_k\,(t, K_k, L_k)}{\partial K_k} = P_k$$

для всіх k та $t \ge 0$. Якщо позначити $\eta_k(t, k_k) = \dfrac{\partial F_k / \partial L_k}{\partial F_k / \partial K_k}$, $\tilde{P}_k = P_k/\gamma$, тоді $\tilde{P}_k \eta_k(t, k_k) = 1$.

У частинному випадку, для виробничої функції Кобба-Дугласа

$F_k = a_k e^{\chi_k t} (K_k)^{\alpha_k} (L_k)^{\beta_k}$ маємо

$$\eta_k(t, k_k) = \frac{\beta_k}{\alpha_k} k_k\,,\ k_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k} (\tilde{P}_k)^{-1}. \tag{16}$$

Позначивши $\tilde{h}_k = h_k/\gamma$, $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k/\gamma$ з (15), одержимо

$$\tilde{\lambda} = (E - A^T - Z^T)^{-1} \tilde{H}\,,\ \tilde{h}_k = \left(\frac{\partial F_k\,(t, K_k, L_k)}{\partial L_k} \right)^{-1},\ k \in \{1,\ldots,n\}\,, \tag{17}$$

тобто відносні ціни всіх галузей залежать від відносних цін зношення фондів.

6) Максимум (8) за $V_k\,, I_k$ знаходиться при умовах $\omega_k^{(2)} = \psi_k^{(2)} \sigma_k \le 0$,

$$\omega_k^{(1)} = \dot{\psi}_k^{(2)} - \sigma_k \psi_k^{(2)} + \psi_k^{(1)} - \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \lambda_j \le 0\,.$$

Тоді $V_k = \begin{cases} 0, & якщо\ \dot{\psi}_k^{(2)} - \sigma_k \psi_k^{(2)} + \psi_k^{(1)} - \sum\limits_{j=1}^{n} q_{jk} \lambda_j < 0, \\ > 0, & якщо\ \dot{\psi}_k^{(2)} - \sigma_k \psi_k^{(2)} + \psi_k^{(1)} - \sum\limits_{j=1}^{n} q_{jk} \lambda_j = 0, \end{cases}$ $\quad I_k = \begin{cases} 0, & якщо\ \psi_k^{(2)} \sigma_k < 0, \\ > 0, & якщо\ \psi_k^{(2)} \sigma_k = 0, \end{cases}$

тобто ненульові введені і ті, що вводяться в галузь, інвестиції оптимальні тільки при наявності рівності.

Назвемо $k-$у галузь розвиваючою в момент часу t, якщо $V_k\,(t) > 0$, $I_k(t) > 0$ і нерозвиваючою, якщо $V_k\,(t) = 0$, $I_k(t) = 0$. Якщо всі галузі розвиваючі, то

$$\psi_k^{(2)} = 0\,,\ \psi_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \lambda_j\,,\ k \in \{1,\ldots,n\}\,,$$

тобто ціни фондів всіх n галузей залежать від ціни фондоутворюючих продуктів λ_j, $j \in \{1,\ldots,s\}$. Ціни зношення з урахуванням (7) та фондоозброєності галузей k_k в цьому випадку також залежать від цін фондів та праці:

$$\tilde{P}_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk} (\mu_k \tilde{\lambda}_j - \nu_j)\,,\ \nu_j = \frac{\dot{\lambda}_j}{\gamma}\,,\ k \in \{1,\ldots,n\}\,,\ j \in \{1,\ldots,s\}\,. \tag{18}$$

Якщо відомі ціни фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(t),\psi_k^{(1)}(t),\psi_k^{(2)}(t)$, ціна праці $\gamma(t)$, $t\geq 0$, то з (18) знаходимо ціни зношення $\tilde{P}_k$, $k\in\{1,...,n\}$, з (16) – магістральні фондоозброєності $k_{kmag}(t\geq 0)$, з (17) – ціни нефондоутворюючих продуктів λ_k, $k>s$.

Таким чином, ціни всіх продуктів і фондів $\lambda_k(t),\psi_k^{(1)}(t),\psi_k^{(2)}(t)$, $t\geq 0$, а також магістральні фондоозброєності $k_{kmag}(t\geq 0)$ залежать від ціни праці $\gamma(t)$ та цін фондоутворюючих продуктів λ_k, $k\in\{1,...,s\}$.

7) Згідно з (5) маємо

$$\lim_{t\to 0}\psi_k^{(1)}(t)K_k(t)=\infty,\ \lim_{t\to 0}\psi_k^{(2)}(t)V_k(t)=\infty\ k\in\{1,...,n\}.$$

3. Рівняння оптимального збалансованого плану

Говорити про конкретні особливості оптимальної траєкторії можна тільки при достатньо конкретних припущеннях про явну залежність вхідних змінних від часу. Будемо орієнтуватися на випадок сталих і не залежних явно від часу матриць A,B,R,D,Q, виробничих функцій F_k та корисності g, беручи до уваги, що виявлені для даного випадку особливості зберігаються і при відхиленні в помірних межах від цін припущень.

Задамо $\lambda_k=\lambda_{k0}e^{-\delta t}$, $k\in\{1,...,n\}$; $\gamma=\gamma_0 e^{-\delta t}$,

де λ_{k0},γ_0 – константи, які треба визначити. Тоді

$$\tilde{\lambda}_k=\frac{\lambda_{k0}}{\gamma_0},\ \tilde{P}_k=\sum_{j=1}^{n}q_{jk}(\mu_k+\delta)\tilde{\lambda}_j$$

і система (17) при $k\in\{1,...,s\}$ представляє собою нелінійну систему рівнянь з s невідомими $\tilde{\lambda}_k$, $k\in\{1,...,s\}$. Позначимо її розв'язок $\tilde{\lambda}^*$. Тоді $\tilde{P}_k^*$, k_k^* відповідні цьому розв'язку значення з врахуванням рівності (16). Значення змінних $\tilde{\lambda}_j$, $j\in\{s+1,...,n\}$ обчислюємо за формулою (17).

Таким чином, знайдено деяку допустиму систему цін $\lambda,\gamma,\psi^{(1)},\psi^{(2)}$, визначену з точністю константи γ_0, якій відповідає сталий вектор оптимальної фондоозброєності k.

Із умови $K_k=const$, $V_k=const$ випливає, згідно з четвертим та шостим рівняннями (1),

$$V_k=\mu_k K_k,\ I_k=V_k.$$

Враховуючи, що $K_k=k_k L_k$, із (3) отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n}(E-A-Z)_{kj}f_j(t,k_j)L_j=-\sum_{j=1}^{m}u_{kj}Y_j^{(2)}+\sum_{j=1}^{n}q_{kj}\mu_j k_j L_j+C_k,\ k\in\{1,...,n\}, \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n}L_j=N. \tag{20}$$

Нехай $g(C)=\sum_{k=1}^{n}\theta_k C_k$. Знайдемо $\frac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l}=\max_k\frac{\theta_k}{\tilde{\lambda}_k}$ і задамо $\gamma=\frac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l}$. Це означає, що $\bar{\lambda}_l=\theta_l$ та $\lambda_k>\theta_k$, $k\neq l$, тобто $C_k^*=C_k^{\min}$, $k\neq l$, а C_l не визначено. Підставляючи ці значення в (19), (20), отримаємо систему $(n+1)$ лінійних рівнянь відносно $(n+1)$ невідомих L_k,C_l. Вважаємо, що існує розв'язок даної системи: $L_k^*>0$, $C_l^*\geq C_l^{\min}$. Отриманий розв'язок k_k^*, C_k^*, L_k^*, $K_k^* = k_k^* L_k^*$, $V_k^* = \mu_k K_k^*$, $I_k^* = V_k^*$, $X_k^{(1)*} = f_k(k_k^*) L_k^*$, $X^{(2)*} = (E-D)^{-1}(RX^{(1)*} - Y^{(2)})$, $Y^{(1)*} = QI^* + C^*$ представляє собою шуканий план.

Шуканий оптимальний режим мінімізує відхилення від стаціонарного режиму. При $t \to \infty$ має місце збіжність показників оптимального плану до стаціонарних.

Якщо вхідні показники залежать від часу, то стаціонарний режим відсутній, але існує деякий його аналог, який представляє собою врівноважений розвиток, зумовлений екзогенною зміною вхідної інформації.

Ціни та фондоозброєності галузей k_k не залежать від вибору функції корисності $g(C)$, що співпадає з трудовою теорією вартості.

4. Граничні умови та відповідні їм ділянки оптимального режиму

Ліві крайові траєкторії знаходяться з таких задач Коші:

$$\begin{cases} \dot{K}_k = V_k - \mu_k K_k, \\ K_k(0) = K_{k0}, \ k \in \{1,...,n\}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{V}_k = \sigma_k I_k - \sigma_k V_k, \\ V_k(0) = V_{k0}, \quad k \in \{1,...,n\}. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, отримаємо

$$K_k(t) = K_{k0} e^{-\mu_k t} + \int_0^t V_k(s) e^{-\mu_k (t-s)} ds, \ V_k(t) = V_{k0} e^{-\sigma_k t} + \sigma_k I_k \int_0^t e^{-\sigma_k (t-s)} ds, \ k \in \{1,...,n\}.$$

Перетин лівої крайової траєкторії з магістраллю дає точку переключення τ. Її можна визначити з такої задачі математичного програмування:

$$\min \tau, \ 0 \le \frac{K_{kmag}^* - K_{k0} e^{-\mu_k \tau} - \dfrac{V_{k0}}{\mu_k - \sigma_k}\left(e^{-\sigma_k \tau} - e^{-\mu_k \tau}\right)}{\dfrac{1 - e^{-\mu_k \tau}}{\mu_k} - \dfrac{e^{-\sigma_k \tau} - e^{-\mu_k \tau}}{\mu_k - \sigma_k}} \le I_{kmag}^*, \ \tau \ge 0, \ \forall k,$$

де

$$I_{kmag}^* = \begin{cases} I_{kmag}, & K_{k0} \le K_{kmag}, \\ \dfrac{K_{k0}}{K_{kmag}} I_{kmag}, & K_{k0} > K_{kmag}, \end{cases} \qquad K_{kmag}^* = \begin{cases} K_{kmag}(1-\varepsilon_k), & K_{k0} \le K_{kmag}, \\ K_{kmag}(1+\varepsilon_k), & K_{k0} > K_{kmag}. \end{cases}$$

Оскільки кожна компонента лівої крайової траєкторії $K_k(t)$ при прямуванні t до безмежності наближається знизу при $K_{k0} \le K_{kmag}$ або зверху $K_{k0} > K_{kmag}$ до відповідної компоненти магістралі K_{kmag} і їх не перетинають, тому введені досить малі додатні величини ε_k, щоб ліва крайова траєкторія перетинала $K_{kmag}(1-\varepsilon_k)$ при $K_{k0} \le K_{kmag}$ або $K_{kmag}(1+\varepsilon_k)$ при $K_{k0} > K_{kmag}$.

Після знаходження точки переключення τ можна знайти компоненту лівого керування за формулами:

$$I_{kl} = \frac{K_{kmag}^* - K_{k0} e^{-\mu_k \tau} - \dfrac{V_{k0}}{\mu_k - \sigma_k}\left(e^{-\sigma_k \tau} - e^{-\mu_k \tau}\right)}{\dfrac{1 - e^{-\mu_k \tau}}{\mu_k} - \dfrac{e^{-\sigma_k \tau} - e^{-\mu_k \tau}}{\mu_k - \sigma_k}}.$$

Опишемо послідовність розв'язання задачі.

1. Знаходимо стаціонарний режим ς^*, π^*.
2. Визначаємо ліву крайову траєкторію.
3. Знаходимо лівий момент переключення керувань.
4. Обчислюємо ліве керування.

5. Приклад числового моделювання статичного міжгалузевого балансу з врахуванням контролю над забрудненням з лагами

Проведено дослідження моделі статичного міжгалузевого балансу з лагами при таких даних: $n=3$, $\mu_1 = 0{,}045$, $\mu_2 = 0{,}04$, $\mu_3 = 0{,}05$; $\sigma_1 = 0{,}008$, $\sigma_2 = 0{,}009$, $\sigma_3 = 0{,}007$; $\delta = 0{,}05$; $s=1$; $N = 50$; макровиробничі функції $F_1(K_1, L_1) = 10(K_1)^{1/2}(L_1)^{1/2}$, $F_2(K_2, L_2) = 12(K_2)^{1/3}(L_2)^{2/3}$, $F_3(K_3, L_3) = 15(K_3)^{1/4}(L_3)^{3/4}$,

матриці $A = \begin{pmatrix} 0.403 & 0.5 & 0.096 \\ 0.092 & 0.03 & 0.226 \\ 0.92 & 0.06 & 0.54 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.007 \\ 0.09 & 0.25 \\ 0.9 & 0.59 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$R = \begin{pmatrix} 0.002 & 0.007 & 0.008 \\ 0.006 & 0.003 & 0.004 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.55 \\ 0.67 & 0.01 \end{pmatrix}$, $Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$;

$K_{10} = 12$, $K_{20} = 4$, $K_{30} = 10$; $V_{10} = 1$, $V_{20} = 0.26$, $V_{30} = 0.4$;

$C_1^{\min} = 2$, $C_2^{\min} = 3$, $C_3^{\min} = 4$.

В результаті розрахунку одержали магістраль:

- ціни зношення $\tilde{P}_1 = 0.964$, $\tilde{P}_2 = 0.913$, $\tilde{P}_3 = 1.015$;
- ціни продуктів $\tilde{\lambda}_1 = 9.726$, $\tilde{\lambda}_2 = 5.649$, $\tilde{\lambda}_3 = 5.42$;
- надлишкова галузь $l=3$;
- початкове значення ціни праці $\gamma_0 = 0.055$;
- початкові значення цін продуктів $\lambda_{10} = 0.538$, $\lambda_{20} = 0.313$, $\lambda_{30} = 0.3$;
- трудові ресурси $L_1 = 13.042$, $L_2 = 9.327$, $L_3 = 27.63$;
- невиробниче споживання $C_1 = 2$, $C_2 = 3$, $C_3 = 5.928$;
- капітал $K_1 = 13.527$, $K_2 = 5.029$, $K_3 = 9.074$;
- валовий випуск основної продукції $X_1^{(1)} = 132.824$, $X_2^{(1)} = 91.289$, $X_3^{(1)} = 313.751$;
- знищені забруднювачі $X_1^{(2)} = 7.277$, $X_2^{(2)} = 7.072$;
- кінцева продукція $Y_1^{(1)} = 3.264$, $Y_2^{(1)} = 3$, $Y_3^{(1)} = 5.928$;
- введені інвестиції $V_1 = 0.609$, $V_2 = 0.201$, $V_3 = 0.454$;
- інвестиції, що вводяться $I_1 = 0.609$, $I_2 = 0.201$, $I_3 = 0.454$;
- лівий момент перемикання $\tau = 9.63$;
- ліве керування за інвестиціями $I_{1l} = 0.074$, $I_{2l} = 0.2$, $I_{3l} = 0.141$;
- лаги $\tau_{lag} = 4.815$.

Економічне обґрунтування для отриманих результатів таке: спочатку на часовому проміжку (0;9.63) перша галузь виробництва вкладає 87.282% капіталу на споживання і 12.718% на накопичення відносно кінцевої продукції; а друга і третя галузі весь свій капітал вкладають на споживання, накопичення капіталу немає. Починаючи з моменту переключення $\tau = 9.63$, розвиток всіх галузей іде за магістральним режимом.

Висновки

1. Проведено дослідження моделі статичного міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням з лагами у припущенні заданого об'єму незнищених забруднювачів.

2. Запропоновано алгоритм обчислення магістральних значень керувань та відповідних траєкторій, лівих траєкторій, відповідних їй лівих керувань та точки переключення керувань.

Література

1. Григорків В.С., Білоскурський Р.Р. Деякі оптимізаційні моделі стохастичного еколого-економічного міжгалузевого балансу // Економічна кібернетика. – 2003. - №5-6 (23-24). – С. 18-24.
2. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Знание, 1990. – 430 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

Одержано 16.05.2006 р.

УДК 519.876.5

І. Скрильник

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

РОЗВ′ЯЗАННЯ NP-СКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЯК ПОФАРБУВАННЯ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

У статті розглядається проблема пофарбування графів за допомогою генетичного алгоритму. Показано, що велика кількість NP-складних задач зводяться до проблеми пофарбування теоретико-графових моделей. На основі 0-1 програмування та лінійно-квадратичної оптимізації розроблено комбінований алгоритм, який дозволяє ефективно пофарбовувати графи зі $6{\cdot}10^{306}$ вершинами у мінімальну кількість кольорів.

I. Skrylnyk

THE NP-HARD PROBLEMS SOLVING AS A GRAPH COLORING TASK USING THE GENETIC ALGORITHM

In this paper the graph coloring problem using the genetic algorithm is investigated. It is shown that a great majority of NP-hard problems can be converged to graph coloring problem. The combined algorithm is elaborated, basing on the 0-1 programming and linear-quadratic optimization. The designed algorithm enables to color graphs up to $6{\cdot}10^{306}$ vertex in the minimal number of colors.

Умовні позначення

V — множина вершин графа;
E — множина ребер графа;
G — граф;
C — множина кольорів;
c_i — колір;
v_i — вершина графа;
$\chi(G)$ — хроматичне число графа;
$\Re(C)$ — пофарбування графа;
P — популяція індивідів;
h_i — ген;
σ_I — стандартне відхилення генів;
p_c — коефіцієнт схрещування.

Вступ

Проблема пофарбування теоретико-графових моделей посідає важливе місце у теорії графів та має особливе прикладне значення. Існує велика кількість задач, для