довжини є досить важливою, зокрема, з точки зору оцінки економічної ефективності його виробництва та експлуатації.

Якщо початкова та граничні умови недостатньо узгоджені або недостатньо гладкі, то необхідно здійснити спочатку процедуру згладження негладкостей розв'язків вироджених задач вздовж відповідних характеристик, наприклад, аналогічно до [9]. У **перспективі** – поширення запропонованої методики на відповідні нелінійні задачі, задачі із запізненням, а також аналогічні двовимірні і тривимірні задачі.

Література

1. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
2. Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л., Тихонов А. Н. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала // Журн. физ. химии. – 1945. – Т. 19, вып. 6. – С. 253 – 261.
3. Смирнов А. Д. Сорбционная очистка воды. – Л.: Химия, 1982. – 166 с.
4. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.– 1982.– Т.4, №4.– С. 493–496.
5. Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П. Об асимптотическом приближении решений некоторых массопереноса при фильтрации в неоднородной среде Препринт 85.72. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – 16с.
6. Демчик І.І. Лінійна модель фільтрування (модель Мінца) та її узагальнення // Вісник УДУВГП (збірник наукових праць). – 2004. – Вип. 1(25). – С. 107-118.
7. Кочмарский В.З., Демчик И.И. Интегрирование системы уравнений фильтрования методом Римана. В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т., 1986. – С. 50-53.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.
9. Бомба А.Я. Асимптотический метод решения одной пространственной задачи массопереноса. В кн.: Некоторые модели движения сплошной среды и их приложения. – М.: Наука, 1988. – С. 115-120.

Одержано 15.02.2007 р.

УДК 517.9

Л. Романюк[1], канд. техн. наук; О. Скрук[2], канд. фіз.-мат. наук; В. Чорний[2], канд. фіз.-мат. наук

[1]*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*
[2]*Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка*

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Робота присвячена дослідженню розв'язків крайових задач в нелінійних різницевих рівняннях з нелінійними крайовими умовами. Обґрунтовується підхід, який базується на побудові крайової задачі з лінійними крайовими умовами, що розглядається з певною системою визначальних рівнянь.

L. Romanyuk, O. Skruk, V. Chorniy

ABOUT ONE APPROACH INVESTIGATION OF SOLUTION OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH NON-LINEAR BOUNDARY CONDITIONS

The article is dedicated to the investigation of solutions of the boundary value problems in non-linear difference equations and non-linear boundary conditions. We substantiate the approach which is based on the construction of the equivalent boundary value problem with linear boundary conditions. This approach is examined together with a certain system of determining equations.

Постановка задачі

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n), \quad n = 0,1,...N. \tag{1}$$

Двоточкова крайова задача для різницевого рівняння (1) в загальному випадку ставиться так [1]: знайти функцію $x = x_k$, яка у всіх $k = 0,1,...,N-1$ задовольняє різницеве рівняння (1), а для $k = 0, k = N$ – крайовим умовам:

$$g[x_0, x_N] = 0 \tag{2}$$

де $g[...]$ задана дійсна функція своїх аргументів.

Для поставлених крайових задач (1), (2) природно, виникають питання про умови існування та єдиності їх розв'язків. У таких загальних випадках, як це вдалося зробити для задачі Коші, теорем існування і єдиності для крайових задач довести неможливо. Це вдається зробити лише для окремих класів різницевих рівнянь з певними типами крайових умов [1-4]. Розглянемо деякі з них

Припускаємо, що функції $f_n(x)$ і $g(u,v)$- $m-$мірні вектор функції, задані відповідно в деяких замкнених обмежених зв'язних областях евклідового простору E_m.

Нехай функція *f* така, що

$$\left|f_n(x)\right| \le M \tag{3}$$

$$\left|f_n(u) - f_n(v)\right| \le K|u - v|, \tag{4}$$

для всіх $n = 0,1,...,N,$ $x,u,v \in D$ і деякого вектора M з додатними координатами та деякої невід'ємної сталої матриці $K = \left(K_{i,j}\right)_{i,j=1}^{m}$.

При цьому $\left|f_n(x)\right| = col\left(f_{n1}(x),..., f_{nm}(x)\right)$, а нерівності між векторами, тут і надалі розуміються по компонентно.

Побудова еквівалентної задачі з лінійними крайовими умовами

Перейдемо від задачі (1)-(2) до задачі

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n), \quad n = 0,1,...N-1, \tag{5}$$

$$x_0 = a\,, x_N = b\,, \tag{6}$$

яка розглядається разом із системою визначальних рівнянь

$$g(a,b) = 0\,, \tag{7}$$

де $a\,, b$ - фіксовані $m-$мірні вектори.

Суттєва перевага отриманої задачі полягає в тому, що крайові умови (6) є лінійними.

Для дослідження отриманої крайової задачі (5)-(6), розроблено модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

Нехай задана крайова задача (1)-(2) є такою, що підмножина

1*) $D_\beta := \left\{y \in E_m : B\big(y, \beta(y)\big) \subset D\right\}$

не порожня:

$$D_\beta \ne \varnothing\,, \tag{8}$$

де

$$\beta(y) := \frac{MN}{2},$$

2*) крім того припустимо, власні числа матриці $Q = \dfrac{NK}{2}$ знаходяться в крузі одиничного радіуса.

Розглянемо послідовність функцій

$$x_n^0(a,b) = a + \frac{b-a}{N} n$$

$$x_n^{(k+1)}(a,b) = a + \frac{b-a}{N} n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(x_i^{(k)}(a,b)\right) - \frac{n}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j^{(k)}(a,b)\right), \; k = 0,1,\ldots N-1, \tag{9}$$

залежних від штучно введених параметрів a і b.

Зазначимо, що всі функції послідовності (9) задовольняють умови (6).

Дослідження розв'язків трансформованої задачі

Доведемо таке твердження.

Теорема. Нехай функції $f_n : D \to R^m, g : D \times D \to R^m, n = 0,1,\ldots,N$ є неперервними і виконуються умови (3), (4), 1*), 2*).

Тоді:

1) послідовність функцій (9), яка задовольняє крайові умови (6), рівномірно збігається до граничної функції

$$\overline{x}_n(a,b) = \lim_{k\to 0} x_n^k(a,b);$$

2) гранична функція $\overline{x}_n(a,b)$ з початковим значенням $\overline{x}_0(a,b) = a$ є єдиним розв'язком рівняння

$$x_n(a,b) = a + \frac{b-a}{N} n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(x_i(a,b)\right) - \frac{n}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j(a,b)\right),$$

тобто є розв'язком збуреного відносно (5) рівняння

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n) + \Delta(a,b), \tag{10}$$

$$\Delta(a,b) = \frac{b-a}{N} - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j(a,b)\right);$$

1) справедлива оцінка

$$\left|\overline{x}(a,b) - x_n^{(k)}(a,b)\right| \le Q^k (E-Q)^{-1}(\mathbf{M}N/2).$$

Доведення. Кожна з функцій послідовності (9) задовольняє крайові умови (6) і має місце оцінка:

$$\left|x_n^{(k)}(a,b) - x^{(0)}(a,b)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(x_i^{(k)}(a,b)\right) - \frac{n}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j^{(k)}(a,b)\right)\right| =$$

$$= \left|(1-\frac{1}{N})\sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(x_i^{(k)}(a,b)\right) - \frac{n}{N}\sum_{j=n}^{N-1} f_j\left(x_j^{(k)}(a,b)\right)\right| \le 2\mathbf{M}n\left(1-\frac{n}{N}\right) = 2\mathbf{M}\alpha_n \le \frac{N}{2}\mathbf{M},$$

так як $x_n^{(k)}(a,b) \in D$ для всіх n і k, якщо $a + \frac{b-a}{N} n \in D - \mathbf{M}N/2$.

Доведемо збіжність послідовності (9). Оцінюючи різницю $x_n^{(2)}(a,b) - x_n^{(1)}(a,b)$, отримуємо:

$$\left|x_n^{(2)}(a,b) - x_n^{(1)}(a,b)\right| \le \left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{i=0}^{n-1} K\left|x_i^{(1)}(a,b) - x_i^{(0)}(a,b)\right| +$$

$$+\frac{n}{N}\sum_{i=n}^{N-1} K\left|x_i^{(1)}(a,b) - x_i^{(0)}(a,b)\right| = \left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{i=0}^{N-1} K\mathbf{M}\alpha_i + \frac{n}{N}\sum_{i=n}^{N-1} K\mathbf{M}\alpha_i = \beta_n K\mathbf{M} \tag{11}$$

де

$$\beta_n = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{n^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{6N}\alpha_{n-1} + n\left(\frac{N}{3} - \frac{1}{3N}\right) - \frac{n^2}{6N}\alpha_n - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3N^2} \tag{12}$$

Легко показати, що $\beta_n \le N^2/4$, і, відповідно,

$$\left|x_n^{(2)}(a,b) - x_n^{(1)}(a,b)\right| \le (NK/2)(\mathbf{M}N/2).$$

Методом повної математичної індукції доводиться, що

$$\left| x_n^{(k+1)}(a,b) - x_n^{(k)}(a,b) \right| \le (NK/2)^k (\mathbf{M}N/2) \tag{13}$$

для всіх n і $k = 0, 1, 2, \ldots$ Остання нерівність доводить рівномірно відносно a, b і n збіжність послідовності функцій (9). Переходячи в (9) до границі при $k \to \infty$, переконуємось, що гранична функція $\overline{x}(a,b)$ задовольняє рівняння

$$x_n(a,b) = a + \frac{b-a}{N} n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(x_i(a,b)\right) - \frac{n}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j(a,b)\right).$$

Враховуючи нерівність (13), отримуємо оцінку

$$\left| x_n^{(k+s)}(a,b) - x_n^{(k)}(a,b) \right| \le \sum_{i=0}^{s-1} (NK/2)^k (\mathbf{M}N/2) .$$

Звідси слідує, що

$$\left| \bar{x}(a,b) - x_n^{(k)}(a,b) \right| \le Q^k (E-Q)^{-1} (\mathbf{M}N/2) .$$

Методом від протилежного легко довести, що досліджуване рівняння не може мати два різних розв'язки.

Наслідок. Якщо виконуються умови теореми, то для того щоб розв'язок рівняння

$$x_n(a,b) = a + \frac{b-a}{N} n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(x_i(a,b)\right) - \frac{n}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j(a,b)\right)$$

був розв'язком задачі (1),(2) необхідно і достатньо щоб існували такі числа $a,b,$ які би були розв'язками системи рівнянь

$$\Delta(a,b) = \frac{b-a}{N} - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j\left(x_j(a,b)\right) = 0, g(a,b) = 0.$$

Зауваження. Якщо $g[x_0, x_N] = x_N - x_0 = 0$**,** то отримані результати співпадають з результатами [1].

Проведемо узагальнення описаного вище методу на випадок коли різницеве рівняння має вигляд

$$x_{n+1} = x_n + A_n x_n + f_n(x_n) , \tag{14}$$

де A_n є квадратна матриця розмірності $m \times m$, елементами якої є деякі функції аргументу n, x_n і f_n, як і вище вектор-функції.

Як відомо, якщо Φ_n фундаментальна матриця однорідного рівняння $x_{n+1} = x_n + A_n x_n$, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння $x_{n+1} = x_n + A_n x_n + q_n$, де q_n є вектор-функція від n, матиме вигляд

$$x_n = \Phi_n C + \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1} q_i ,$$

а отже рівняння (14) буде еквівалентне рівнянню

$$x_n = \Phi_n C + \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1} f_i(x_i) \tag{15}$$

Тому розв'язок рівняння будемо шукати серед розв'язків рівняння (14).

Для того, щоб знайти розв'язок, який задовольняє крайовим умовам (2), поряд з рівнянням (14) розглянемо рівняння

$$x_{n+1} = x_n + A_n x_n + f_n(x_n) + \mu . \tag{16}$$

Його розв'язок буде розв'язком рівняння

$$x_n = C\Phi(x_n) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1} f_n(x_n) + \mu \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1} \tag{17}$$

Як і раніше будемо шукати розв'язок рівняння (14) такий, щоб виконувались умови $x_0 = a,\, x_N = b$. Підставивши (17) в умови $x_0 = a,\, x_N = b$, ми отримаємо, що $C = a,\, \mu = \varphi\left(N\right)(b - a\Phi(x_n) + \sum_{i=o}^{N} \Phi_N \Phi_i^{-1} f_i(x_i))$, де

$$\varphi = \left(\sum_{i=0}^{N} \Phi_N \Phi_i^{-1}\right)^{-1}.$$

Отже, ми отримали, що розв'язок рівняння

$$x_{n+1} = x_n + A_n x_n + f_n(x_n) + \varphi\left(N\right)(b - a\Phi(x_n) + \sum_{i=o}^{N} \Phi_N \Phi_i^{-1} f_i(x_i))$$

буде розв'язком рівняння

$$x_n = a\Phi(x_n) + \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1} f_n(x_n) + \varphi\left(N\right)(b - a\Phi(x_n) + \sum_{i=o}^{N} \Phi_N \Phi_i^{-1} f_i(x_i)) \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1})$$

Введемо позначення

$$G\left(n,i\right) = \begin{cases} \Phi_n \Phi_i^{-1} - \varphi\left(N\right) \Phi_n \Phi_i^{-1} \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1}, i = 0,1...n \\ -\varphi\left(N\right) \Phi_n \Phi_i^{-1} \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1}, i = n+1, n+2, ...N. \end{cases}$$

Тоді останнє рівняння можна буде записати у вигляді

$$x_n = a\Phi(x_n) + \varphi\left(N\right)(b - a\Phi(x_n)) + \sum_{i=o}^{N} G\left(n,i\right) f_i(x_i)). \tag{18}$$

Неважко показати (наприклад на основі теореми про стискуючі відображення, або аналогічно до теореми доведеної вище) що, якщо виконуються умови (3), (4), а також

$$K \max_{\substack{i=0,...N \\ n=0,...N}} \sum_{i=o}^{N} G\left(n,i\right) < 1,$$

то рівняння (18) має єдиний розв'язок, який буде розв'язком рівняння (14), якщо числа a і b будуть розв'язками системи

$$\begin{cases} g(a,b) = 0 \\ b - a\Phi(x_n\left(a,b\right)) + \sum_{i=o}^{N} \Phi_N \Phi_i^{-1} f_i(x_i\left(a,b\right))) \sum_{i=0}^{n} \Phi_n \Phi_i^{-1} = 0 \end{cases}$$

Висновки. Обґрунтовано нову схему досліджень розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з нелінійними крайовими умовами. На основі запропонованих чисельно-аналітичних алгоритмів розроблено схему послідовних наближень для побудови наближених розв'язків. Отримано необхідні і достатні умови існування розв'язків.

Результати проведених досліджень можуть використовуватись для розв'язання прикладних задач, математичними моделями яких є нелінійні крайові задачі.

Література

1. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартинюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами.— Киев : Наук. думка, 1985.— 216 с.
2. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн.− 1965.−17, №4.− С. 16-23.
3. А.М.Самойленко, Н.И.Ронто Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дыфференциальных уравнений.− К., Наукова думка, 1992.
4. Лучка А.Ю. Про новий підхід до дослідження періодичних крайових задач до диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.— 2000.— №4 - С. 474—488.

Одержано 02.04.2007 р.