УДК 389.14: 681.5

П. Євтух[1], докт. техн. наук; Т. Пелешок[1]; О. Рафалюк[2]

[1]Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя
[2] Конструкторське бюро „Стріла”

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АЛГОРИТМУ АВТОМАТИЧНОЇ КОМПЕНСАЦІЇ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ПОХИБОК

У статті обґрунтовано вибір алгоритму автоматичної компенсації мультиплікативної похибки систематичного характеру у вигляді ітераційної процедури. Показано, що при нарощуванні кількості ітерацій величину систематичної мультиплікативної похибки можна зменшити теоретично до нуля .Модель може бути застосована в системах обліку електроенергії з метою підвищення їх точності шляхом введення поправок в результати вимірювань, а самі поправки вносяться автоматично, за допомогою обчислювальної техніки, в реальному часі.

P. Evtukh, T. Peleshok, O. Rafalyuk

MATHEMATICAL MODEL ALGORITHM OF AUTOMATIC IDENTIFICATION MULTIPLICATION ERROR

In article grounded choice of algorithm automatic indemnification multiplication error systematic character in iteration procedure. It is rotined that at the increase of amount iteration, the size systematic multiplication error can be decreased in theory to the zero. A model can be applied in the systems of account of electric power with the purpose of increase of their exactness by introduction of amendments to the results of measurings, and amendments are brought in automatically, by the computing engineering, in the real time.

Вступ. Застосування обчислювальної техніки в електронному приладобудуванні дає змогу підвищити точність вимірювання за рахунок автоматичної компенсації систематичних похибок, а процедура компенсації, як відомо, здійснюється за допомогою поправок [1].

Покази первинних вимірювальних перетворювачів (ПВП) зазвичай спотворені адитивними і мультиплікативними похибками. У багатьох первинних вимірювальних перетворювачах (ПВП) домінуючою за величиною є мультиплікативна похибка, яка носить систематичний характер, що дає змогу, в принципі, здійснювати її компенсацію поправками автоматично, за допомогою обчислювальних засобів, а сама величина корекції перетворення ПВП у даному випадку визначається величиною похибки [2,3]. Однак алгоритми такої компенсації можуть бути різними за ефективністю [4,5]. У тих ПВП, у яких переважає мультиплікативна похибка, є певні труднощі з її корекцією, пов'язані із зміною величини мультиплікативної похибки в діапазоні вимірюваної величини [5]. Практика показує [6], що для усунення цих труднощів необхідні відповідні обґрунтування вибору найефективнішого алгоритму автоматичної компенсації систематичної складової похибки, чому і присвячена дана стаття.

Постановка задачі. Нехай зв'язок між вихідною $X_{вих}$ та вхідною $X_{вх}$ вимірюваними величинами у ПВП задається залежністю [1]:

$$X_{вих} = K_н X_{вх}, \qquad (1)$$

де $K_н$ - номінальний коефіцієнт перетворення ПВП. Фактично значення коефіцієнта перетворення інше за рахунок спотворення мультиплікативною похибкою.

Ставиться задача обґрунтувати алгоритм, який дає змогу найефективнішим чином скомпенсувати мультиплікативну похибку поправками за допомогою ітераційної процедури, вважаючи, що кількість ітерацій може бути необмеженою.

Найефективнішим приймається алгоритм, який дає змогу скомпенсувати цю похибку до нуля.

Обґрунтування алгоритму. У даному випадку традиційна процедура визначення поправок за допомогою повірочної установки неефективна, тому що компенсацію похибки необхідно здійснювати у будь-якій точці вимірювальної шкали, а при збільшенні точності кількість таких точок теж збільшується. Якщо ставиться вимога компенсації мультиплікативної похибки до нуля, то точок компенсації на вимірювальній шкалі стає необмежено багато. Тому у процедурі компенсації використовується розрахункова поправка, яка у даному випадку є детермінованою функцією від емпіричної поправки, визначеної на повірочній установці. За такого підходу вплив мультиплікативної похибки можна оцінювати постійною величиною α за допомогою залежності:

$$\widehat{X}_{вих} = K_н(1+\alpha)X_{вх}, \tag{2}$$

де $\widehat{X}_{вих}$ – зафіксована як результат вимірювання, спотворена мультиплікативною похибкою, вихідна величина, а величина α визначається за співвідношенням (1) і (2) наступним чином

$$\alpha = 1 - \frac{\hat{X}_{\text{âèõ}}}{X_{\text{âèõ}}}. \tag{3}$$

Геометрична інтерпретація залежності (2) подана на рисунку 1.

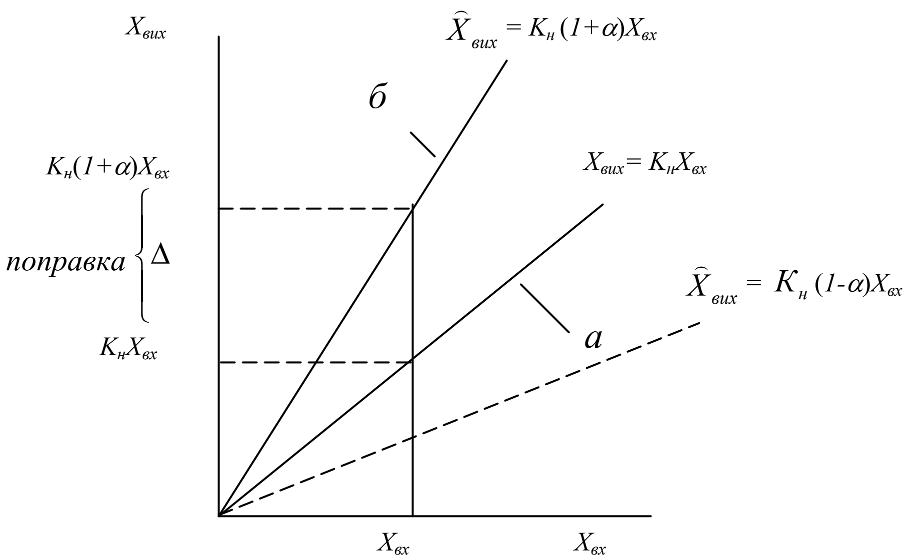

Рисунок 1- Зв'язок між вхідною і вихідною величиною у неспотвореному (а) та спотвореному (б) випадках

Якби була можливість отримати значення $X_{вих}$ для будь-якої точки шкали на повірочній установці, то можна було б ввести поправку Δ за виразом

$$\Delta = -\alpha K_н X_{вх} \tag{4}$$

і, додаючи її до кожного виміряного значення $\widehat{X}_{вих}$, отримувати точне значення вимірюваної величини.

Однак в процесі вимірювання відомі лише наближені значення $\widehat{X}_{вх}$, тому існує можливість отримати лише значення розрахункових поправок $\widehat{\Delta}$, які для першого виміряного значення описуються залежністю:

$$\widehat{\Delta} = -\alpha K_{н} \widehat{X}_{вх} = \alpha \widehat{X}_{вх} K_{н} (1-\alpha) = \alpha \widehat{X}_{вих} \,. \tag{5}$$

Скористатись залежністю (5) можна двома способами, звівши практичну реалізацію компенсації до ітераційної процедури у відповідності з алгоритмами для *n*-го кроку ітерації за виразом:

$$\hat{X}_{\text{âèõ}n} = \hat{X}_{\text{âèõ}} + \alpha \cdot \hat{X}_{\text{âèõ}(n-1)} \tag{6}$$

або

$$\hat{X}_{\text{âèõ}n} = X_{\text{âèõ}(n-1)} + \alpha \cdot \hat{X}_{\text{âèõ}(n-1)} \,. \tag{7}$$

Ефективність використання кожного із запрограмованих алгоритмів оцінюється величиною відносної похибки δ_n після застосування n ітерацій. Для визначення відносної похибки необхідно знайти вираз, який отримується після застосування кожної ітерації, тобто вирази $\widehat{X}_{вих1}, \widehat{X}_{вих2}$ ... $\widehat{X}_{вих_n}$.

Для алгоритму (6) ці вирази мають вигляд:

$$\widehat{X}_{вих1} = X_{вх} K_{н} (1-\alpha) - \alpha X_{вх} K_{н} (1-\alpha) = X_{вх} (1-\alpha)(1-\alpha)$$
$$\widehat{X}_{вих2} = X_{вх} K_{н} (1-\alpha) - \alpha X_{вх} K_{н} (1-\alpha) + \alpha^2 X_{вх} K_{н} (1-\alpha) = X_{вх} (1-\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)$$
$$\widehat{X}_{вих3} = X_{вх} K_{н} (1-\alpha) - \alpha X_{вх} K_{н} (1-\alpha)(1-\alpha+\alpha^2) = X_{вх} (1-\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\widehat{X}_{вих_n} = X_{вх} K_{н} (1-\alpha)\left[1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-.....-(1)^n \alpha^n\right].$$

Співвідношення для $\widehat{X}_{вих_n}$ дає вираз для відносної похибки для n – го кроку алгоритму (6) у вигляді:

$$\delta_n = \alpha \frac{1-(-\alpha)^n}{1+\alpha} \,.$$

Ефективність застосування алгоритму (6) визначається границею, до якої прямує величина δ_n при нарощуванні кількості ітерацій, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \alpha \frac{1-(-\alpha)^{ï}}{1+\alpha} = \alpha \,.$$

Отриманий результат свідчить про те, що застосування алгоритму (6) не дає позитивного результату. Кінцева похибка результату вимірювання після n ітерацій не зменшується і дорівнює величині α .

Застосування алгоритму (7) для отримання виразів $\widehat{X}_{вих1}, \widehat{X}_{вих2}$ ... $\widehat{X}_{вих_n}$ після кожної із ітерацій дає наступний результат:

$$\widehat{X}_{вих1} = X_{вх} K_{н} (1-\alpha) - \alpha X_{вх} K_{н} (1-\alpha) = X_{вх} K_{н} (1-\alpha)^2$$
$$\widehat{X}_{вих2} = X_{вх} K_{н} (1-\alpha)^2 - \alpha X_{вх} K_{н} (1-\alpha)^2 = X_{вх} K_{н} (1-\alpha)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\widehat{X}_{\text{âèõ}_n} = \tilde{O}_{\text{âõ}} K_{i} (1-\alpha)^{ï+1} \,.$$

Співвідношення для $\widehat{X}_{вих_n}$ дає вираз для відносної похибки для n – го кроку алгоритму (7) у вигляді:

$$\delta_{ї} = \alpha^{ї+1}.$$

Ефективність застосування алгоритму (7) визначається границею, до якої прямує величина δ_n, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\alpha^{ї+1} = 0.$$

Таким чином, дослідження виразів (6) і (7) показали, що лише застосування алгоритму (7) в процесі автоматичної компенсації мультиплікативної похибки ПВП дає позитивний результат. Отже, використовувати для компенсації поправок кожне скориговане значення вимірювальної величини не можна, оскільки кінцеве значення похибки не зменшується, незважаючи на компенсацію.

Розглянутий підхід є доцільним застосувати під час пусконалагоджувальних робіт у колах із високовольтними трансформаторами струму та напруги по місцю їх експлуатації, оскільки поки що не існує засобів для експериментального визначення поправок для компенсації систематичних похибок, зумовлених неточними значеннями номінального коефіцієнта трансформації. Для таких пристроїв відомий спосіб заміни експериментальних поправок близькими до них розрахунковими, застосування яких дає змогу істотно зменшити значення систематичних похибок результатів вимірювання за рахунок збіжності ітераційної процедури компенсації , побудованої у відповідності до спеціально розробленого алгоритму [6]. Такий підхід виправдав себе на практиці тим, що дані для визначення розрахункових поправок часто можна взяти із технічних паспортів вимірювальних трансформаторів, де ці дані наведені у вигляді похибок, отриманих при випробуваннях вимірювальних трансформаторів на високоточному випробувальному стенді заводу виготовлювача. Однак успіх від застосування таких даних залежить ще і від вдалого вибору розрахункових поправок, які використовують для компенсації систематичних похибок результатів вимірювання. У подальшому матеріалі, на основі запропонованого у даній статті підходу, подані формули для розрахункових поправок.

Нехай вимірювальна величина описується виразом

$$\dot{x} = x_0 e^{j\varphi_0} = x_0\cos\varphi_0 + jx_0\sin\varphi_0, \tag{8}$$

де x_0 – амплітуда вимірювальної величини, φ_0 – її фаза.

Вимірювальна величина подається на вхід (ПВП) з номінальним коефіцієнтом перетворення $К_н$. Сигнал на виході ПВП описується виразом

$$\dot{y} = K_H x_0 e^{j\varphi_0} = K_H\dot{x}. \tag{9}$$

В дійсності не існує ПВП з точно номінальним коефіцієнтом перетворення $К_н$, внаслідок чого ПВП вносить похибку в передачу амплітуди і фази комплексної вимірювальної величини, що можна описати співвідношенням

$$K = K_H(1+\delta)e^{-j\xi}, \tag{10}$$

де δ – відносна мультиплікативна похибка передачі амплітуди; ξ – абсолютна похибка передачі фази.

У даному випадку передбачається справедливість співвідношення $(\delta,\xi) << 1$.

Виміряне значення сигналу ŷ на виході ПВП, враховуючи формулу (10), можна подати так:

$$\hat{y} = K_H x_0 (1+\delta) e^{-j(\varphi_0 - \xi)} = K_H \dot{x} (1+\delta) e^{-j\xi} . \tag{11}$$

Враховуючи, що |δξ| << 1, можна замінити експоненту у виразі (11) наближенням першого порядку $e^{-j\xi} = 1 - j\xi$. Вираз (11) з врахуванням його наближення набуває вигляду

$$\hat{y} = \dot{x} K_H (1+\delta)(1 - j\xi) = \dot{x} K_H (1+\delta) e^{-j\xi} . \tag{12}$$

При отриманні формули (12) знехтувано складовою jδξ, яка є малою величиною вищого порядку.

Вираз (12) свідчить, що фазову складову похибки треба трактувати, як уявну компоненту мультиплікативної похибки.

Зазвичай при вимірюваннях розділяють окремо активну і реактивну складові комплексної величини. Відповідно до такого розділення вираз (12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= x_0 K_H (\cos\varphi_0 + j\sin\varphi_0)(1+\delta - j\xi) = K_H x_0 \cos\varphi_0 (1+\delta+\xi tg\varphi_0) + \\ &+ jK_H x_0 \sin\varphi_0 (1+\delta - \xi ctg\varphi_0) = \hat{y}_a (1+\delta+\xi tg\varphi_0) + \hat{y}_p (1+\delta-\xi ctg\varphi_0), \end{aligned} \tag{13}$$

де y_a і y_p – відповідно активна і реактивна складові сигналу на виході ПВП.

Оскільки розглядається випадок, при якому дозволяється застосувати розрахункову поправку П, то доцільно використати запропонований в даній статті алгоритм у вигляді:

$$\hat{y}_{Ï} = \hat{y} + Ï\, \hat{y}_{n-1} , \tag{14}$$

де n – номер ітерації в процедурі компенсації похибки.

Для ефективної роботи алгоритму у випадку комплексного сигналу поправка повинна мати вигляд

$$Ï_{à} = \tilde{o}_{à} (\delta + \xi tg\hat{\varphi}_0) , \tag{15}$$

де $П_a$ – поправка до активної складової сигналу на виході ПВП, а також

$$Ï_{ð} = -\tilde{o}_{ð} (\delta - \xi ctg\hat{\varphi}_0) , \tag{16}$$

де $П_p$ – поправка реактивної складової сигналу на виході ПВП.

Величина $\hat{\varphi}_0$ у формулах для поправок – це виміряна із похибкою ξ фаза сигналу на виході ПВП.

Ітераційна процедура компенсації похибки активної складової сигналу на виході ПВП має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{y}_{a1} &= K_H x_0 \cos\varphi_0 (1+\delta+\xi tg\hat{\varphi}_0) + K_H x_0 (1+\delta+\xi tg\hat{\varphi}_0)(\delta+\xi tg\hat{\varphi}_0) = \\ &= K_H x_0 \cos\varphi_0 (1+\delta+\xi tg\hat{\varphi}_0)^2 ; \end{aligned}$$

$$\hat{y}_{a2} = K_H x_0 \cos\varphi_0 (1+\delta+\xi tg\hat{\varphi}_0)^3 ;$$

....

$$\hat{y}_{an} = K_H x_0 \cos\varphi_0 (1+\delta+\xi tg\hat{\varphi}_0)^{n+1} .$$

Похибки δ_1, δ_2 ... δ_n після кожної із цих ітерацій визначають за формулою $\delta = 1 - \hat{y}_{an} / \hat{y}$ і описують формулами

$$\delta_1 = -(\delta + \xi tg\hat{\varphi}_0)^2; \delta_2 = -(\delta + \xi tg\hat{\varphi}_0)^3; ...\delta_n = -(\delta + \xi tg\hat{\varphi}_0)^n .$$

Оскільки ($\delta + \xi \mathrm{tg}\hat{\varphi}_0$) << 1, очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$, тобто теоретична межа, до якої прямує значення похибки δ_n , при нарощуванні кількості ітерацій дорівнює нулю.

Аналогічний результат можна отримати в наслідок застосування ітераційної процедури компенсації поправки до реактивної складової сигналу на виході ПВП.

Отримані результати свідчать про ефективність застосування розрахункових поправок у вигляді (15) і (16) з метою компенсації похибок одночасно активної та реактивної складових сигналу на виході ПВП.

Особливості застосування розрахункових поправок для компенсації складових комплексного сигналу полягає ще й у тому, що ефективність застосування алгоритму (14) залежить і від значення кута φ_0 . Аналіз показує, що лише при кутах 6º < φ < 84º значення функції $\mathrm{tg}\varphi_0$ і $\mathrm{ctg}\varphi_0$ у формулах (15) і (16) знаходяться в межах 0,1 до 10, і лише в цих межах алгоритм (14) придатний для компенсації похибок одночасно в активній та реактивній складових вхідного сигналу. При інших значеннях кута φ необхідні додаткові дослідження алгоритму на його ефективність.

Висновок. Отриманий результат дає змогу методично правильно побудувати алгоритм автоматичної компенсації систематичної складової похибки у випадку її мультиплікативного характеру. Застосування програмно - алгоритмічних методів автоматичного коригування похибок і побудова на їх основі ітераційних алгоритмів у вимірювальних системах дає змогу забезпечити їх метрологічний рівень на сучасному рівні.

Література

1. Артемьев Б. Г., Голубев С.М.. Справочное пособие для работников метрологических служб. Изд. 2-е, перероб. и доп., в двух книгах.- М.: Изд-во стандартов, 1986.- Кн. I.- С. 1- 352, ил.
2. Таланчук П.М., Скрипник Ю.О., Дуброний В.О. Засоби вимірювання в автоматичних інформаційних та керуючих системах. – Київ: Райдуга, 1994.– 664 с.
3. Аналоговые измерительные приборы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Информ.-измер. техника» / Е.Г. Бишард, Е.А. Киселева, Г.П. Лебедев и др., - 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк.,1991.– 415с.: ил.
4. Скрипник Ю.О.. Цифрові вимірювачі з корекцією похибок. – Київ: Вища школа, 1973. – 148с.
5. Новицкий П. В. и др. Динамика погрешностей средств измерений.- Л.: Энергоатомиздат, 1990.- 192с.
6. Євтух П.С., Пелешок Т.М. Алгоритм автоматичної компенсації мультиплікативних похибок у масштабуючих первинних вимірювальних перетворювачах // Тези всеукраїнської науково-технічної конференції „Вимірювання витрати та кількості газу”. - Івано-Франківськ, 2005. – С. 40-41.

Одержано 27.02.2007 р.