

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ГЛАДКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

М.С. Михайлишин, П.В. Ясній, Ю.І. Пиндус, М.І. Гудь

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

Abstract Using the analytical methods solved the problem of free oscillations of the cylindrical shell.

Ключові слова: гладка циліндрична оболонка, власні коливання, аналітичний розрахунок.

Вступ. В різноманітних галузях промисловості широке застосування знайшли конструктивні компоненти що представляють собою циліндричні оболонки. Ці елементи складають за вагою порівняно невелику частку конструкцій, але суттєво впливають на міцність і жорсткість механічних систем.

Раціональне проектування деталей машин та елементів конструкцій пов'язане з дослідженням їх міцності та стійкості. Для запобігання резонансу важливим є визначення власних частот особливо при дії змінного навантаження.

Що стосується циліндричних оболонок ракет, то, за звичних умов експлуатації на них діють аеродинамічні навантаження зумовлені оточуючим газовим середовищем та роботою двигунів. Крім того, при транспортуванні до місця старту такі оболонки піддаються навантаженням, спектр яких визначається типом транспортного засобу. Так, при перевезенні авіатранспортом циліндричні оболонки можуть здійснювати вимушені коливання, що спричинені неоднорідністю атмосферного повітря при польоті, роботою двигунів літака, вертикальними прискореннями.

У зв'язку з цим особливого значення набувають надійні методи аналітичного визначення резонансних частот таких конструкцій.

Для розрахунку оболонкових елементів конструкцій використовують точні аналітичні методи [1–4]. Зокрема, методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість оболонок корпусів балістичних ракет і ракет-носіїв описано в праці [1]. Експериментально досліджено лінійні прискорення, які виникають під час морського транспортування ракети носія "Зеніт-3SL" [5]. На основі статистичної обробки максимальних значень вимірних прискорень на опорах установки протягом 29 місій. Показано характер прискорень та визначено основний внесок в динамічне навантаження ракети носія. Огляд експериментальних методів досліджень наведено в роботах [5–7].

Вказані праці стосуються узагальнених досліджень елементів конструкції ракети носія при транспортуванні морським транспортом. Зважаючи на специфіку експлуатації та транспортування підсиленних оболонок, для кожного конкретного випадку необхідно визначати частоти і форми коливань і відповідно, їх міцність та довговічність.

Матеріали та методи досліджень. Довжина циліндра дорівнює $L=6,3$ м, діаметр $D=2R=1,8$ м, товщина стінки $h=0,0015$ м. Характеристики механічних властивостей матеріалу циліндричної оболонки: алюмінієвий сплав Д16АТ, модуль Юнга $E = 7.2 \times 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; густина $\rho = 2,7 \cdot 10^4$ Н/м³. Гравітаційне прискорення приймали рівним $g = 9,8$ м/с².

Для аналітичного дослідження коливань циліндричних оболонок використаємо рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2}(1+k) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^3 \varpi}{\partial \xi^3} - \frac{1-\nu}{2} k \frac{\partial^3 \varpi}{\partial \xi \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} &= \rho R^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^3} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}(1+3k) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{3-\nu}{2} k \frac{\partial^3 \varpi}{\partial \xi^2 \partial \varphi} - \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} &= \rho R^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$k \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{1-\nu}{2} k \frac{\partial^3 v}{\partial \xi \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3-\nu}{2} k \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \varpi + k \left[\frac{\partial^4 \varpi}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \varpi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 \varpi}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2} + \varpi \right] = -\rho R^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \tau^2},$$

$$\text{Тут } \xi = \frac{x}{R}; k = \frac{h^2}{12R^2};$$

Загальний розв'язок (1) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u &= U(\xi) \sin(n\varphi + \varphi_0) e^{i\omega t} \\ v &= V(\xi) \cos(n\varphi + \varphi_0) e^{i\omega t} \\ \varpi &= W(\xi) \sin(n\varphi + \varphi_0) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

де n – кількість вузлових ліній вздовж твірної оболонки; ω – кругова частота коливань.

Підставляючи вираз (2) у (1) отримаємо систему рівнянь для знаходження функцій U , V і W , розв'язок якої такий.

$$\begin{aligned} U &= C_1 S_1 e^{a\xi} - C_2 S_1 e^{-a\xi} - C_3 S_2 \sin \beta \xi + C_4 S_2 \cos \beta \xi + \\ &+ e^{c\xi} [C_5 (k_1 \cos d\xi + m_1 \sin d\xi) + C_6 (k_1 \sin d\xi - m_1 \cos d\xi)] + \\ &+ e^{-c\xi} [C_7 (-k_1 \cos d\xi + m_1 \sin d\xi) + C_8 (k_1 \sin d\xi + m_1 \cos d\xi)]; \\ V &= C_1 S_3 e^{a\xi} + C_2 S_3 e^{-a\xi} + C_4 S_4 \sin \beta \xi + C_3 S_4 \cos \beta \xi + \\ &+ e^{c\xi} [C_5 (k_2 \cos d\xi - m_2 \sin d\xi) + C_6 (k_2 \sin d\xi + m_2 \cos d\xi)] + \\ &+ e^{-c\xi} [C_7 (k_2 \cos d\xi + m_2 \sin d\xi) + C_8 (k_2 \sin d\xi - m_2 \cos d\xi)]; \\ W &= C_1 e^{a\xi} + C_2 e^{-a\xi} + C_3 \cos b\xi + C_4 \sin b\xi + e^{c\xi} (C_5 \cos d\xi + C_6 \sin d\xi) + e^{-c\xi} (C_7 \cos d\xi + C_8 \sin d\xi). \end{aligned}$$

Якщо на кожному з країв оболонки виконуються умови Нав'є, граничні умови такі:

$$\varpi = 0, v = 0, M_\xi = 0, N_\xi = 0, \text{ при } \xi = 0 \quad (4)$$

$$w = 0, v = 0, M_\xi = 0, N_\xi = 0, \text{ при } \xi = l \quad (5)$$

У результаті задоволення цих умов отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_5 + C_7 &= 0; \\ C_1 p_1 + C_2 p_2 - C_3 q_1 + C_5 (p_2 + a_2) + C_6 (q_2 - b_2) + C_7 (p_2 + a_2) - C_8 (q_2 + b_2) &= 0; \\ C_1 p_3 + C_2 p_3 - C_3 q_3 + C_5 (p_4 + a_2) + C_6 (q_4 - b_2) + C_7 (p_4 + a_2) - C_8 (q_4 + b_2) &= 0; \\ C_1 S_3 + C_2 S_3 + C_3 S_4 + C_5 k_2 + C_6 m_2 + C_7 k_2 - C_8 m_2 &= 0; \\ C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} + C_3 \cos bl + C_4 \sin bl + e^{cl} (C_5 \cos dl + C_6 \sin dl) + e^{-cl} &= 0; \\ p_1 (C_1 e^{al} + C_2 e^{-al}) - q_1 (C_3 \cos bl + C_4 \sin bl) + C_5 e^{cl} [(p_2 + a_2) \cos dl - ((q_2 - b_2) \sin dl)] + \\ + C_6 e^{cl} [(p_2 + a_2) \sin dl + ((q_2 - b_2) \cos dl)] + C_7 e^{-al} [(p_2 + a_2) \cos dl + ((q_2 - b_2) \sin dl)] + \\ + C_8 e^{-cl} [(p_2 - a_2) \sin dl - ((q_2 + b_2) \cos dl)] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_3(C_1 e^{al} + C_2 e^{-al}) - q_3(C_3 \cos bl + C_4 \sin bl) + C_5 e^{cl} [(p_4 + a_2) \cos dl - ((q_4 - b_2) \sin dl)] + \\
& + C_6 e^{cl} [(p_4 + a_2) \sin dl + ((q_4 - b_2) \cos dl)] + C_7 e^{-al} [(p_4 + a_2) \cos dl + ((q_4 - b_2) \sin dl)] + \\
& + C_8 e^{-cl} [(p_4 - a_2) \sin dl - ((q_2 + b_2) \cos dl)] = 0 \\
& C_1 S_3 e^{al} + C_2 S_3 e^{-al} + C_3 S_4 \cos bl + C_4 S_4 \sin bl + e^{cl} [C_5 (k_2 \cos dl - m_2 \sin dl) + C_6 (k_2 \sin dl + m_2 \cos dl)] + \\
& + e^{-cl} [C_7 (k_2 \cos dl + m_2 \sin dl) + C_8 (k_2 \sin dl - m_2 \cos dl)] = 0
\end{aligned}$$

Тут додатково позначено:

$$\begin{aligned}
a_1 &= S_1 a - v n S_3, b_1 = S_2 b + v n S_4, \\
a_2 &= c k_1 + d m_1, b_2 = c m_1 - d k_1, \\
a_3 &= n(S_1 + k a) - (1 - k) a S_3, b_3 = n(S_2 + k b) + (1 - k) b S_4, \\
a_4 &= n k c + (1 - k) a_3, b_4 = n k d + (1 - k) b_3, \\
p_1 &= a^2 - v n^2 + a_1, q_1 = b^2 + v n^2 + b_1, \\
p_2 &= c^2 - d^2 - v n^2 - v n k_2, q_2 = 2 c d - v n m_2 + b_1, \\
p_3 &= k a^2 - v + a_1, q_3 = k b^2 + v + b_1, \\
p_4 &= k(c^2 - d^2) - v - v n k_2, q_4 = 2 k c d - v n m_2.
\end{aligned}$$

Отже, отримали систему лінійних однорідних рівнянь для знаходження $C_1 \dots C_8$. Відмінний від нуля розв'язок цієї системи одержимо тоді, коли визначник коефіцієнтів цієї системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix}
\Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{18} \\
\Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{28} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\Psi_{81} & \Psi_{82} & \dots & \Psi_{88}
\end{vmatrix} = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо частоти власних коливань оболонки за різних значень геометричних і фізичних параметрів оболонки і різних значень n .

Результати розрахунків власних частот коливань циліндричної оболонки аналітичним методом наведено в таблиці 1.

Таблиця №1

Власні частоти коливань циліндричної оболонки визначені аналітичним методом (в Гц)

№	Частота визначена чисельним методом[8]	Частота визначена аналітичним методом	Відносна похибка чисельного методу, %
1	18,8	19,1	10,06
2	18,8	19,1	10,06
3	19,4	19,7	9,75
4	19,4	19,7	9,75
5	23,5	23,9	10,72
6	23,5	23,9	10,72
7	24,2	24,6	10,4
8	24,2	24,6	10,4
9	29,8	30,3	10,5
10	29,8	30,3	10,5

Висновки.

Розглянута задача про вільні коливання циліндричної оболонки із защемленими торцями. Для розв'язку поставленої задачі використовується аналітичний метод. Результати отримані аналітичним методом порівняно із значеннями власних частот

коливань циліндричної оболонки, отриманими чисельним методом. Найбільша похибка чисельного методу не перевищує 10,7%.

Література

1. Моссаковский В.И., Макаренко А.Г., Никитин П.И. Прочность ракетных конструкций. Москва: Вища школа, 1990. 359 р.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Наукова думка. Киев, 1980. 367 р.
3. Амиро И.Я., Грачев О.А., Заруцкий В.А. Устойчивость ребристых оболочек вращения / Пальчевский, Ю. А. Санников. – К.: Наукова думка, 1987, 180 с. / ed. Амиро И.Я. Киев: Наукова думка, 1987. 180 р.
4. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Лобода В.В. Расчет прочности ребристых оболочек инженерных конструкций. Киев-Донецк: Вища школа, 1986. 167 р.
5. В.А. Остапюк О.Э.А. Исследование результатов экспериментального определения нагружения ракеты-носителя при морской транспортировке на стартовой платформе. Р. 38–45.
6. Шевченко В.П., Власов О.И., Каиров В.А. Экспериментальное исследование собственных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування. 2013. Vol. 68, № 2. Р. 122–127.
7. Заруцкий В.А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек // Прикл. механика. 2001. Vol. 37, № 8. Р. 38–67.
8. Yasnıy P., Pyndus Y., Hud M. Analysis of natural frequencies and shapes of stringer-stiffened cylindrical shells // Sci. J. Ternopil Natl. Tech. Univ. 2016. Vol. 83, № 3. Р. 7–15.