ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ ЗСУВНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПІВШАРУ З РОЗРІЗОМ

В.А. Кривень, В.Б. Валяшек, Л.І. Цимбалюк

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

Plastic zones deformation in the semispace with crack at the condition of antiplane deformation caused by constant displacement of semilayer sides is investigated. Continual plastic zone, plastic zone localized in the crack plane and plastic zone linear model (PZLM) based on the coefficient of stress intensity of elastic solution are analyzed. Applicability conditions PZLM for prediction of continual plastic zone development at the crack edge are ascertained.

Дослідження міцності і умов руйнування матеріалів та елементів конструкцій потребує урахування пластичних деформацій, що можуть появлятися біля концентраторів напружень.

Тут дослідимо розвиток пластичних деформацій у півшарі $x \geq 0$, $-h \leq y \leq h$, $-\infty < z < \infty$ з тріщиною-розрізом $x \geq l$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$ (l – віддаль вершини розрізу від торця півшару) під зсувним навантаженням, спричиненим сталими і рівними $\pm w_0$ переміщеннями граней півшару за відсутності навантаження на його торці.

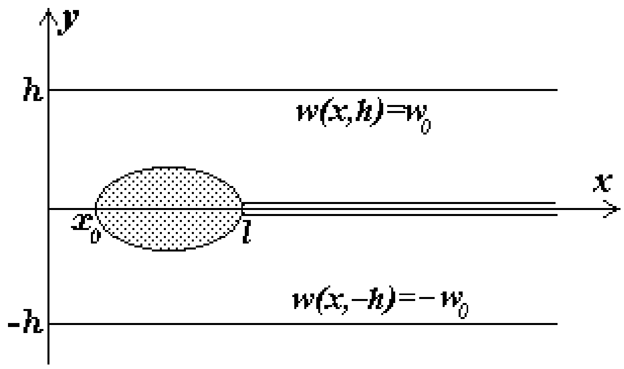

Рис. 1. Поперечний переріз тіла. Область, заповнена крапками, – континуальна пластична зона.

За вказаних умов напружено-деформований стан (НДС) півшару $x \geq 0, -h \leq y \leq h$, розрізаного вздовж променя $x \geq l$, $y = 0$, збігається із НДС необмеженого тіла з періодичною системою тріщин-розрізів $|x| \geq l$, $y = 2nh\,(n \in Z)$ під відповідним навантаженням. В тілі з періодичною системою розрізів віддалі між вершинами розрізів безмежно малі проти довжин самих розрізів, що дає можливість дослідження впливу сильної взаємодії концентраторів напружень на розвиток НДС та зон пластичних деформацій.

у півшарі виникає антиплоский НДС, який описується переміщенням $w(x, y)$ вздовж осі аплікат і тензором напружень із двома ненульовими компонентами τ_{xz} і τ_{yz}, котрі в пружній частині тіла утворюють аналітичну функцію $\tau(\zeta) = \tau_{xz}(x, y) + i\tau_{yz}(x, y)$ комплексної змінної $\zeta = x + iy$.

Зону пластичних деформацій визначатимемо за класичним розв'язком пружно-пластичної задачі (континуальна зона) та за припущенням про локалізацію пластичних деформацій у площині розрізу.

Для випадку континуальної пластичної зони отримуємо нелінійну крайову задачу з вільною межею відносно функції $\tau(\zeta)$ в області D (верхня половина поперечного перерізу півшару поза зоною пластичності):

$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \qquad (\zeta = x + ih, 0 \leq x < \infty \text{ або } \zeta = iy, 0 \leq y \leq h \text{ або } \zeta = x, 0 \leq x \leq x_0);$$

$$\operatorname{Im}(\zeta - l)\tau(\zeta) = 0 \ (\zeta \in L); \quad |\tau(\zeta)| = k \ (\zeta \in L); \ \frac{1}{\mu}\operatorname{Im}\int_0^{ih} \tau(\zeta)d\zeta = w_0, \tag{1}$$

де L – межа континуальної пластичної зони

У випадку локалізації пластичних деформацій у площині розрізу $\zeta = x,\, x_0 \le x \le l$ ($x_0 = l - d_1$, d_1 – довжина пластичної смуги $d_1 = d_1(w_0)$) отримуємо крайової задачу в області з відомою межею:

$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x + ih, 0 \le x < \infty \text{ або } \zeta = iy, 0 \le y \le h \text{ або } \zeta = x, 0 \le x \le x_0);$$

$$|\tau(\zeta)| = k \quad (\zeta = x,\, x_0 \le x \le l); \qquad \frac{1}{\mu}\operatorname{Im}\int_0^{ih} \tau(\zeta)d\zeta = w_0, \tag{2}$$

у якій на відміну від (1) умова $|\tau(\zeta)| = k$ вимагається тільки на відрізку $\zeta = x,\, x_0 \le x \le l$, відповідному пластичній смузі.

Крайову задачу (1) попередньо зведемо [1] до задачі Келдиша-Сєдова [2].

Внаслідок умов (1) функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає область D площини ζ на четвертину круга $|\tau| \le k, 0 \le \arg\tau \le \pi/2$ (область G) площини τ . Уведемо площину допоміжного комплексного параметра t і відобразимо конформно область G площини τ на область $H = \{\operatorname{Im} t \ge 0\}$ площини t (рис. 2).

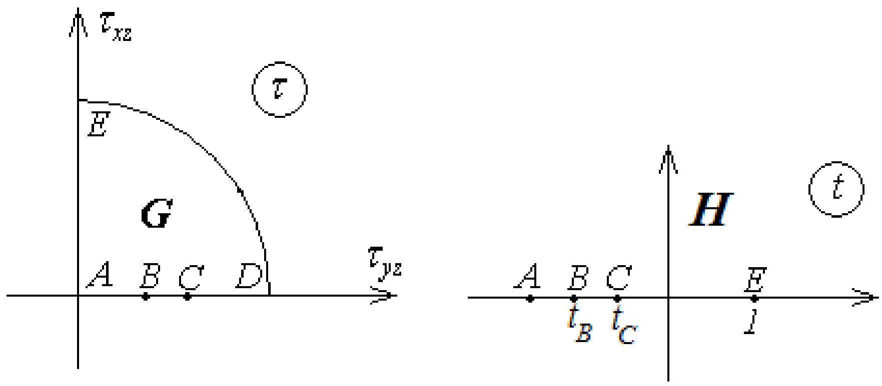

Рис. 2. Комплексна площина τ і її конформний образ у площині t.

$$\tau(t) = k\frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{-2t}}{\sqrt{t+1}}. \tag{3}$$

Тут і далі під $\sqrt{t+\alpha}$, α – дійсне число, розуміємо аналітичну в області H функцію, що набуває дійсних додатних значень коли t – дійсне додатне число більше за α .

Відносно функції $\lambda(t) = \tau(t)(\zeta(t) - l)$ отримуємо в H таку задачу Келдиша-Сєдова

$$\operatorname{Re}\lambda(t) = 0 \quad (t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)), \qquad \operatorname{Im}\lambda(t) = h\tau_1(t) \quad (t \in [-1, t_B]),$$

$$\operatorname{Re}\lambda(t) = -l\tau_1(t) \quad (t \in (t_B, t_C)), \qquad \operatorname{Im}\lambda(t) = 0 \quad (t \in [t_C, 1]). \tag{4}$$

В точках зміни типу крайових умов (точки $t_B, t_C, 1$) функція $\lambda(t)$ обмежена внаслідок обмеженості функцій $\tau_1(t)$ і $\zeta(t)$ у цих точках. Відповідний обмежений розв'язок задачі Келдиша-Сєдова (4) існуватиме за умови

$$h\int_{-1}^{t_B} F(\eta)d\eta = l\int_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta, \tag{5}$$

де $F(\eta)=\tau_1(\eta)\big/\sqrt{|P(\eta)|}$, $P(\eta)=(\eta+1)(\eta-t_B)(\eta-t_C)(\eta-1)$ і виражається формулою

$$\lambda(t)=\frac{1}{\pi}\sqrt{P(t)}S(t). \tag{6}$$

Тут $S(t)=\left(h\int_{-1}^{t_B}F(\eta)\frac{d\eta}{\eta-t}-l\int_{t_B}^{t_C}F(\eta)\frac{d\eta}{\eta-t}\right)$, $\sqrt{P(t)}$ – аналітична у H функція, рівна $t^2+o(t^2)$ при $t\to\infty$.

Забезпечивши виконання умови (5) та рівність переміщення на гранях півшару заданим значенням w_0

$$\frac{1}{\mu}\left|\lambda(t_C)-\lambda(t_B)-\int_{t_B}^{t_C}\frac{\lambda(t)\tau'(t)dt}{\tau'(t)}\right|=w_0,$$

отримуємо систему рівнянь для знаходження параметрів t_B і t_C.

Беручи до уваги що границя пластичної зони є образом відрізка $[0,1]$ площини t при його відображенні функцією $\zeta(t)$, отримуємо рівняння межі континуальної зони пластичних деформацій:

$$\begin{cases} y(t)=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{2(t-t_B)(t-t_C)t(1-t)}S(t), \\ x(t)=l-\dfrac{1}{\pi}\sqrt{(t-t_B)(t-t_C)}(1-t)S(t) \quad (t\in[0,1]). \end{cases} \tag{7}$$

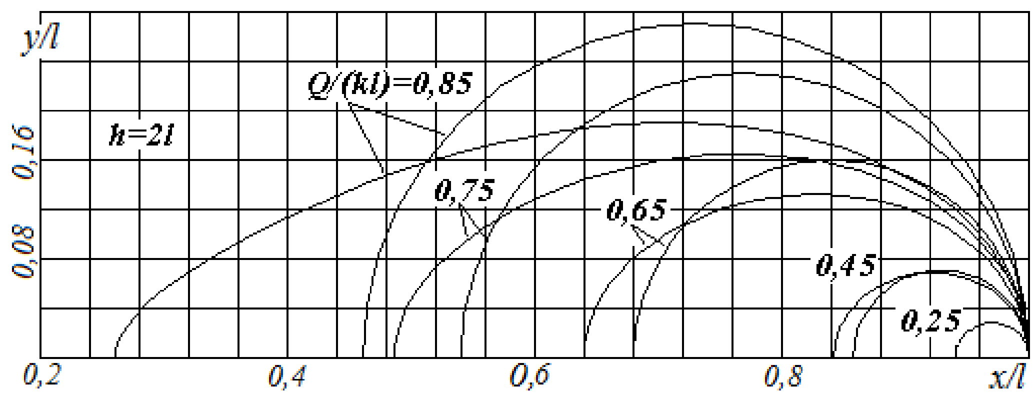

Рис. 3. Континуальні пластичні зони, визначені за розв'язком пружно-пластичної задачі і зони, та за лінійною моделлю пластичної зони (ЛМПЗ) [3] (Q – величина сили на гранях півшару).

Дослідимо тепер розвиток пластичної зони у формі смуги в площині розрізу. У цьому випадку границя області аналітичності D_1 функції $\tau(\zeta)$ не містить невідомих ділянок: $D_1=\{0\le x<\infty, 0\le y\le h\}$. Образом області D_1 у площині τ є знову область G як і для континуальної зони. В результаті, функцію $\tau(\zeta)$ можна отримати безпосередньою побудовою конформного відображення. Для даного випадку отримуємо

$$\tau(\zeta)=k\frac{\sqrt{ch(\pi l/h)-ch(\pi\zeta/h)}-\sqrt{ch(\pi(l-d_1)/h)-ch(\pi\zeta/h)}}{\sqrt{ch(\pi l/h)-ch(\pi(l-d_1)/h)}}. \tag{8}$$

Зв'яжемо довжину пластичної смуги з переміщенням граней півшару та діючою на них силою Q. Із формул (3), (8) отримуємо

$$w_0 = \frac{k}{\mu\sqrt{ch(\pi l/h) - ch(\pi(l-d_1)/h)}} \int_0^h \left(\sqrt{ch(\pi l/h) - \cos(\pi y/h)} - \sqrt{ch(\pi(l-d_1)/h) - \cos(\pi y/h)}\right) dy$$

$$Q = \frac{k}{\mu\sqrt{ch(\pi l/h) - ch(\pi(l-d_1)/h)}} \left(\int_0^l \sqrt{ch(\pi l/h) - ch(\pi x/h)}\, dx - \int_0^{l-d_1} \sqrt{ch(\pi(l-d_1)/h) - ch(\pi x/h)}\, dx \right)$$

.(9)

Для декількох співвідношень між висотою півшару і віддаллю вершини тріщини-розрізу від торця півшару пораховані за формулами (9) залежності довжини пластичної смуги від діючої на грані сили Q наведені на рис. 2. Якщо висота півшару не перевищує l наявність граней суттєво впливає на розвиток пластичної смуги. Для висот півшару від l до $2l$ цей вплив стає менш суттєвим, а для $h > 2l$ – майже непомітним. Тобто з огляду на процес розвитку пластичної смуги півшар висотою $h = 2l$ можна вважати півпростором. Для такого часткового випадку формули (8), (9) значно спрощуються і набувають вигляду

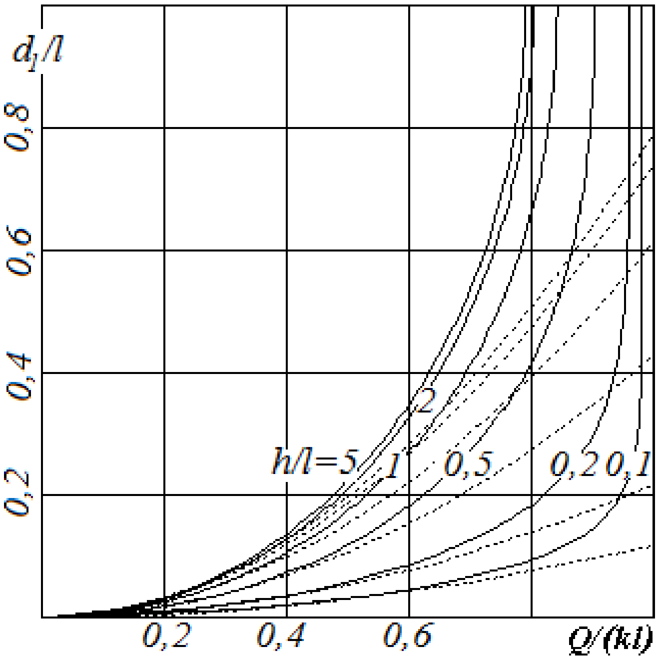

Рис. 3. Довжина пластичної смуги, визначена за моделлю локалізованої пластичної зони (суцільні лінії) та за ЛМПЗ [3] (штрихові лінії).

$$\tau(\zeta) = k\,\frac{\sqrt{l^2 - \zeta^2} - \sqrt{(l-d_1)^2 - \zeta^2}}{\sqrt{2ld_1 - d_1^2}},$$

$$Q = (\pi k/4)\sqrt{2ld_1 - d_1^2}\,,$$

$$d_1 = l - \sqrt{l^2 - 16Q^2/(\pi^2 k^2)}\,.$$

Література

1. Кривень В.А. Непрерывное и разрывные решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ. -хим. мех. материалов. – 1985. – №6. – С.10–16.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения// М.: Физматгиз, 1968. – 512с.

3. Кривень В.А. Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2004. - №4. - С. 41-46.