

Секція: МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ
Керівник: доц. Борис Шелестовський

УДК 519.7

Григорій Габрусєв, к.ф.-м.н., доц., Ірина Габрусєва, к.т.н.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ПОПЕРЕДНЬО ДЕФОРМОВАНОЇ ТОВСТОЇ ПЛИТИ ПРИ ЇЇ КОНТАКТІ ІЗ ПАРАБОЛІЧНИМ ШТАМПОМ

У роботі проведено побудову моделі попередньо деформованої товстої плити при її гладкій контактній взаємодії із жорстким осесиметричним параболічним штампом. Базові співвідношення, що визначають напружено-деформований стан товстої плити з початковими напруженнями, яка моделюється попередньо напруженим півпростором, наведені в рамках лінеаризованої теорії пружності.

Ключові слова: контактні напруження, початкові деформації, параболічний штамп, товста плита, півпростір.

Hryhorii Habrusiev, Iryna Habrusieva

MODELING OF THE PREVIOUSLY DEFORMED THICK PLATE when IT is in CONTACT WITH A PARABOLIC PUNCH

A model of a previously deformed thick plate in case of its smooth contact interaction with the rigid axisymmetric parabolic punch is constructed in this work. The basic relations determining stress-strain state of the thick plate with initial stresses, which is modelled by the previously stressed half-space are provided within the framework of the linearized elasticity theory.

Keywords: contact stresses, initial deformations, parabolic punch, thick plate, semi-space.

Побудова математичної моделі пружної товстої плити є важливим завданням при проектуванні деталей машин та елементів споруд. Зокрема у будівництві для оцінки міцності бетонних перекриттів, монолітних фундаментних плит, для оцінки міцності дорожнього полотна, тощо. Щоб мінімізувати похибку, необхідно враховувати максимальну кількість чинників, що впливають на контактну взаємодію. Початкові деформації, які безпосередньо впливають на контактні напруження та переміщення, є одним із ключових факторів. У загальному випадку постановка таких задач вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, проте при досить великих початкових деформаціях можна обмежитися і її лінеаризованим варіантом.

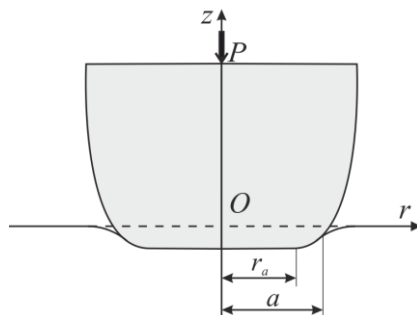


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Розглянемо задачу, про втиснення сталюю силою P жорсткого параболічного штампа складної конфігурації у попередньо напружену товсту плиту, яку моделюватимемо півпростором [1]. Виберемо циліндричну систему координат $Or\theta z$ так, щоб координатна площина $Or\theta$ збігалася з граничною площиною півпростору, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис. 1).

Штамп доторкнувся до півпростору в точці O . Із збільшенням сили P , розміри ділянки контакту також збільшуються. Вважатимемо, що

її радіус a відомий, тоді величина прикладеної сили визначається із умови

$$P = -2\pi \int_0^a r \sigma_{zz}(r, 0) dr, \quad (1)$$

а граничні умови поставленої задачі мають вигляд

$$\sigma_{rz}(r) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(r) = 0, \quad a \leq r; \quad (3)$$

$$u_z(r) = f(r), \quad 0 \leq r \leq a.$$

Функція $f(r)$ відповідає формі поверхні, що обмежує штамп. Виберемо її у вигляді $f(r) = u_z(a) + \omega(r)$. Внаслідок цього остання гранична умова набуде вигляду

$$u_z(r) - u_z(a) = \omega(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (4)$$

$$\omega(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2R}(r_a - a)^2, & 0 \leq r \leq r_a; \\ \frac{1}{2R}[(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2], & r_a < r \leq a, \end{cases}$$

де R – фокальний параметр параболи.

Будемо вважати залишкові напруження, що виникли у півпросторі, однорідними. Тому вирази для компонентів тензора напружень і вектора переміщень можна записати у наступному вигляді [1]

$$\sigma_{rz}(r, z) = -\frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 \{ [A_1 + A_2(s_0 + \alpha z)] e^{\alpha z} + [B_1 + B_2(s_0 - \alpha z)] e^{-\alpha z} \} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (5)$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = c_{44}(1+m_1)l_1 \int_0^\infty \alpha^3 \{ [A_1 + A_2(s + \alpha z)] e^{\alpha z} + [B_1 + B_2(s - \alpha z)] e^{-\alpha z} \} J_0(\alpha r) d\alpha;$$

$$u_r(r, z) = -\int_0^\infty \alpha^2 \{ [A_1 + A_2(1 + \alpha z)] e^{\alpha z} + [B_1 + B_2(1 + \alpha z)] e^{-\alpha z} \} J_1(\alpha r) d\alpha; \quad (6)$$

$$u_z(r, z) = u_3(r, z) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 \{ [A_1 + A_2(s_1 + \alpha z)] e^{\alpha z} + [B_1 + B_2(s_1 - \alpha z)] e^{-\alpha z} \} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

В останніх співвідношеннях константи c_{44} , m_1 , n_1 , l_1 , s , s_0 , s_1 залежать від пружного потенціалу й обираються у кожному окремому випадку відповідно до його характеру [2]. A_i та B_i – невідомі функції, що визначаються із граничних умов задачі.

На граничній площині півпростору при $z = 0$, ввівши позначення $F_1 = A_1 + B_1$, $F_2 = A_2 + B_2$, із (5), (6) отримаємо

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 \{ F_1 + s_0 F_2 \} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = c_{44} (1 + m_1) l_1 \int_0^{\infty} \alpha^3 \{F_1 + sF_2\} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (8)$$

$$u_z(r, 0) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^{\infty} \alpha^2 \{F_1 + s_1 F_2\} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (9)$$

Задовольнивши граничну умову (2), із (7) отримуємо співвідношення між невідомими функціями F_1 та F_2 :

$$F_1 = -s_0 F_2. \quad (10)$$

Із врахуванням (10) вирази для нормальних напружень (8) та вертикальних переміщень (9) набувають вигляду:

$$\sigma_{zz}(r) = c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1 \int_0^{\infty} \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (11)$$

$$u_z(r) = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}} \int_0^{\infty} \alpha^2 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (12)$$

Задовольнивши граничну умову (3), матимемо:

$$c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1 \int_0^{\infty} \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad a \leq r. \quad (13)$$

Введемо невідому функцію $x(r)$, $0 \leq r \leq a$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (13) на проміжок $0 \leq r < \infty$:

$$c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1 \int_0^{\infty} \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r) d\alpha = x(r) \eta(a - r), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (14)$$

де $\eta(r)$ – одинична функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Врахувавши їх неперервність, а також рівність нулю на границі ділянки контакту (при $r = a$) подамо $x(r)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями $J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right)$

$$\sigma_{zz}(r) = x(r) = \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (15)$$

де λ_n , $n = \overline{1, N}$ – додатні корені функції Бесселя $J_0(\lambda_n) = 0$, a_n – невідомі коефіцієнти. Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (14), отримуємо вираз

$$\alpha^2 F_2 = \frac{1}{c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1} \sum_{n=1}^N a_n \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr, \quad 0 \leq \alpha < \infty. \quad (16)$$

Використавши співвідношення (12), (16) та граничну умову (4) матимемо

$$k_1 \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) [J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)] d\alpha = \omega(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (17)$$

$$\text{де } k_1 = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{c_{44} (1 + m_1) (s - s_0) l_1 \sqrt{n_1}}; \quad \Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr.$$

Помноживши співвідношення (17) на $rJ_0\left(\frac{\lambda_q}{a}r\right)$ та проінтегрувавши отримані вирази по r від 0 до a , отримуємо:

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) [\Psi_q(\alpha) - K_q J_0(\alpha a)] d\alpha = \frac{w_q}{k_1}, \quad q = \overline{1, N}, \quad (18)$$

де $K_q = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a}r\right) dr$; $w_q = \int_0^a r \omega(r) J_0\left(\frac{\lambda_q}{a}r\right) dr$.

Співвідношення (18) визначають систему N лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_n . При розв'язанні системи (18) доцільно зробити заміну

$$a_n = \frac{1}{2k_1 R} a_n^*. \quad (19)$$

Зв'язок між фокальним параметром параболи R та величиною прикладеної сили встановлюється співвідношенням (1), звідки

$$R = \frac{-\pi}{2k_1 P} \sum_{n=1}^N a_n^* K_n. \quad (20)$$

Врахувавши (20), за допомогою (15) та (19) отримуємо закон розподілу контактних напружень під штампом

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)}{\sum_{n=1}^N a_n K_n}.$$

А із співвідношень (12), (16) та (19) встановлюємо формулу для визначення вертикальних переміщень точок граничної площини півпростору

$$u_z(r) = -\frac{k_1 P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha}{\sum_{n=1}^N a_n K_n}.$$

Із використанням побудованої математичної моделі можна провести дослідження напружено-деформованого стану попередньо деформованої товстої плити при її гладкій контактній взаємодії з жорстким осесиметричним параболічним штампом та проаналізувати вплив початкових деформацій на величину та характер контактних напружень і вертикальних переміщень точок граничної площини плити.

Отримані результати можна використати також при побудові експериментальної методики визначення характеру наявних у тілі початкових деформацій, що базується на втисненні у досліджувану плиту штампа певної форми.

Література.

1. Габрусев Г. В. Вплив початкових деформацій товстої плити на її контактну взаємодію із параболічним штампом / Г. Габрусев, І. Габрусєва // Вісник ТНТУ. - 2017. - Том 85. - № 1. - С. 29-37.
2. Habrusiev H. The effect of initial deformations of the thick plate on its contact interaction with the ring punch / Hryhorii Habrusiev, Iryna Habrusieva, Boris Shelestovs'kyi // Scientific Journal of TNTU. - 2018. - Vol 90. - No 2. - P. 50-59.