УДК 621.391:519.72

Роман Юзефович[1,2], д.т.н., доц., Ігор Яворський[1,3], д.ф.-м.н., проф., Іван Мацько[1], к.т.н., Микола Варивода[1]

[1]Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Україна
[2]Національний університет "Львівська політехніка", Україна
[3]Технологічно-природничий університет, Польща

АНАЛІЗ ДИСПЕРСІЇ КОГЕРЕНТНОЇ ОЦІНКИ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНОЇ ГУСТИНИ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Отримано асимптотичні формули для дисперсії оцінок, які дають можливість дослідити залежність систематичної та середньоквадратичної похибок оцінювання від довжини відрізка реалізації, точки усічення корелограми, а також спектральних характеристик сигналу.

Ключові слова: періодично нестаціонарні вібраційні сигнали, спектральний аналіз, взаємокореляційна функція, дисперсія.

Roman Yuzefovych, Ihor Javorskyj, Ivan Matsko, Mykola Varyvoda

ANALYSIS OF COHERENT ESTIMATOR VARIANCE OF CROSS-SPECTRAL DENSITY FOR PERIODICALLY CORRELATED RANDOM PROCESSES

The asymptotic formulae for estimator variance, which allow to investigate dependences of systematic and mean square errors of estimation on realization length, point of correlogram cutoff and spectral characteristics of signal are derived.

Keywords: periodically non-stationary vibration signals, spectral analysis, cross-correlation function, variance.

У процесі тривалої експлуатації обертових механізмів відбуваються технологічні зміни, які призводять до суттєвих змін властивостей сигналу у спектральній області, а саме до корельованості відповідних гармонічних складових [1–3]. Ступінь та характер такої корельованості описується спектральними характеристиками періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Взаємний спектральний аналіз сигналів, відібраних у різних точках механічної системи, дозволяє досліджувати залежності між гармонічними складовими вібрацій і завдяки цьому більш успішно розв'язувати задачі локалізації та типізації дефектів [4].

Оцінювання взаємоспектральних характеристик за експериментальними даними здійснюють як за періодограмним [5], так і корельограмним [1] методами. За останнім оцінки взаємоспектральних характеристик знаходяться на основі інтегральних перетворень Фур'є згладжених оцінок взаємоспектральних характеристик. Для оцінки взаємоспектральної густини маємо:

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)k(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u\,, \tag{1}$$

де $k(u)$ – функція вікна: $k(-u)=k(u)$, $k(0)=1$, $k(u)=0$, при $|u|>u_m$, u_m – точка усічення корелограми. Для знаходження оцінки взаємокореляційної функції $\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)$ можуть бути використані як когерентний, так і компонентний методи. Вибір того чи іншого методу приводить до специфічних властивостей оцінки (1). Розглянемо аналіз дисперсії оцінки (1) для випадку, коли оцінка взаємокореляційної функції обчислюється за когерентним методом, тобто

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+nT), \tag{2}$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT),$$

$$\hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT).$$

Дисперсія оцінки (1) визначається формулою:

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-u_m}^{u_m}\int_{-u_m}^{u_m}R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}\omega(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2, \tag{3}$$

де $R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2)=E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_1)\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_2)-E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_1)E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_2)$. Когерентну оцінку кореляційної функції (2) можна записати у такому вигляді:

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT)-\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t+nT), \tag{4}$$

де

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t)=\hat{m}_{\xi}(t)-\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi(t+nT)-m_{\xi}(t+nT)\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overset{\circ}{\xi}(t+nT),$$

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t)=\hat{m}_{\eta}(t+u)-\hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\eta(t+u+nT)-m_{\eta}(t+u+nT)\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT).$$

На основі співвідношення (4) для гауссових ПКВП у першому наближенні отримуємо:

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\begin{bmatrix}b_{\xi}(t,nT)b_{\eta}(t+u_1,u_2-u_1+nT)+\\+b_{\xi\eta}(t,u_2+nT)b_{\xi\eta}(t,u_1-nT)\end{bmatrix}.$$

Запишемо функцію

$$b_{\zeta}(t,nT,u_1,u_2)=b_{\xi}(t,nT)b_{\eta}(t+u_1,u_2-u_1+nT)+b_{\xi\eta}(t,u_2+nT)b_{\xi\eta}(t,u_1-nT),$$

яка періодично змінюється за часом, тому її можна записати у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\zeta}(t,nT,u_1,u_2)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}.$$

Врахуємо, що

$$b_{\xi}(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{B}_k^{(\xi)}(u)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t},\ b_{\eta}(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{B}_k^{(\eta)}(u)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t},$$

$$b_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t},$$

тоді

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)\right].$$

Вираз для дисперсії (3) можна переписати наступним чином:

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=\sum_{k\in\mathbb{Z}}D_k(\omega)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}, \tag{5}$$

де

$$D_l(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(u_1)k(u_2)\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}\omega(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\right].$$

Виразимо кореляційні компоненти через спектральні

$$B_k^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}\omega,\ B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\eta)}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}\omega,$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}\omega,$$

а функцію вікна $k(u)$ через вагову функцію:

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_2)e^{\mathrm{i}\omega_2 u}\mathrm{d}\omega_2.$$

Після перетворень знаходимо

$$D_k(\omega) = \sum_{l\in Z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\begin{matrix}\lambda(\omega_1+\omega)\lambda(\omega_1+\omega-l\omega_0)\, f_{k+l}^{(\xi)}(\omega_2)\, f_{-l}^{(\eta)}(\omega_1)\, g(\omega_1+\omega_2,N)+\\ +\lambda(\omega+\omega_2)\lambda(\omega-\omega_1)\, f_{l+k}^{(\xi\eta)}(\omega_2)\, f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega_1)\, g(\omega_1+\omega_2,N)\end{matrix}\right]\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2,$$

де

$$g(\omega,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{i\omega nT}.$$

Функція $\lambda(\omega)$ має гострі піки при нульовому значенні аргументу, тому можна вважати, що $\lambda(\omega_1+\omega)\lambda(\omega_1+\omega+l\omega_0)\approx 0$ для $l\neq 0$. Якщо на ширині спектрального вікна спектральні компоненти змінюються мало, то

$$D_k(\omega)\approx f_0^{(\eta)}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1+\omega)\, f_k^{(\xi)}(\omega_2)\, g(\omega_1+\omega_2,N)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 +$$

$$+\sum_{l\in\square} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)\, f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)\lambda(\omega+\omega_2)\, g(\omega_2-\omega_1,N)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

Провівши певні перетворення і ввівши

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^2(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u, \qquad (6)$$

коефіцієнти Фур'є дисперсії оцінки (5) визначаються наближеною формулою

$$D_k(\omega) = \frac{2\pi}{\theta}\left[f_0^{(\eta)}(\omega)W(0)\sum_{p\in Z} f_k^{(\xi)}(\omega+p\omega_0)+\sum_{p\in Z}W(2\omega+p\omega_0)\sum_{l\in Z} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)\, f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega)\right]. \qquad (7)$$

Ці величини прямують до нуля при $\theta \to \infty$. Швидкість їх збіжності залежить як від спектральних характеристик даного ПКВП, так і від форми вибраного вікна, а саме, властивостей функції $W(\omega)$.

Використовуючи (6), а також формулу Пуассона

$$\frac{1}{T}\sum_{l \in Z} e^{\mathrm{i} l \omega_0 u} = \sum_{l \in Z} \delta\left(u - lT\right),$$

маємо

$$\sum_{p \in Z} W\left(2\omega - p\omega_0\right) = \frac{T}{2\pi}\sum_{p \in Z} k^2\left(pT\right) e^{\mathrm{i}2\omega pT},$$

$$W\left(0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-u_m}^{u_m} k^2\left(u\right) \mathrm{d}u .$$

Останній інтеграл є величиною, обернено пропорційною до так званої еквівалентної смуги частот спектрального аналізу Δf_e [6], при чому $W\left(0\right) = \left(2\pi \Delta f_e\right)^{-1}$. Еквівалентна смуга частот Δf_e, характеризуючи ширину кореляційного вікна, має вирішальний вплив на точність оцінювання. Оскільки для типових вікон величина $\frac{1}{\Delta f_e}$ набуває значення від $0.5u_m$ до $2u_m$ [7], то при $\frac{u_m}{\theta} \ll 1$ складові (7) будуть незначними за величиною. Отже, при заданій довжині відрізка реалізації θ дисперсія оцінки спектральної густини (1) буде зменшуватися зі зменшенням ширини кореляційного вікна. Вибір параметрів u_m і θ слід проводити, виходячи з конкретної мети спектрального аналізу і сформованих на цій основі критеріїв якості оцінювання з використанням формул (5) і (7).

Література

1. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: ФМІ НАН України, 2013. – 802 с.
2. Antoni J. Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 987–1036.
3. Cyclostationarity: Theory and Methods. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. F. Chaari, J. Leskow, A. Sanches-Ramirez. – New York: Springer, 2013. – 186 p.
4. Юзефович Р. М. Неруйнівний контроль вузлів складних машинних комплексів за взаємостатистичними характеристиками вібраційних сигналів / Р. М. Юзефович, О. Ю. Дзерин, І. Й. Мацько, І. М. Яворський, І. Г. Стецько // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2017. – № 3. – С. 14–20.
5. Взаємокореляційний когерентний аналіз періодично нестаціонарних випадкових сигналів / Яворський І.М., Юзефович Р.М., Кравець І.Б., Мацько І.Й. // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36 (112). – С. 5–13.
6. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа. – М.: Радио и связь, 1984. – 159 с.
7. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. – М.: Энергия, 1974. – 239 с.