УДК 536.2

Борис Шелестовський, к. ф.-м. н., доц., Володимир Михайлишин
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В СИСТЕМІ ТІЛ ЦИЛІНДР-ПІВПРОСТІР

Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті між циліндром та півпростором. Одержано формули для визначення температурних полів при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях циліндра і півпростору. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температури в зоні контакту.

Ключові слова: температура, циліндр, півпростір, неідеальний тепловий контакт, інтегральне рівняння.

Boris Shelestovs'kyi, V. Myhaylyshyn

MATHEMATICAL MODELLING OF THE HEAT CONDUCTIVITY PROCESS IN THE CYLINDER - HALF-SPACE BODY SYSTEM

The solution of the axes-symmetric temperature task for the body system cylinder-semispace under non-ideal heat contact between cylinder and semispace have been built. Formula for determination temperature fields under different temperature conditions on the surfaced of the cylinder and semispace have been obtained. The influence of the contact conductivity on the temperature distribution in the contact area has been investigated.

Keywords: temperature, cylinder, half-space, nonideal thermal contact, integral equation.

Розглянемо круговий циліндр радіуса R і довжиною L, який знаходиться в неідеальному тепловому контакті з півпростором. На вільному торці циліндра підтримується постійна температура T_0, матеріали тіл є ізотропними. Границя півпростору поза циліндром має нульову температуру, а бічна поверхня циліндра теплоізольована. Необхідно визначити температурне поле у циліндрі та півпросторі. Введемо циліндричну систему координат r, θ, z, центр якої лежить на поверхні півпростору, а вісь Oz спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, які позначені індексом "1", відносяться до півпростору, без індексів – до циліндра.

Математична модель задачі наступна:

Граничні умови

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z}, \;\; \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0\left(T^1 - T\right) \quad \left(0 \le r \le R, \; z = 0\right), \tag{1}$$

$$T^1 = 0 \;\; \left(R \le r < \infty, \; z = 0\right). \tag{2}$$

$$T = T_0 \;\; \left(0 \le r \le R, \; z = L\right) . \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \;\; \left(r = R, \; 0 \le z \le L\right) . \tag{4}$$

Температурне поле T визначається із рівняння

$$\nabla^2 T = 0 \; . \tag{5}$$

Для циліндричної області розв'язок рівняння (5) будуємо методом Фур'є:

$$T(r,\ z) = A_0 + B_0 z + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\beta_k r\right)\left(A_k sh\beta_k z + B_k ch\beta_k z\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_0\left(\gamma_k r\right)\left(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z\right), \qquad (6)$$

де A_k, B_k, C_k, D_k – довільні постійні; $J_0\left(\beta_k r\right)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0\left(\beta_k r\right)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля до (5), одержимо зображення температури в півпросторі через довільну функцію $\varphi_1(\eta)$:

$$T^1(\rho,\varsigma) = \int_0^{\infty} \varphi_1(\eta) e^{-\eta\varsigma} J_0(\eta\rho) d\eta\,, \qquad (7)$$

де $\rho = \dfrac{r}{R}$, $\varsigma = \dfrac{z}{R}$.

Задовольняючи граничну умову (3), отримаємо:

$$T(\rho,\varsigma) = T_0\left\{1 + C_0^1 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}(\varsigma - l) - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho)\frac{sh\mu_k(l-\varsigma)}{ch\mu_k l}\right\},\ l = \frac{L}{R}. \qquad (8)$$

тут $C_k^{(1)}$ – нескінченна система постійних.

Задоволення першої умови (1) і умови (2) приводить до парних інтегральних рівнянь відносно функції $\varphi_1(\eta)$:

$$\int_0^{\infty} \eta\varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = T_0\left(C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho)\right)\ (\rho < 1), \qquad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0\ \ (\rho > 1), \qquad (10)$$

розв'язок яких отримаємо у вигляді:

$$\varphi_1(\eta) = \frac{2}{\pi} T_0\left[C_0^{(1)}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k C_k^{(1)}\int_0^1 \sin\eta \sin\mu_k y dy\right]. \qquad (11)$$

Друга умова (1), з врахуванням співвідношень (7), (8), запишеться так:

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = T_0\left\{1 - \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R}\right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_k l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R}\mu_k\right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho)\right\}. \qquad (12)$$

Підставляючи (11) в (12), отримаємо:

$$\frac{2}{\pi} T_0 C_0^{(1)}\int_0^{\infty}\frac{J_0(\eta\rho)}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta\right) d\eta + \frac{2}{\pi} T_0\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k C_k^{(1)}\int_0^{\infty} J_0(\eta\rho) d\eta\int_0^1 \sin\eta\, y \sin\mu_k y dy =$$

$$= T_0\left\{1 - \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R}\right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_k l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R}\mu_k\right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k\rho)\right\}\ (\rho < 1). \qquad (13)$$

Помноживши рівність (13) на ρ та $\rho J_0\left(\mu_n\rho\right)$ і проінтегрувавши в межах від 0 до 1, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $C_k^{(1)}$.

$$\alpha_k^{(1)}C_k^{(1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{k,n}^{(1)}C_n^{(1)}=\gamma_k^{(1)}\quad\left(k=0,1,\ldots\right),\quad \alpha_0^{(1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}l-\frac{\lambda_z^1}{h_0R}\right)+\frac{2}{3\pi}. \qquad (14)$$

$$\alpha_0^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\infty}J_0\left(\eta\rho\right)d\eta\int_0^1\sin\eta y\sin\mu_k y dy=\frac{2}{\pi\mu_k}\left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k}-\cos\mu_k\right), \qquad (15)$$

$$\gamma_0^{(1)}=\frac{1}{2};\quad \alpha_k^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\rho J_0\left(\mu_k\rho\right)d\rho\int_0^{\infty}\frac{J_0\left(\eta\rho\right)}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}-\cos\eta\right)d\eta=\frac{2}{\pi\mu_k^2}\left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k}-\cos\mu_k\right),$$

$$\alpha_{k,n}=\frac{2}{\pi}\mu_n\int_0^1\rho J_0\left(\mu_k\rho\right)d\rho\int_0^{\infty}J_0\left(\eta\rho\right)d\eta\int_0^1\sin\eta y\sin\mu_k y dy=$$

$$=\frac{2}{\pi}\mu_n\frac{\mu_n\sin\mu_k\cos\mu_n-\mu_k\sin\mu_n\cos\mu_k}{\mu_k^2-\mu_n^2},$$

$$\alpha_{k,n}^{(1)}=\begin{cases}\alpha_{k,n} & k\neq n,\\ \alpha_{k,n}+\left(\dfrac{\lambda_z^1}{\lambda_z}th\mu_n l-\dfrac{\lambda_z^1}{h_0R}\mu_n\right)\dfrac{J_0^2\left(\mu_n\right)}{2}, & k=n,\end{cases}$$

$$\gamma_k^{(1)}=0\quad\left(k=1,2,\ldots\right).$$

Якщо бічні поверхні циліндра і півпростору теплоізольовані, то замість умови (2) маємо

$$\frac{\partial T^1}{\partial z}=0\quad\left(R\leq r\leq\infty,\ z=0\right).$$

Задача зводиться до визначення деяких постійних $C_k^{(2)}$ із нескінченної системи рівнянь виду (14).

Температурне поле в циліндрі визначається за формулою (13) шляхом заміни постійних $C_0^{(1)}$ і $C_k^{(1)}$ відповідно на $C_0^{(2)}\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}$ і $C_k^{(2)}\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}cth\mu_k l$, а в півпросторі – за формулою (7) через функцію $\varphi_2\left(\eta\right)$, де

$$\varphi_2\left(\eta\right)=T_0\left(1-C_0^{(2)}\right)\frac{\sin\eta}{\eta}-\frac{2}{\pi}T_0\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(2)}\int_0^1\cos\eta y\cos\mu_k y dy.$$

Визначивши необхідну кількість постійних $C_n^{(i)}$ можна знайти температурні поля і градієнт, а також термопружні потенціали і напруження від них в будь-якій точці циліндра і півпростору.

Розглянуто числовий приклад. Так як системи рівнянь є квазірегулярними при будь-яких співвідношеннях теплофізичних характеристичних тіл, то розв'язок їх знаходимо методом редукції із усічених систем. При цьому розв'язували систему 30-ти лінійних алгебраїчних рівнянь з 30-ма невідомими.