УДК 536.2

Б. Шелестовський, канд. фіз. – мат. наук, доц., В. Михайлишин
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ’ЯЗОК РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМИ ТІЛ ЦИЛІНДР-ПІВПРОСТІР

B. Shelestovs’kyi, Ph.D., Assoc.Prof., V. Myhaylyshyn

SOLUTION OF THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION FOR CYLINDER-SEMISPACE BODY SYSTEM

Побудуємо розв’язок кураєвої задачі теплопровідності для рівняння:

$$\nabla^2 T = 0 \ . \tag{1}$$

з граничними умовами:

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z}, \ \ \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0\left(T^1 - T\right) \quad \left(0 \le r \le R, \ z = 0\right), \tag{2}$$

$$T^1 = 0 \quad \left(R \le r < \infty, \ z = 0\right), \tag{3}$$

$$T = T_0 \quad \left(0 \le r \le R, \ z = L\right) \ , \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \left(r = R, \ 0 \le z \le L\right) \ . \tag{5}$$

Застосувавши метод відокремлення змінних Фур’є для розвитку рівняння (1) в циліндричній області, отримаємо:

$$T\left(r, \ z\right) = A_0 + B_0 z + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\beta_k r\right)\left(A_k sh\beta_k z + B_k ch\beta_k z\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_0\left(\gamma_k r\right)\left(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z\right), \tag{6}$$

де A_k, B_k, C_k, D_k – довільні постійні; $J_0\left(\beta_k r\right)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0\left(\beta_k r\right)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Температуру у півпросторі подамо у вигляді інтеграла Ганкеля:

$$T^1\left(\rho, \varsigma\right) = \int_0^{\infty} \varphi_1\left(\eta\right) e^{-\eta\varsigma} \ J_0\left(\eta\,\rho\right) d\eta \ , \tag{7}$$

де $\rho = \dfrac{r}{R}, \ \varsigma = \dfrac{z}{R}$.

Задовольняючи граничну умову (4), отримаємо:

$$T\left(\rho, \varsigma\right) = T_0\left\{1 + C_0^1 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(\varsigma - l\right) - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} J_0\left(\mu_k \rho\right) \frac{sh\mu_k\left(l - \varsigma\right)}{ch\mu_k l}\right\}, \ \ l = \frac{L}{R} \ . \tag{8}$$

тут $C_k^{(1)}$ – нескінченна система постійних.

Задовольняючи граничні умови (2), (3), одержимо парні інтегральні рівняння відносно функції $\varphi_1\left(\eta\right)$:

$$\int_0^{\infty} \eta\varphi_1\left(\eta\right) J_0\left(\eta\rho\right) d\eta = T_0\left(C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k C_k^{(1)} J_0\left(\mu_k \rho\right)\right) \ \ \left(\rho < 1\right), \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho)\, d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \tag{10}$$

розв’язок яких є функція:

$$\varphi_1(\eta) = \frac{2}{\pi} T_0 \left[C_0^{(1)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) + \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} \int_0^1 \sin\eta \sin\mu_k y dy \right]. \tag{11}$$

Задоволення другої умови (2) із врахуванням (7), (8), дає:

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho)\, d\eta = T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_k l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \mu_k \right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \right\}. \tag{12}$$

Підставляючи (11) в (12), отримаємо:

$$\frac{2}{\pi} T_0 C_0^{(1)} \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\rho)}{\eta} \left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) d\eta + \frac{2}{\pi} T_0 \sum_{k=1}^\infty \mu_k C_k^{(1)} \int_0^\infty J_0(\eta\rho)\, d\eta \int_0^1 \sin\eta\, y \sin\mu_k y dy =$$

$$= T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \right) C_0^{(1)} - \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_k l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \mu_k \right) C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \right\} \quad (\rho < 1). \tag{13}$$

Помноживши рівність (13) на ρ та $\rho J_0(\mu_n \rho)$ і проінтегрувавши в межах від 0 до 1, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $C_k^{(1)}$.

$$\alpha_k^{(1)} C_k^{(1)} + \sum_{n=0}^\infty \alpha_{k,n}^{(1)} C_n^{(1)} = \gamma_k^{(1)} \quad (k = 0,1,\ldots), \quad \alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \right) + \frac{2}{3\pi}. \tag{14}$$

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^\infty J_0(\eta\rho)\, d\eta \int_0^1 \sin\eta y \sin\mu_k y dy = \frac{2}{\pi\mu_k} \left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k \right), \tag{15}$$

$$\gamma_0^{(1)} = \frac{1}{2}; \quad \alpha_k^{(1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho)\, d\rho \int_0^\infty \frac{J_0(\eta\rho)}{\eta} \left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta \right) d\eta = \frac{2}{\pi\mu_k^2} \left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k \right),$$

$$\alpha_{k,n} = \frac{2}{\pi} \mu_n \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho)\, d\rho \int_0^\infty J_0(\eta\rho)\, d\eta \int_0^1 \sin\eta y \sin\mu_k y dy =$$

$$= \frac{2}{\pi} \mu_n \frac{\mu_n \sin\mu_k \cos\mu_n - \mu_k \sin\mu_n \cos\mu_k}{\mu_k^2 - \mu_n^2},$$

$$\alpha_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} \alpha_{k,n} & k \neq n, \\ \alpha_{k,n} + \left(\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th\mu_n l - \frac{\lambda_z^1}{h_0 R} \mu_n \right) \frac{J_0^2(\mu_n)}{2}, & k = n, \end{cases}$$

$$\gamma_k^{(1)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$