УДК 539.3

О. Самборська, канд. фіз.– мат. наук, доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ЗАДАЧАХ ПРО ВТРАТУ СТІЙКОСТІ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

O. Samborska Ph.D., Assoc.Prof.

APPLICATION OF FOURIER SERIES WITH CYLINDRICAL FUNCTIONS IN PROBLEMS OF BUCKLING OF FIBROUS COMPOSITES

Розглядається задача про втрату стійкості композиту з періодичним рядом циліндричних анізотропних волокон. Припускається, що на поверхнях розділу середовищ усі сили та зміщення неперервні.

Згідно з тривимірною лінеаризованою теорією стійкості деформівних тіл, складові зміщень виражаються через функції ψ і χ :

$$u_r = \frac{i}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z}, \quad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial r}, \; u_z = \mathrm{A}\left(\Delta + \mathrm{B}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi \tag{1}$$

Функції φ і χ є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left(\Delta + \zeta_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0, \; \left(\Delta^2 + \left(\zeta_2^2 + \zeta_3^2\right)\Delta\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \zeta_2^2\;\zeta_3^2\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)\chi = 0, \tag{2}$$

Ці функції φ та χ шукаємо у вигляді рядів Фур'є з циліндричними функціями.

Для модифікованої функції Бесселя $I_\nu(x)$ та функції Макдональда $K_\nu(x)$ справджуються такі асимптотичні формули:

$$\mathrm{I}_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x, \; \mathrm{K}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\;e^{-x}.$$

Оскільки розв'язки рівнянь (2) для матриці повинні задовольняти умови згасання на "нескінченності", то для нескінченної матриці застосовують ряди Фур'є з функціями Макдональда, а для волокон – з модифікованими функціями Бесселя.

Запишемо, наприклад, вирази для функцій $\chi_s\,(s = 2,3)$ для матриці та для волокна з номером q у випадку втрати стійкості у площині волокон.

$$\chi_s = \sum_{P=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{K}_n\left(\varsigma_s\gamma r_p\right)\cos n\theta_p\left(\mathrm{A}_{1n,s}^{p}\cos\gamma z_p + \mathrm{A}_{2n,s}^{p}\sin\gamma z_p\right), \tag{3}$$

$$\chi_s^{(1)q} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{I}_n\left(\varsigma_s^{(1)}\gamma\, r_q\right)\cos n\theta_q\left(\mathrm{A}_{1n,s}^{(1)q}\cos\gamma z_q + \mathrm{A}_{2n,s}^{(1)q}\sin\gamma z_q\right).$$

Оскільки для розв'язків повинні виконуватись умови періодичності, то достатньо задовольнити граничні умови на контурі лише одного волокна, наприклад, при $q = 0$. Для визначення невідомих коефіцієнтів, які входять у вирази (3), отримаємо нескінченну однорідну систему лінійних рівнянь, яка має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли її визначник $\Delta = 0$.

Доведено, що в одержаному характеристичному рівнянні нескінченний визначник можна замінити скінченним визначником деякого порядку.