

**О.Шаблій, докт. фіз.-мат. наук; О. Петрик; М.Петрик, канд. техн. наук**

*Тернопільській державній технічній університет імені Івана Пулюя*

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМ ЕЛЕКТРО-ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ**

*З використанням методів варіаційного числення, інтегрального перетворення Фур'є та методу Коші розв'язано спряжену та пряму задачу оптимального керування іонотранспортом з урахуванням інтегрального критерію мінімізації енерговитрат. Виконано числове моделювання оптимальних розподілів струму та густин електричних зарядів.*

**O. Shabliij, O. Petryk, M. Petryk**

## **MATHEMATICAL MODELING AND OPTIMAL CONTROL OF ELECTRO-DIFFUSION MASS TRANSFER SYSTEMS**

*With use of variations calculus methods, integral Fourier transform and Coushy method was solved direct and dual problems of optimum control of iontransfer with consider of intergral test of energy consumption minimum. Computational modeling of electric current and charges density distributions has been done.*

### **Умовні позначення**

$\varphi$  - електричний потенціал електролітичного середовища, [В];

$E = -grad\varphi$  - напруженість електричного поля електролітичного середовища, [В/м];

$u_i, z_i$   $i = \overline{1, 2}$  - валентність та електрична рухомість іонів (аніонів і катіонів);

$\varepsilon$  - відносна діелектрична проникність електролітного середовища;

$\rho_i, n_i$  - об'ємні густини електричних зарядів, [Кл/м<sup>3</sup>] та концентрації іонів (аніонів та катіонів) в електролітичному середовищі ( $\rho_i = n_i \cdot z_i \cdot e$ );

$e$  - елементарний заряд, [Кл];

$v$  - механічна швидкість потоку електроліту, [м/с];

$\varphi_0 = kT/e$  - специфічний осмотичний потенціал, що для водних розчинів при T=300 К приблизно дорівнює 25,9 мВ;

$\vec{j}_1, \vec{j}_2$  - вектори густини струму для аніонів (i=1) та катіонів (i=2), [А/м<sup>2</sup>];

$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 > 0$  - вектор густини струму;

$\mu_1$  - коефіцієнт іонопровідності аніонів;

$\Delta\varphi_{1,2} = \varphi_{2_0}(t) - \varphi_{1_0}(t) > 0$  - різниця потенціалів на катоді та аноді, [В];

$\rho_{1_0}(x), \rho_{2_0}(x)$  - початкові значення густин зарядів аніонів і катіонів, [Кл/м<sup>3</sup>] та в електролітичному середовищі, [В];

$\rho_{1_s}$  - гранично допустима густина зарядів аніонів в пограничному шарі, що є рівноважною з густиною осадженого металу на катоді, [Кл/м<sup>3</sup>];

$t, x$  - час, [с] та координата довжини робочої області електролітичного середовища, [м];

$\delta_1, \delta_2$  - умовні товщини приграничних шарів осадження металу на катоді та локалізації зарядів катіонів на аноді, [м].

Процеси електродифузійного переносу відіграють визначальну роль в гальванотехніці, при розробленні нових технологій покриттів, інтенсифікації процесів хімічної та харчової інженерії [1-5]. За своєю природою вони є енерговитратними і навіть енергоперевитратними, що потребує розроблення нових високоефективних

методів керування цими процесами, що ґрунтуються на глибокому аналізі сутності механізмів внутрішньої кінетики електромасопереносу та використанні інтегральних критеріїв оптимізації енергоспоживання на основі принципів Лагранжа та Понтрягіна [12, 6, 7]. На сьогоднішній день подібні математичні технології керування є здебільшого застосовними для традиційних задач інженерної механіки, термомеханіки, в теплотехнічних системах нагрівання та одержання холоду [6-9]. Однак для оптимального керування процесами електродифузії, що за своєю природою складають систему цілого ряду електрофізичних та фізико-хімічних процесів, в основі яких лежить власне йонперенос електричних зарядів у рідких середовищах різної природи, потрібно враховувати увесь цей комплекс фізичних чинників. Цим питанням і присвячена пропонована праця.

### 1. Основні фізичні закони та концепції

**Закони збереження.** Закони збереження електричних зарядів іонів для нестационарних процесів електролізу: градієнти густини струму для аніонів та катіонів пропорційні швидкості зміни їх зарядів [1]:

$$\text{grad } \vec{j}_1 = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t}; \quad \text{grad } \vec{j}_2 = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}. \quad (1)$$

Для простішої електрохімічної системи (1-го роду) справедливий закон електролізу: маса розчиненого або осадженого металу на катоді прямо пропорційна кількості електричного заряду, що переноситься [3]. Проходження електричного струму у цьому випадку супроводжується електророзчиненням металу, утвореного в середовищі в процесі проходження електролітичної реакції, супроводжуваної дисоціацією середовища на йони (аніони і катіони) та осадженням розчиненого металу (аніонів) на катоді.

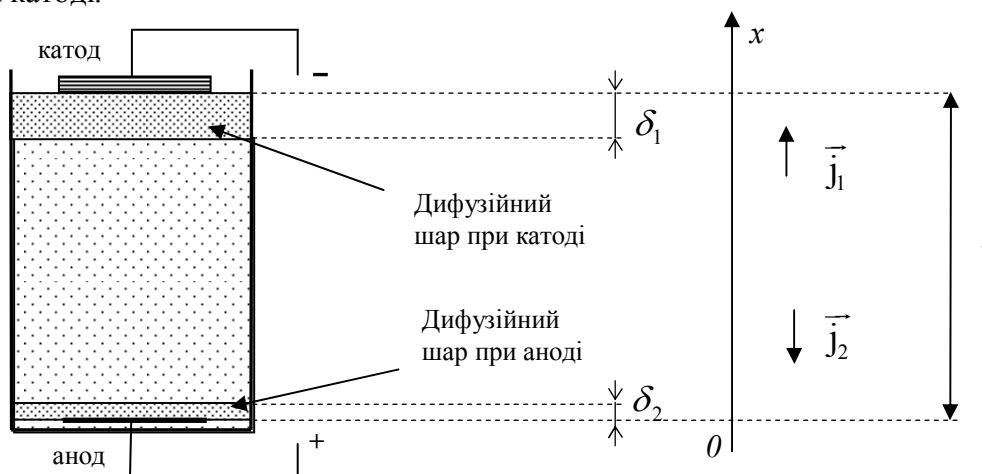


Рисунок 1 – Схематизація іонпереносу

**Вивід системи диференціальних рівнянь електродифузії (переносу зарядів в електроліті при електролізі).** Густина струму для кожного виду йонів з урахуванням повної дисоціації описується співвідношеннями Нернста-Планка [2, 5]:

$$\vec{j}_i = u_i \rho_i E - \varphi_0 \frac{u_i}{z_i} \text{grad } \rho_i + v \rho_i. \quad (2)$$

Підставивши співвідношення (2) в рівняння збереження електричних зарядів (1) в припущенні відсутності гідромеханічного руху (перемішування) електроліту, отримаємо:

$$\text{grad} \left( -u_i \rho_i \text{grad } \varphi - \varphi_0 \frac{u_i}{z_i} \text{grad } \rho_i \right) = -\frac{\partial \rho_i}{\partial t}; i = \overline{1, 2}. \quad (3)$$

Спростивши та переписавши отримані рівняння збереження електричних зарядів (3) дещо в іншому вигляді та доповнивши рівнянням зв'язку [5], отримаємо:

$$\begin{aligned} u_1 \nabla \left( -\rho_1 \nabla \varphi - \frac{\varphi_0}{z_1} \nabla \rho_1 \right) &= -\frac{\partial \rho_1}{\partial t}; \quad \rho_1 > 0; z_1 > 0; u_1 > 0; \\ u_2 \nabla \left( -\rho_2 \nabla \varphi - \frac{\varphi_0}{z_2} \nabla \rho_2 \right) &= -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}; \quad \rho_2 < 0; z_2 < 0; u_2 < 0; \\ \rho_1 + \rho_2 &= -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Коефіцієнти дифузії аніонів і катіонів пов'язані з їх рухомістю та валентністю наступними співвідношенням Енштейна [2]:

$$D_i = \frac{kT}{e} \cdot \frac{u_i}{z_i} = \varphi_0 \cdot \frac{u_i}{z_i}; \quad \frac{u_i}{z_i} > 0; \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

Враховуючи для електролітного розчину рівність за абсолютною величиною валентностей та рухомостей аніонів і катіонів  $z_1 = -z_2 \equiv z$  та  $u_1 = -u_2 \equiv u$  відповідно і здійснивши деякі перетворення в (5), отримуємо систему електродифузійних рівнянь в частинних похідних для електролітичного розчину:

$$\begin{aligned} \nabla (u \rho_1 \nabla \varphi + D \nabla \rho_1) &= \frac{\partial \rho_1}{\partial t}; \\ \nabla (u \rho_2 \nabla \varphi + D \nabla \rho_2) &= \frac{\partial \rho_2}{\partial t}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \varphi. \quad (7)$$

Тут  $D = \frac{kT}{e} \cdot \frac{u}{z} = \varphi_0 \cdot \frac{u}{z}$  - ефективний коефіцієнт дифузії іонів у розчині електроліту.

**Одновимірна математична постановка задачі електропереносу.** В одновимірній постановці отримаємо наступну нелінійну систему рівнянь переносу іонів (аніонів ( $i=1$ ) та катіонів ( $i=2$ ) в електролітичному середовищі:

$$\frac{\partial \rho_1(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right); \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_2(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right); \quad (9)$$

$$\rho_1(t, x) + \rho_2(t, x) = -\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2}; \quad (10)$$

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 > 0 \quad (\text{умова протікання електричного струму в електроліті}) \quad (11)$$

з початковими умовами

$$\rho_1(t, x)|_{t=0} = \rho_{1_0}(x); \quad \rho_2(t, x)|_{t=0} = \rho_{2_0}(x) \quad (12)$$

та симетричними крайовими умовами:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 + \rho_2) \right|_{x=0} = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_1}{\delta_1} \right] (\rho_1 + \rho_2) \Big|_{x=1} = 0; \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_2}{\delta_2} \right] \rho_2(t, x) \Big|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad (14)$$

$$\varphi(t, x) \Big|_{x=0} = \varphi_{1_0}(t); \quad \varphi(t, x) \Big|_{x=1} = \varphi_{2_0}(t). \quad (15)$$

Рівняння (8) системи (8)-(10) описує перенос електричних зарядів аніонів і їх осадження на катоді; рівняння (9) – описує перенос електричних зарядів катіонів в напрямку аноду.

**2. Основні типи початкових умов для розподілів густин заряду аніонів і катіонів у середовищі**

Процес дифузії в електроліті в значній мірі визначається попереднім перехідним процесом дисоціації хімічного розчину на катіони і аніони. В залежності від ступеня дисоціації (інтенсивності розділення середовища на аніони і катіони) можна виділити такі початкові розподіли заряду катіонів і аніонів, визначені початковими умовами (12) [3].

**Рівномірний розподіл.** При цьому густини заряду катіонів і аніонів рівномірно розподілені між катодом та анодом по всій довжині робочої області середовища (рис.2).

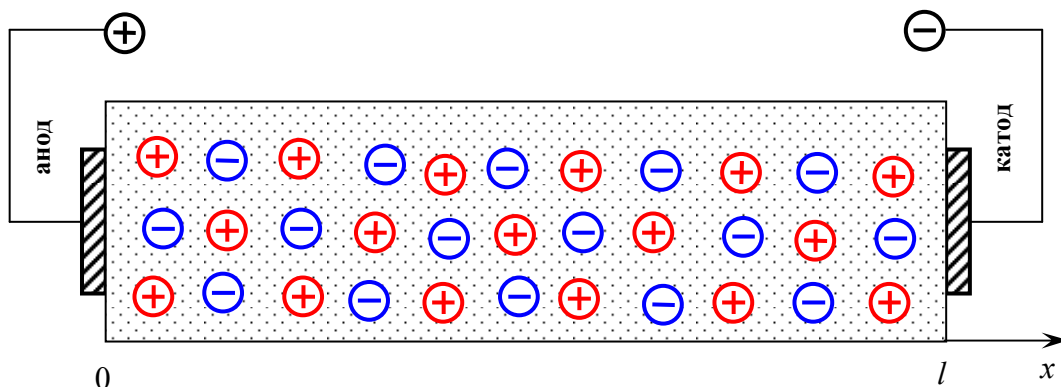


Рисунок 2 – Рівномірний розподіл

Для цього випадку початкові умови (12) набудуть вигляду:

$$\rho_1(t, x)|_{t=0} = \Gamma_1 = const; \quad \rho_2(t, x)|_{t=0} = \Gamma_2 = const; \quad (12.1)$$

або в безрозмірній формі:

$$\bar{\rho}_1(t, x)|_{t=0} = 1; \quad \bar{\rho}_2(t, x)|_{t=0} = \gamma_{12};$$

де  $\bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\Gamma_1}, \quad i = \overline{1,2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}.$

**Лінійний розподіл.** При такому розподілі, максимальна початкова густина заряду аніонів спостерігається у прианодній області ( $x=0$ ), і, за лінійним законом, густина заряду спадає у напрямку катода ( $x=l$ ). Аналогічно, густина заряду катіонів змінюється в протилежному напрямку від катода до аноду.

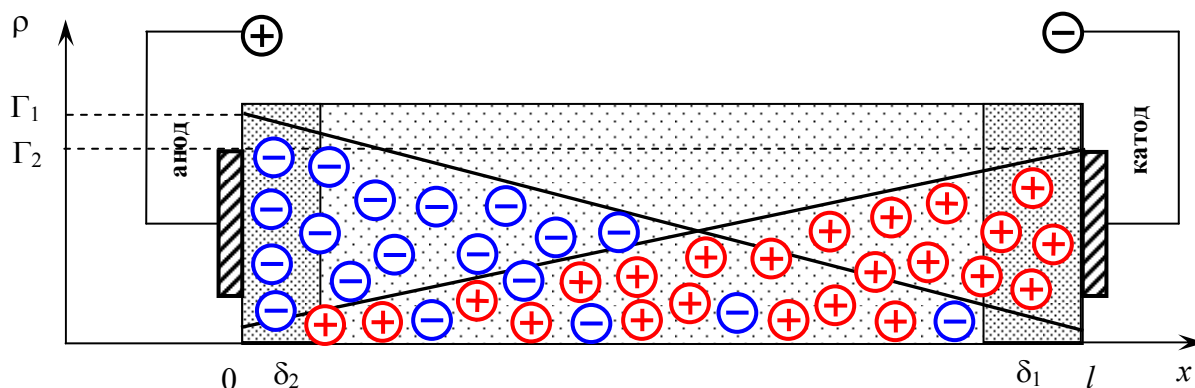


Рисунок 3 – Лінійний розподіл

В цьому випадку початкові умови (12) набувають вигляду:

$$\rho_1(t, x)|_{t=0} = \Gamma_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right); \quad \rho_2(t, x)|_{t=0} = \Gamma_2 \cdot \frac{x}{l}. \quad (12.2)$$

**Нормальний (експоненціальний) розподіл.** При такому розподілі густина заряду аніонів у середині прикатодного дифузійного шару  $\delta_1$  досягає максимуму, за нормальним законом (експоненціально) спадає як в напрямі аноду ( $x=0$ ) - різкий спад, так і у напрямі катоду ( $x=l$ ) – повільний експоненціальний спад. Аналогічно, згідно з законом, в протилежному напрямку від катоду до аноду змінюється початкова густина катіонів.

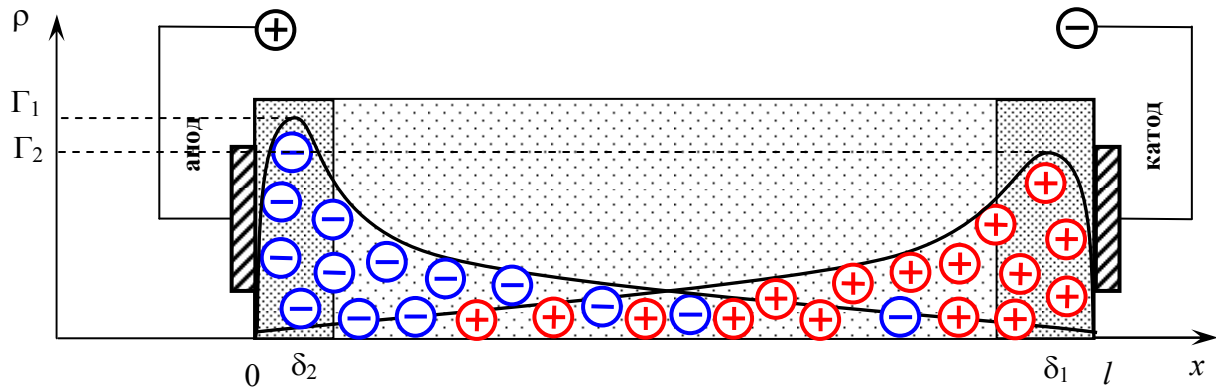


Рисунок 4 – Нормальний (експоненціальний) розподіл

В цьому випадку початкові умови (12) для такого розподілу набудуть вигляду:

$$\rho_1(t, x)|_{t=0} = \Gamma_1 \cdot (1 - e^{-\alpha_1 \cdot x}); \quad \rho_2(t, x)|_{t=0} = \Gamma_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot x}. \quad (12.3)$$

Тут  $\alpha_1, \alpha_2$  - емпіричні коефіцієнти, що підлягають уточненню.

Система рівнянь (8)-(10) виписана відносно густин зарядів  $\rho_1(t, x)$  і  $\rho_2(t, x)$ . Використовуючи формулу  $\rho_i(t, x) = n_i(t, x) \cdot z \cdot e$ , систему (8)-(10) можна виписати відносно концентрації іонів  $n_i(t, x)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , звівши у такий спосіб задачу переносу густини електричних зарядів до задачі масопереносу під дією електричного поля.

### 3. Варіаційна задача оптимального керування електродифузійного масопереносу

Розглянемо задачу оптимального керування електродифузійного масопереносу (16)-(22) при електролізі з урахуванням мінімального споживання електричної енергії. Для цього трансформуємо пряму нелінійну крайову задачу електродифузійного масопереносу (8)-(15) у такому вигляді:

$$\frac{\partial \rho_1(t, x)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} I_1 = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho_2(t, x)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} I_2 = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\rho_1 + \rho_2) = 0; \quad (18)$$

початкові умови

$$\rho_1(t, x)|_{t=0} = \rho_{1_0}(x); \quad \rho_2(t, x)|_{t=0} = \rho_{2_0}(x); \quad (19)$$

крайові умови:

$$\left. \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_1}{\delta_1} \right] \rho_1 \Big|_{x=1} = 0; \quad (20)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_2}{\delta_2} \right] \rho_2(t, x) \Big|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad (21)$$

$$\varphi(t, x) \Big|_{x=0} = \varphi_{1_0}(t); \quad \varphi(t, x) \Big|_{x=1} = \varphi_{2_0}(t). \quad (22)$$

Тут  $\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = I_1; \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = I_2$  - розподіли сил струму аніонів і катіонів в електролітичному середовищі.

**Математична постановка варіаційної задачі оптимального керування.** Сформулюємо для початку мету оптимального керування та випишемо інтегральний критерій оптимізації електродифузійним переносом заряджених частинок в електролітному середовищі з позиції забезпечення технологічних умов осадження металу на катоді.

**Мета оптимального керування** забезпечити в прикатодному дифузійному шарі товщиною  $\delta_1$  (при  $x=l$ ) необхідний розподіл густини зарядів аніонів  $\rho_1 = \rho_{1_k}$ , що забезпечує осадження необхідної кількості металу на катоді за час  $\tau$  згідно з умовою (23) [6, 7]:

$$\int_0^\tau \int_0^l (\rho_1 - \rho_{1_k}) \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) dx dt = 0. \quad (23)$$

при мінімальному енергоспоживанні.

**Інтегральний критерій оптимізації.** Виходячи з необхідної умови технологічності та ресурсозбереження (23), пропонується при цьому наступний енергозберігаючий критерій оптимізації, визначений як інтеграл від потужності джерел електродифузійного переносу за необхідний час технологічного осадження металу на катоді  $\tau$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l [\alpha \varphi^2 + \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2] dx dt \rightarrow \min. \quad (24)$$

Тут  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  - деякі вагові коефіцієнти.

**Побудова розширеного функціоналу Лагранжа.** Для оптимального керування електродифузійними джерелами, згідно з інтегральним критерієм (24), застосуємо один із методів варіаційного числення - метод множників Лагранжа [7]. Для цього побудуємо розширений функціонал від функцій стану системи електродифузійного переносу: розподілів густин зарядів  $\rho_1$  та  $\rho_2$ , що визначаються в подальшому шляхом розв'язання прямої задачі та шуканих згідно з критерієм керування (24) електродифузійних джерел  $I_1, I_2$  і потенціалу  $\varphi$  та знаходитимемо його мінімум [7]:

$$\Phi(\rho_1, \rho_2, I_1, I_2, \varphi) = \int_0^\tau \int_0^l \left[ \frac{1}{2} [\alpha \varphi^2 + \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2]^2 + \psi \cdot (\rho_1 - \rho_{1_k}) \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + \right. \\ \left. + \lambda_1 \cdot \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - u \frac{\partial I_1}{\partial x} \right) + \lambda_2 \cdot \left( \frac{\partial \rho_2}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} - u \frac{\partial I_2}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \lambda_3 \cdot \left( \varepsilon \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \rho_1 + \rho_2 \right) + \lambda_4 \left( I_1 - \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \lambda_5 \left( I_2 - \rho_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] dx dt \rightarrow \min. \quad (25)$$

Тут  $\psi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  - множники Лагранжа, що підлягають визначенню.

**Знаходження мінімуму розширеного функціоналу Лагранжа  $\Phi(\rho_1, \rho_2, I_1, I_2)$  та математична постановка спряженої крайової задачі оптимального керування.** Умовою мінімуму розширеного функціоналу  $\Phi(\rho_1, \rho_2, I_1, I_2)$  є рівність нулю його варіації  $\delta\Phi$  по усіх функціях стану  $\rho_1, \rho_2, I_1, I_2, \varphi$  [7]:

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\rho_2}\delta\rho_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial I_1}\delta I_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\delta I_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\delta\varphi = 0. \quad (26)$$

Звідси випливають рівності нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho_1} = 0; \frac{\partial\Phi}{\partial\rho_2} = 0; \frac{\partial\Phi}{\partial I_1} = 0; \frac{\partial\Phi}{\partial I_2} = 0; \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0. \quad (27)$$

Обчисливши усі частинні похідні розширеного функціоналу  $\Phi(\rho_1, \rho_2, I_1, I_2, \varphi)$  заданого формулою (25) і підставивши їх в рівності (27), після виконаного комплексу перетворень, спряжена задача оптимального керування, записана відносно лагранжових змінних має наступний вигляд: побудувати обмежений розв'язок системи диференціальних рівнянь 5-го порядку

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot I_1 + u \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + \lambda_4 = 0; \\ \alpha_2 \cdot I_2 + u \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} + \lambda_5 = 0; \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial t} + D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \psi \cdot \delta(t-\tau) \cdot \delta(x-l); \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_5 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \\ \varepsilon \frac{d^2}{dx^2} \lambda_3 + \frac{\partial}{\partial x} [\lambda_4 \rho_1 + \lambda_5 \rho_2] = -\alpha \cdot \varphi; \end{array} \right. \quad (28)$$

з часовими умовами:

$$\lambda_1(t, x)|_{t=\tau} = 0; \quad \lambda_2(t, x)|_{t=\tau} = 0; \quad (29)$$

та крайовими умовами:

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1(t, x)|_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_1}{\delta_1} \right) \lambda_1(t, x)|_{x=l} = 0; \quad (30)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_2}{\delta_2} \right) \lambda_2(t, x)|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \lambda_2(t, x)|_{x=l} = 0; \quad (31)$$

$$\varphi|_{x=0} = 0; \quad \lambda_3|_{x=0} = 0; \quad \lambda_3|_{x=l} = 0. \quad (32)$$

**Побудова розв'язку спряженої крайової задачі (28)-(32).** Віднімемо від першого рівняння системи (44) друге рівняння, а від третього – четверте. В результаті одержимо:

$$u \frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial x} + (\lambda_4 - \lambda_5) = -(\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2); \quad (33)$$

$$\frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial t} + D \frac{\partial^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial x^2} + (\lambda_4 - \lambda_5) \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \psi \cdot \delta(t-\tau) \cdot (x-l). \quad (34)$$

Виразивши з рівняння (49)  $(\lambda_4 - \lambda_5)$ :

$$(\lambda_4 - \lambda_5) = -u \frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial x} - (\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2) \quad (35)$$

та підставивши його в рівняння (35), отримаємо крайову задачу для визначення  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_1 - \lambda_2) - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial x} + D \frac{\partial^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial x^2} = \psi \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2) \quad (36)$$

з часовою умовою

$$(\lambda_1 - \lambda_2)|_{t=\tau} = 0 \quad (37)$$

та крайовими умовами

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u_2}{\delta_2} \right) (\lambda_1 - \lambda_2)|_{x=0} = 0; \quad (\text{тут } \lambda_2|_{x=0} = 0) \quad (38)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u_1}{\delta_1} \right) (\lambda_1 - \lambda_2)|_{x=l} = 0; \quad (\text{тут } \lambda_1|_{x=l} = 0). \quad (39)$$

1. Знаходження розв'язку  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ . З використанням методу Коші та інтегрального перетворення Фур'є [11], розв'язок  $(\lambda_1 - \lambda_2)$  крайової задачі (36)-(39) отримуємо у вигляді:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(t, x) = e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l H(t-s, x, \xi) \cdot e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi} \cdot F(\tau, l, s, \xi) d\xi ds, \quad (40)$$

де  $H(t, x, \xi)$  - функція впливу неоднорідностей (правої частини) рівняння (36)  $F(\tau, l, t, x)$  в побудові якого використовується структура ядра, яка має вигляд, поданий нижче.

$$F(\tau, l, t, x) = \psi \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2), \quad (41)$$

$$H(t, x, \xi) = \frac{2}{l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{D\tilde{\beta}_k^2 t} \cdot \frac{\cos \tilde{\beta}_k \xi \cdot \cos \tilde{\beta}_k x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \tilde{\beta}_k \right)^2 \right] l}} \quad (42)$$

Тут  $\{\tilde{\beta}_k\}_{k=1, \infty}$  - корені трансцендентного рівняння:

$$\text{ctg } \tilde{\beta} l = \frac{\delta_1}{\mu_1} \tilde{\beta}. \quad (43)$$

Отриманий розв'язок крайової задачі (52)-(55) в загальному вигляді є необмеженим при  $t \rightarrow \tau$ :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(t, x) = \frac{2}{l} e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{D\tilde{\beta}_k^2 t} \cdot \frac{\cos \tilde{\beta}_k \xi \cdot \cos \tilde{\beta}_k x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \tilde{\beta}_k \right)^2 \right] l}} \times e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi} \cdot \left( \psi \cdot \delta(s - \tau) \cdot \delta(\xi - l) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2) \right) \right] d\xi ds \equiv F_{\lambda_{1,2}}(t, x). \quad (44)$$

Обмеженість розв'язку (44) можна забезпечити шляхом накладання природної умови по  $\rho_1$ :  $\rho_1(t = \tau, z = l) = \rho_{1k}$  шляхом розв'язання прямої задачі, що буде показано в подальшому. Для попередніх інженерних розрахунків можна обмежитися першою гармонікою.

2. Знаходження розв'язку  $(\lambda_4 - \lambda_5)$ . Знаходимо розподіл  $(\lambda_4 - \lambda_5)(t, x)$  за формулою (35):



$$\begin{aligned}
 & (\lambda_4 - \lambda_5)(t, x) = \\
 & = -u \frac{2}{l} \cdot e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{D\tilde{\beta}_k^2 t} \cdot \frac{\cos \tilde{\beta}_k \xi \cdot \left( \frac{u}{2D} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \tilde{\beta}_k x + \tilde{\beta}_k \cdot \sin \tilde{\beta}_k x \right)}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \tilde{\beta}_k \right)^2 \right] l}} \times \right. \\
 & \left. e^{\frac{-u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi} \cdot \left( \psi \cdot \delta(s - \tau) \cdot \delta(\xi - l) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot (\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2) \right) \right) \right] d\xi ds - (\alpha_1 I_1 - \alpha_2 I_2) \equiv \quad (45) \\
 & \equiv F_{\lambda_{4,5}}(t, x).
 \end{aligned}$$

Після комплексу перетворень остаточно отримуємо розв'язок спряженої крайової задачі оптимального керування:

$$\lambda_1(t, x) = e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \int_0^\tau \int_0^l H(t-s, x, \xi) \cdot e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot F_1(s, \xi, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) d\xi ds, \quad (46)$$

$$\lambda_2(t, x) = e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \int_0^\tau \int_0^l H(t-s, x, \xi) \cdot e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot F_2(s, \xi, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) d\xi ds. \quad (47)$$

$$\lambda_3(t, x) = -\frac{u}{\varepsilon} (\rho_1 + \rho_2) \cdot e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \int_0^\tau \int_0^l H(t-s, x, \xi) \cdot e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot F_2(s, \xi, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) d\xi ds + \quad (48) \\
 + F_3(t, x, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2).$$

$$\lambda_4(t, x) = -u \frac{2}{l} \cdot e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{D\tilde{\beta}_k^2 t} \cdot \frac{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \cos \tilde{\beta}_k x + \tilde{\beta}_k \cdot \sin \tilde{\beta}_k x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \tilde{\beta}_k \right)^2 \right] l}} \cos \tilde{\beta}_k \xi \cdot \right. \\
 \left. \cdot e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi} \cdot F_1(s, \xi, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) \right] d\xi ds + \quad (49)$$

$$+ F_{4_1}(t, x) - \frac{1}{2} (\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2).$$

$$\lambda_5(t, x) = -u \frac{2}{l} \cdot e^{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{D\tilde{\beta}_k^2 t} \cdot \frac{\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \cos \tilde{\beta}_k x + \tilde{\beta}_k \cdot \sin \tilde{\beta}_k x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \tilde{\beta}_k \right)^2 \right] l}} \cos \tilde{\beta}_k \xi \cdot \right. \\
 \left. \cdot e^{-\frac{u}{2D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi} \cdot F_2(s, \xi, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) \right] d\xi ds - \quad (50)$$

$$- F_{5_1}(t, x) - \frac{1}{2} (\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 & F_1(t, x, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) = \psi \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + F_{3_1}(t, x, \Delta \varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) - \\
 & - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[ F_4(t, x) - \frac{1}{2} (\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} F_{\lambda_{1,2}}(t, x) \right].
 \end{aligned}$$

$$F_{4_1}(t, x) = \frac{1}{2} \left[ F_{\lambda_{4,5}}(t, x) + u \frac{\partial}{\partial x} F_{\lambda_{1,2}}(t, x) \right].$$

$$F_{5_1}(t, x) = \frac{1}{2} \left[ F_{\lambda_{4,5}}(t, x) + u \frac{\partial}{\partial x} F_{\lambda_{1,2}}(t, x) \right].$$

$$F_2(t, x, \Delta\varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) = -\frac{u}{\varepsilon} F_{12}(t, x) \cdot (\rho_1 + \rho_2) +$$

$$+ F_{31}(t, x, \Delta\varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left( F_{\lambda_5}(t, x) + \frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) \right)$$

$$F_3(t, x, \Delta\varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) = F_{31}(t, x, \Delta\varphi, I_1, I_2, \rho_1, \rho_2) - \frac{u}{\varepsilon} (\rho_1 + \rho_2) F_{12}(t, x).$$

**Знаходження параметрів керування.** Далі за визначеними  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  знаходимо параметри керування  $I_1, I_2, \varphi$ :

$$I_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \left( u \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + \lambda_4 \right); \quad (51)$$

$$I_2 = -\frac{1}{\alpha_2} \left( u \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} + \lambda_5 \right); \quad (52)$$

$$\varphi = -\frac{1}{\alpha} \left[ \varepsilon \frac{d^2}{dx^2} \lambda_3 + \frac{d}{dx} (\lambda_4 \bar{\rho}_1 + \lambda_5 \bar{\rho}_2) \right]. \quad (53)$$

Тут  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$  визначені в попередньому наближенні.

#### 4. Розв'язання варіаційної задачі оптимального керування енергоощадними процесами електродифузійного масопереносу

**Основні фізичні припущення.** Розглянемо задачу оптимального керування електродифузійного масопереносу (16)-(22) з попереднього розділу при деяких допущеннях. Припускається, що функція електричного потенціалу електролітичного середовища розподілена за лінійним законом і має такий вигляд:

$$\varphi(t, x) = A_1 \cdot x + A_2; \quad (23)$$

$$\varphi|_{x=0} = 0; \quad \varphi|_{x=l} = \varphi_2^0; \quad (24)$$

Тут  $A_1, A_2$  – постійні, які визначаються з крайових умов (24). Звідси відповідно одержимо:

$$\varphi(t, x) = \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot x. \quad (25)$$

Обчисливши похідну  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  та підставивши в формули сил струмів  $\rho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = I_1$  та  $\rho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = I_2$ , отримаємо початкові наближення для струмів  $I_1, I_2$ :

$$I_1^0 = \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \rho_1; \quad I_2^0 = \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \rho_2. \quad (26)$$

Також, підставивши  $\varphi(t, x)$ , визначене формулою (26), в рівняння (18) отримуємо:

$$\rho_1 + \rho_2 = 0 \text{ або } \rho_1 = -\rho_2. \quad (27)$$

А звідси, враховуючи (19), випливає що:  $I_1 = -I_2$ .

**Мета керування процесом електролізу:** забезпечити в прикатодному дифузійному шарі товщиною  $\delta_1$  (при  $x=l$ ) необхідний розподіл зарядів аніонів  $\rho_1 = \rho_{1k}$ , що забезпечує осадження необхідної кількості металу на катоді за час  $\tau$  згідно з умовою (28):

$$\int_0^{\tau} \int_0^l (\rho_1 - \rho_{1k}) \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) dx dt = 0. \quad (28)$$

**Інтегральний критерій оптимізації.** При цьому розглядається наступний критерій оптимізації, визначений як інтеграл від потужності джерел електро-дифузійного масопереносу за необхідний час технологічного осадження металу на катоді  $\tau$ :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_0^l [\alpha \varphi^2 + \alpha_1 I_1^2] dx dt \rightarrow \min. \quad (29)$$

Тут  $\alpha, \alpha_1$  - вагові коефіцієнти.

Для оптимального керування електродифузійними джерелами, згідно з інтегральним критерієм (28), застосуємо метод множників Лагранжа. Можна також використовувати і широко відомий у фізиці і техніці метод Гамільтона (як різновид методу Лагранжа). Для цього побудуємо розширений функціонал від функцій стану системи електродифузійного переносу: розподілів зарядів  $\rho_1$ , що визначаються шляхом розв'язання прямої задачі та шуканих, згідно з критерієм керування (28) електродифузійного джерела струму  $I_1$  і потенціалу  $\varphi$ , та знаходитимемо його мінімум [ 7]:

$$\Phi(\rho_1, I_1, \varphi) = \int_0^{\tau} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} [\alpha \varphi^2 + \alpha_1 I_1^2]^2 + \psi \cdot (\rho_1 - \rho_{1k}) \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + \right. \\ \left. + \lambda_1 \cdot \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - u \frac{\partial I_1}{\partial x} \right) + \lambda_4 \left( I_1 - \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] dx dt \rightarrow \min. \quad (30)$$

Тут  $\psi, \lambda_1, \lambda_4$  - множники Лагранжа, які підлягають визначенню.

Умовою мінімуму розширеного функціоналу  $\Phi(\rho_1, I_1, \varphi)$  є рівність нулю його варіації  $\delta\Phi$  по усіх функціях стану  $\rho_1, I_1, \varphi$ :

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} \delta\rho_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} \delta I_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \delta\varphi = 0. \quad (31)$$

Звідси випливають рівності нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0. \quad (32)$$

В результаті обчислень усіх частинних похідних розширеного функціоналу  $\Phi(\rho_1, I_1, \varphi)$ , заданого формулою (30), підставимо їх в рівності (32) та після комплексу перетворень одержуємо систему диференціальних рівнянь спряженої задачі у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot I_1 + u \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_4 = 0; \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + D \cdot \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^2} + \lambda_4 \frac{\varphi_2^0}{l} = \psi \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l); \\ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_4 \rho_1) = -\alpha \varphi. \end{array} \right. \quad (33)$$

з часовими умовами:

$$\lambda_1(t, x) \Big|_{t=\tau} = 0; \quad \lambda_4(t, x) \Big|_{t=\tau} = 0. \quad (34)$$

та крайовими умовами:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \lambda_1(t, x) \right|_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_1}{\delta_1} \right) \lambda_1(t, x) \Big|_{x=l} = 0; \quad \varphi|_{x=0} = 0. \quad (35)$$

**Побудова розв'язку спряженої крайової задачі (33)-(35).** Виразивши з першого рівняння (33)  $\lambda_4$ :

$$\lambda_4 = -u \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - \alpha_1 I_1 \quad (36)$$

та підставивши його в друге рівняння системи (33) отримаємо крайову задачу для визначення  $\lambda_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_1 - u \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lambda_1 = \psi \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + \frac{\varphi_2^0}{l} \alpha_1 I_1. \quad (37)$$

з часовою умовою

$$\lambda_1|_{t=\tau} = 0. \quad (38)$$

та крайовими умовами

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u_2}{\delta_2} \right) \lambda_1|_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u_1}{\delta_1} \right) \lambda_1|_{x=l} = 0. \quad (39)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (37) з однорідною часовою і крайовими умовами (38)-(39) будемо методом Коші у вигляді:

$$\lambda_1(t, x) = e^{\frac{u \varphi_2^0}{2D l} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l H(t - s, x, \xi) \cdot e^{-\frac{u \varphi_2^0}{2D l} \xi} \cdot F(\tau, l, s, \xi) d\xi ds, \quad (40)$$

де  $H(t, x, \xi)$  - функція впливу неоднорідностей (правої частини) рівняння (37)  $F(\tau, l, t, x)$ , в побудові якого використовується структура ядра, яка має вигляд, поданий нижче.

$$F(\tau, l, t, x) = \psi \cdot \delta(t - \tau) \cdot \delta(x - l) + \frac{\varphi_2^0}{l} \alpha_1 I_1, \quad (41)$$

$$H(t, x, \xi) = \frac{2}{l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{\omega_k t} \cdot \frac{\cos \beta_k \xi \cdot \cos \beta_k x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_k \right)^2 \right] l}}; \quad \text{де: } \omega_k = D \left[ \beta_k^2 - \left( \frac{u \varphi_2^0}{2D l} \right)^2 \right]. \quad (42)$$

Тут  $\{\beta_k\}_{k=1, \infty}$  - корені трансцендентного рівняння:

$$\text{ctg } \beta_k l = \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_k. \quad (43)$$

Отриманий розв'язок крайової задачі (33)-(35) в загальному вигляді є необмеженим при  $t \rightarrow \tau$ :

$$\lambda_1(t, x) = \frac{2}{l} e^{\frac{u \varphi_2^0}{2D l} x} \cdot \int_0^\tau \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{D \left[ \beta_k^2 - \left( \frac{u \varphi_2^0}{2D l} \right)^2 \right] (t-s)} \cdot \frac{\cos \beta_k \xi \cdot \cos \beta_k x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_k \right)^2 \right] l}} \times \right. \\ \left. e^{-\frac{u \varphi_2^0}{2D l} \xi} \cdot \left( \psi \cdot \delta(s - \tau) \cdot \delta(\xi - l) + \frac{\varphi_2^0}{l} \alpha_1 I_1 \right) \right] d\xi ds. \quad (44)$$

Обмеженість розв'язку (44) можна забезпечити шляхом накладання природної умови по  $\rho_1$ :  $\rho_1(t = \tau, z = l) = \rho_1$  шляхом розв'язання прямої задачі, що буде показано в

подальшому. Для попередніх інженерних розрахунків можна обмежитися першою гармонікою. З третього рівняння системи (33) знайдемо

$$\lambda_4 = -\frac{\alpha \cdot \varphi_2^0 \cdot l}{\rho_1} = -\frac{\alpha (\varphi_2^0)^2}{I_1}, \quad (45)$$

необхідне для визначення  $I_1$ .

**Визначення оптимального розподілу сили струму  $I_1(t, x)$ .** Оптимальний розподіл сили струму аніонів  $I_1(t, x)$  визначається, згідно з формулою (46), через отримані розподіли спряжених параметрів  $\lambda_1$  і  $\lambda_4$ :

$$I_1(t, x) = -\frac{1}{\alpha_1} \left( u \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \lambda_4 \right), \quad (46)$$

де  $\lambda_1$  і  $\lambda_4$  визначаються формулами (55), (56). Враховуючи нелінійний зв'язок між  $I_1$  та  $\lambda_1$  і  $\lambda_4$  ( $\lambda_1$  і  $\lambda_4$  отримані як функції від  $I_1$ ), для визначення  $I_1$  необхідно задатися в  $\lambda_1$  і  $\lambda_4$  початковим наближеннями  $I_1^0(t, x)$ .

**Початковий розподіл  $I_1^0(t, x)$ .** Початковий розподіл струму шукаємо у вигляді (27):

$$I_1^0(t, x) = \frac{\varphi_2^0}{l} \rho_1(t, x). \quad (27')$$

Підставляючи (27') в рівняння (16) одержимо таку крайову задачу:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - u \cdot \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \rho_1 = 0 \quad (47)$$

з початковою умовою:

$$\rho_1(t, x)|_{t=0} = \rho_{10}(x) \equiv \Gamma_1 = const \quad (48)$$

та крайовими умовами:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mu_1}{\delta_1} \right] \rho_1 \Big|_{x=1} = 0. \quad (49)$$

Розв'язок крайової задачі (47)-(49), що розглядається, будемо з використанням інтегрального перетворення Фур'є і методу Коші [11] та поза (27') визначаємо початковий розподіл струму:

$$\begin{aligned} I_1^0(t, x) &= \Gamma_1 \cdot \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l e^{-D \left[ \beta_k^2 - \frac{u \varphi_2^0}{D l} \right] t} \cdot \frac{\cos \beta_{1k} \xi \cdot \cos \beta_{1k} x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_{1k} \right)^2 \right] l}} d\xi = \\ &= \Gamma_1 \cdot \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D \left[ \beta_k^2 - \frac{u \varphi_2^0}{D l} \right] t} \cdot \frac{\cos \beta_{1k} x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_{1k} \right)^2 \right] l}} \cdot \frac{\sin \beta_{1k} l}{\beta_{1k} l}. \end{aligned} \quad (50)$$

Тут власні числа  $\beta_{1k}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$  утворюють монотонно зростаючу послідовність і є коренями трансцендентного рівняння:  $\operatorname{ctg} \beta_k l = \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_1$ .

Ввіши такі позначення:

$$\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \frac{2}{l^2} \varphi_2^0; \quad \omega_{2k} = D \left[ \beta_{1k}^2 - \frac{u}{D} \varphi_2^0 \right]; \quad \bar{B}_{1k} = B_{1k} \frac{\sin \beta_{1k} l}{\beta_{1k} l}; \quad B_{1k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_{1k} \right)^2 \right] l}}$$

остаточно переписемо формулу (74), одержавши початкове наближення для  $I_1^0(t, x)$ :

$$I_1^0(t, x) = \tilde{\Gamma}_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{1k} \cdot e^{-\omega_{2k} t} \cdot \cos \beta_{1k} x. \quad (51)$$

**Визначення**  $\lambda_1, \lambda_4$ . Використовуючи для обчислення  $I_1$  початкове наближення (61), формули (54)-(55) можемо переписати у вигляді:

$$\lambda_1(t, x) = \frac{2}{l} e^{\frac{u}{2D} \frac{\varphi_2^0}{l} x} \cdot \int_0^{\tau} \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{D \left[ \beta_{1k}^2 - \frac{u}{4D} \frac{\varphi_2^0}{l} \right] (t-s)} \cdot \frac{\cos \beta_{1k} \xi \cdot \cos \beta_{1k} x}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_{1k} \right)^2 \right] l}} \times \right. \\ \left. e^{-\frac{u}{2D} \frac{\varphi_2^0}{l} \xi} \cdot \left( \psi \cdot \delta(s-t) \cdot \delta(\xi-l) + \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \alpha_1 I_1^0(s, \xi) \right) \right] d\xi ds; \quad (52)$$

або після перепозначення та спрощення виразів отримаємо:

$$\lambda_1(t, x) = \frac{2}{l} e^{\tilde{\varphi} x} \cdot \int_0^{\tau} \int_0^l \left[ \psi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot e^{\omega_k (t-s)} \cdot \cos \beta_{1k} \xi \cdot e^{-\tilde{\varphi} \xi} \cdot \cos \beta_{1k} x \cdot \delta(s-\tau) \cdot \delta(\xi-l) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\varphi_2^0}{l} \alpha_1 \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot e^{\omega_k (t-s)} \cdot \cos \beta_{1k} \xi \cdot e^{-\tilde{\varphi} \xi} \cdot \cos \beta_{1k} x \cdot \tilde{\Gamma}_1 \cdot \sum_{k_1=1}^{\infty} \bar{B}_{1k_1} e^{-\omega_{2k_1} s} \cos \beta_{1k_1} x \right] d\xi ds, \quad (53)$$

$$\lambda_4(t, x) = -\alpha \left( \varphi_2^0 \right)^2 \cdot \left( I_1^0 \right)^{-1}. \quad (54)$$

$$\text{Тут } \tilde{\varphi} = \frac{u}{2D} \frac{\varphi_2^0}{l}; \quad \omega_k = D \left[ \beta_{1k}^2 - \left( \frac{u}{2D} \frac{\varphi_2^0}{l} \right)^2 \right].$$

Для обчислення функції  $\lambda_1(t, x)$  врахуємо, що:

$$\int_a^b f(\xi) \cdot \delta(\xi-x) d\xi = \begin{cases} 0 & x < a \cup x > b \\ \frac{1}{2} f(x) & x = a \cup x = b, \\ f(x) & a < x < b \end{cases} \quad (55)$$

тоді

$$\lambda_1(t, x) = \frac{2}{l} \psi \cdot \int_0^{\tau} \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cdot e^{\omega_k (t-s)} \cdot e^{-\tilde{\varphi} \xi} \cdot \cos \beta_{1k} \xi \cdot \delta(s-\tau) \cdot \delta(\xi-l) \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \cdot \cos \beta_{1k} x d\xi ds + \\ + \frac{2}{l} \frac{\varphi_2^0}{l} \int_0^{\tau} \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cdot e^{\omega_k (t-s)} \cdot \cos \beta_{1k} \xi \cdot e^{-\tilde{\varphi} \xi} \cdot \left( \alpha_1 B_{1k} \frac{\varphi_2^0}{l} \cdot \sum_{k_1=1}^{\infty} \bar{B}_{1k_1} \cdot e^{-\omega_{2k_1} s} \cdot \cos \beta_{1k_1} \xi \right) \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \cdot \cos \beta_{1k} x d\xi ds = \quad (56) \\ = \frac{1}{2l} \psi \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \cdot e^{\omega_k (t-\tau)} \cdot \cos \beta_{1k} x + \tilde{\Gamma}_1 \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \cos \beta_{1k} x \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_k (t-\tau) - \omega_{2k_1} \tau} \right].$$

Тут

$$\tilde{B}_k = \bar{B}_{1k} \cos \beta_{1k} l \cdot e^{-\tilde{\varphi} l}; \quad \tilde{B}_{k, k_1} = B_{1k} \cdot \bar{B}_{1k_1} \cdot \frac{1}{\omega_{2k_1} + \omega_k} \theta_1(\beta_{1k}, \beta_{1k_1}); \quad \tilde{\Gamma}_1 = \frac{2}{l} \alpha_1 \tilde{\Gamma}_1 \left( \frac{\varphi_2^0}{l} \right);$$

$$\begin{aligned} \theta_1(\beta_{1_k}, \beta_{1_{k_1}}) &= \int_0^l e^{-\tilde{\varphi} \cdot \xi} \cdot \cos \beta_{1_k} \xi \cdot \cos \beta_{1_{k_1}} \xi d\xi = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\tilde{\varphi} l} \left[ \frac{1}{\tilde{\varphi}^2 + (\beta_{1_k} - \beta_{1_{k_1}})^2} \left( \tilde{\varphi} \cdot \cos(\beta_{1_k} - \beta_{1_{k_1}}) l - (\beta_{1_k} - \beta_{1_{k_1}}) \cdot \sin(\beta_{1_k} - \beta_{1_{k_1}}) l - \tilde{\varphi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tilde{\varphi}^2 + (\beta_{1_k} + \beta_{1_{k_1}})^2} \left( \tilde{\varphi} \cdot \cos(\beta_{1_k} + \beta_{1_{k_1}}) l - (\beta_{1_k} + \beta_{1_{k_1}}) \cdot \sin(\beta_{1_k} + \beta_{1_{k_1}}) l - \tilde{\varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

В результаті вираз для обчислення  $\lambda_1(t, x)$  можемо записати як:

$$\lambda_1(t, x) = \frac{1}{2l} \psi \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \cdot e^{\omega_k \cdot (t-\tau)} \cdot \cos \beta_{1_k} x + \tilde{\Gamma}_1 e^{\tilde{\varphi} x} \cdot \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_k(t-\tau) - \omega_{2k_1} \tau} \right] \cos \beta_{1_k} x. \quad (57)$$

**Визначення оптимального розподілу  $I_1(t, x)$ .** Обчислимо похідну  $\lambda_1(t, x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \lambda_1(t, x) &= \frac{1}{2l} \psi \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k e^{\omega_k \cdot (t-\tau)} \cdot (\tilde{\varphi} \cdot \cos \beta_{1_k} x - \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} x) + \\ &+ \tilde{\Gamma}_1 e^{\tilde{\varphi} x} \cdot \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_k(t-\tau) - \omega_{2k_1} \tau} \right] \cdot (\tilde{\varphi} \cdot \cos \beta_{1_k} x - \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} x) \end{aligned} \quad (58)$$

Підставивши у вираз (56)  $\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1(t, x)$  і  $\lambda_4(t, x)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} I_1(t, x) &= \\ &= -\frac{u}{\alpha_1} \left[ \frac{1}{2l} \psi(t, x) \cdot e^{\tilde{\varphi} x} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k e^{\omega_k \cdot (t-\tau)} \cdot (\tilde{\varphi} \cdot \cos \beta_{1_k} x - \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} x) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Gamma}_1 e^{\tilde{\varphi} x} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_k(t-\tau) - \omega_{2k_1} \tau} \right] \cdot (\tilde{\varphi} \cdot \cos \beta_{1_k} x - \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} x) \right] + \tilde{\Gamma}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_{1_k} \cdot e^{-\omega_{2k} t} \cdot \cos \beta_{1_k} x \right)^{-1}, \quad (59) \end{aligned}$$

$$\text{тут } \Gamma_2 = \frac{1}{\tilde{\Gamma}_1} \frac{\alpha}{\alpha_1} (\varphi_2^0)^2.$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (16) з початковою умовою (20) та крайовими умовами (21), застосувавши інтегральне перетворення Фур'є, в результаті одержимо вираз для обчислення  $\rho_1(t, x)$ :

$$\rho_1(t, x) = \int_0^l H_1(t, x, \xi) \cdot \rho_{1_0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l H_1(t-s, x, \xi) \cdot u \frac{\partial}{\partial \xi} I_1(s, \xi) d\xi ds. \quad (60)$$

В припущенні, що початкові розподіли густини  $\rho_i(x)$  можна розглядати як рівномірні в середовищі електроліту, тобто

$$\rho_1(t, x) \Big|_{t=0} = \Gamma_i = const;$$

та використовуючи отриманий вираз для  $I_1(t, x)$ , згідно з формулою (59):

$$\begin{aligned} \rho_1(t, x) &= \Gamma_1 \cdot \int_0^l H_1(t, x, \xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t \int_0^l H_1(t-s, x, \xi) \cdot u \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{u}{\alpha_1} \left[ \frac{1}{2l} \psi \cdot e^{\tilde{\varphi} \xi} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \cdot e^{\omega_k \cdot (s-\tau)} \cdot (\tilde{\varphi} \cdot \cos \beta_{1_k} \xi - \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} \xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{\Gamma}_1 e^{\tilde{\varphi} \xi} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \left[ e^{\omega_k s} - e^{\omega_k(s-\tau) - \omega_{2k_1} \tau} \right] \cdot (\tilde{\varphi} \cdot \cos \beta_{1_k} \xi - \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} \xi) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Gamma}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_{1_k} \cdot e^{-\omega_{2k} s} \cdot \cos \beta_{1_k} \xi \right)^{-1} \right] ds d\xi \end{aligned} \quad (61)$$

$$H_1(t, x, \xi) = \frac{2}{l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{\omega_k t} \cdot \cos \beta_{1_k} \xi \cdot \cos \beta_{1_k} x ; \quad (62)$$

$$\text{де } \omega_k = D \left[ \beta_{1_k}^2 - \left( \frac{u}{2D} \frac{\varphi_2^0}{l} \right)^2 \right]; \quad B_{1_k} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\delta_1}{\mu_1} \beta_{1_k} \right)^2 \right] l}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} I_1(s, \xi) = & \\ = -\frac{1}{\alpha_1} & \cdot \left[ \frac{1}{2l} \psi \cdot e^{\tilde{\varphi} \xi} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \cdot e^{\omega_k \cdot (s-\tau)} \cdot \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_{1_k}^2) \cdot \cos \beta_{1_k} \xi - 2\tilde{\varphi} \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} \xi \right] + \right. \\ & \left. + \tilde{\Gamma}_1 e^{\tilde{\varphi} \xi} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_k(t-\tau) - \omega_{k_1} \tau} \right] \cdot \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_{1_k}^2) \cdot \cos \beta_{1_k} \xi - 2\tilde{\varphi} \beta_{1_k} \cdot \sin \beta_{1_k} \xi \right] \right] + \quad (63) \\ & + \tilde{\Gamma}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{1_k}}{B_{1_k}} e^{\omega_k s} \cdot \frac{\sin \beta_{1_k} \xi}{(\cos \beta_{1_k} \xi)^2} \right). \end{aligned}$$

Підставивши вирази для  $H_1(t, x, \xi)$  та  $\frac{\partial}{\partial \xi} I_1(s, \xi)$  у формулу (61), одержимо:

$$\begin{aligned} \rho_1(t, x) = & \Gamma_1 \cdot \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} B_j e^{\omega_j t} \cos \beta_j \xi \cdot \cos \beta_j x d\xi + \\ & + \int_0^t \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} B_j e^{\omega_j(t-s)} \cos \beta_j \xi \cdot \cos \beta_j x \cdot u \cdot \left[ \frac{u}{\alpha_1} \cdot \left[ \frac{1}{2l} \psi \cdot e^{\tilde{\varphi} \xi} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \cdot e^{\omega_k(s-\tau)} \cdot \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_k^2) \cdot \cos \beta_k \xi - 2\tilde{\varphi} \beta_k \cdot \sin \beta_k \xi \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{\Gamma}_1 e^{\tilde{\varphi} \xi} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \left[ e^{\omega_k s} - e^{\omega_k(s-\tau) - \omega_{k_1} \tau} \right] \cdot \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_k^2) \cdot \cos \beta_k \xi - 2\tilde{\varphi} \beta_k \cdot \sin \beta_k \xi \right] \right] + \right. \\ & \left. + \tilde{\Gamma}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{B_k} e^{\omega_k s} \cdot \frac{\sin \beta_k \xi}{(\cos \beta_k \xi)^2} \right) \right] ds d\xi, \end{aligned}$$

після інтегрування

$$\begin{aligned} \rho_1(t, x) = & \Gamma_1 \cdot \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{B}_j e^{\omega_j t} \cos \beta_j x + \\ & + \frac{2}{l} u \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cos \beta_j x \cdot \left[ \frac{u}{\alpha_1} \cdot \left[ \frac{1}{2l} \psi \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \frac{1}{\omega_k - \omega_j} \left[ e^{\omega_k(t-\tau)} - e^{\omega_j t - \omega_k \tau} \right] \cdot \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_k^2) \cdot \theta_1(\beta_k, \beta_j) - 2\tilde{\varphi} \beta_k \cdot \theta_2(\beta_k, \beta_j) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{\Gamma}_1 \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} \tilde{B}_{k, k_1} \frac{1}{\omega_k - \omega_j} \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_j t} + e^{\omega_k(t-\tau) - \omega_{k_1} \tau} - e^{\omega_j t - \omega_k \tau - \omega_{k_1} \tau} \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_k^2) \cdot \theta_1(\beta_k, \beta_j) - 2\tilde{\varphi} \beta_k \cdot \theta_2(\beta_k, \beta_j) \right] \right] + \right. \\ & \left. + \tilde{\Gamma}_2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{B_k} \frac{1}{\omega_{2_k} - \omega_j} \left[ e^{\omega_{2_k} t} - e^{\omega_j t} \right] \cdot \theta_3(\beta_k, \beta_j) \right) \right] \quad (64) \end{aligned}$$

Тут

$$\theta_1(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) = \int_0^l e^{\tilde{\varphi} \xi} \cos \beta_{1_k} \xi \cos \beta_{1_j} \xi d\xi, \theta_2(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) = \int_0^l e^{\tilde{\varphi} \xi} \cos \beta_{1_k} \xi \sin \beta_{1_j} \xi d\xi,$$



$$\theta_1(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) = \int_0^l \frac{\cos \beta_{1_j} \xi \cdot \sin \beta_{1_k} \xi}{(\cos \beta_{1_k} \xi)^2} d\xi.$$

Зробивши заміни, (64) перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \rho_1(t, x) = & \Gamma_1 \cdot \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{B}_j e^{\omega_j t} \cos \beta_{1_j} x + \\ & + \frac{2}{l} u \sum_{j=1}^{\infty} \cos \beta_{1_j} x \left[ \frac{1}{2l} \frac{u}{\alpha_1} \cdot \psi \sum_{k=1}^{\infty} D_{1_{j,k}} \left[ e^{\omega_j t - \omega_k \tau} - e^{\omega_k(t-\tau)} \right] + \right. \\ & \left. + \tilde{\Gamma}_1 \frac{u}{\alpha_1} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} D_{2_{j,k,k_1}} \left[ e^{\omega_j t} - e^{\omega_k t} + e^{\omega_j t - \omega_k \tau - \omega_{k_1} \tau} - e^{\omega_k(t-\tau) - \omega_{k_1} \tau} \right] + \tilde{\Gamma}_2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{3_{j,k}} \left[ e^{\omega_k t} - e^{\omega_j t} \right] \right]; \end{aligned} \quad (65)$$

де

$$\begin{aligned} D_{1_{j,k}} &= B_{1_j} \cdot \tilde{B}_k \frac{1}{\omega_k - \omega_j} \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_{1_k}^2) \cdot \theta_1(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) - 2\tilde{\varphi}\beta_{1_k} \cdot \theta_2(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) \right]; \\ D_{2_{j,k,k_1}} &= B_j \cdot \tilde{B}_{k,k_1} \frac{1}{\omega_k - \omega_j} \left[ (\tilde{\varphi}^2 - \beta_{1_k}^2) \cdot \theta_1(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) - 2\tilde{\varphi}\beta_{1_k} \cdot \theta_2(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}) \right]; \\ D_{3_{j,k}} &= B_j \frac{\beta_{1_k}}{B_{1_k}} \frac{1}{\omega_{2_k} - \omega_j} \cdot \theta_3(\beta_{1_k}, \beta_{1_j}). \end{aligned}$$

Для знаходження значення параметру  $\psi$  використовуємо ту умову керування, що в прикатодному шарі (при  $x=l$ ) за час  $\tau$  забезпечується необхідний розподіл зарядів,  $\rho_1(t = \tau, x = l) = \rho_{1_k}$ , звідси:

$$\psi = \frac{\rho_k - \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \cos \beta_{1_j} l \left[ \Gamma_1 \cdot \bar{B}_j e^{\omega_j \tau} - u \left[ \tilde{\Gamma}_1 \frac{u}{\alpha_1} \sum_{k=1, k_1=1}^{\infty} D_{2_{j,k,k_1}} \left[ e^{\omega_j \tau} - e^{\omega_k \tau} - e^{\omega_k \tau} + e^{(\omega_j - \omega_k - \omega_{k_1}) \tau} \right] - \tilde{\Gamma}_2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{3_{j,k}} \left[ e^{\omega_k \tau} - e^{\omega_j \tau} \right] \right] \right]}{\frac{u^2}{l^2} \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1, k=1}^{\infty} D_{1_{j,k}} e^{(\omega_j - \omega_k) \tau} \cos \beta_{1_j} l}. \quad (66)$$

#### 4. Числове моделювання: Візуалізація розподілів струму та густини зарядів

На рис. 5, 6 подані результати графічної візуалізації безрозмірних розподілів струму та густини зарядів катіонів у водному електролітичному середовищі з урахуванням оптимального керування електродифузійними джерелами. Як видно з рис. 5, криві подачі електричного струму для кожного зрізу безрозмірної довжини робочої області електролітичного середовища мають експоненціальний характер і зростають при  $t$ , що прямує від нуля до  $\tau$ . Для перерізів координати довжини  $x$ , близьких до одиниці (прикатодна зона), режими подачі електричного струму мають різко виражену форму експоненціального росту. В якості вхідних параметрів брались такі значення:

$$l = 1, \quad \Gamma_1 = 1 \cdot 10^{-2}, \quad D = 0.5 \text{ м}^2/\text{с}, \quad \varepsilon = 1, u = 1, \alpha_1 = 1, \quad \alpha = 1 \cdot 10^{-2}, \delta_1 = 0.016 \mu = 1, \\ \tau = 10 - \text{приведений час.}$$

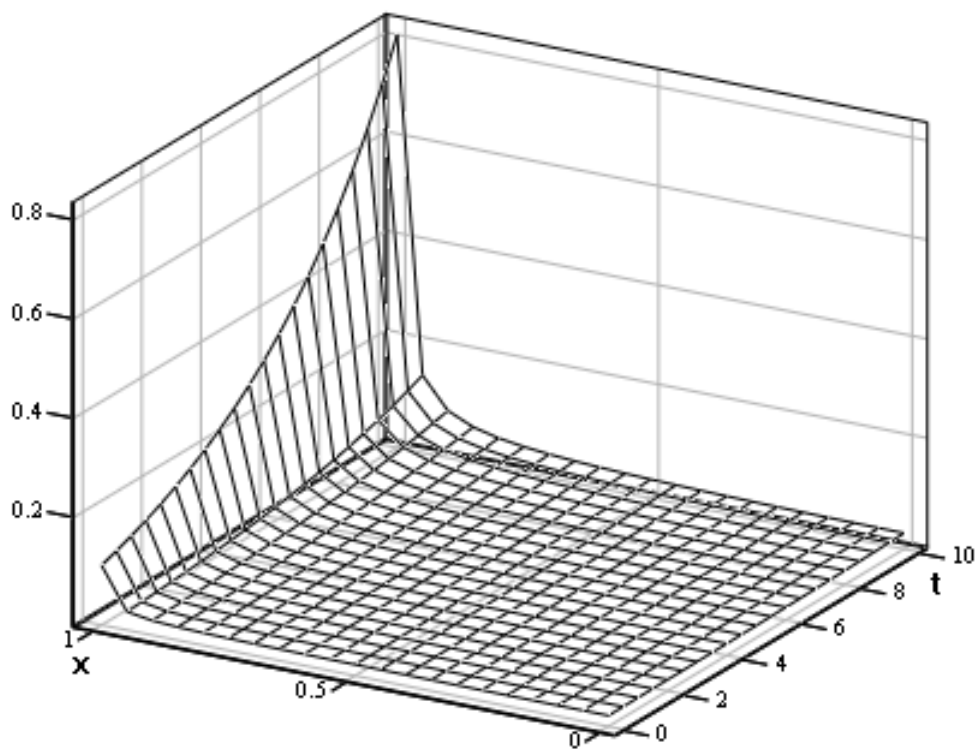


Рисунок 5 – Часово-просторова залежність струму для катоду  $I_1(t, x)$

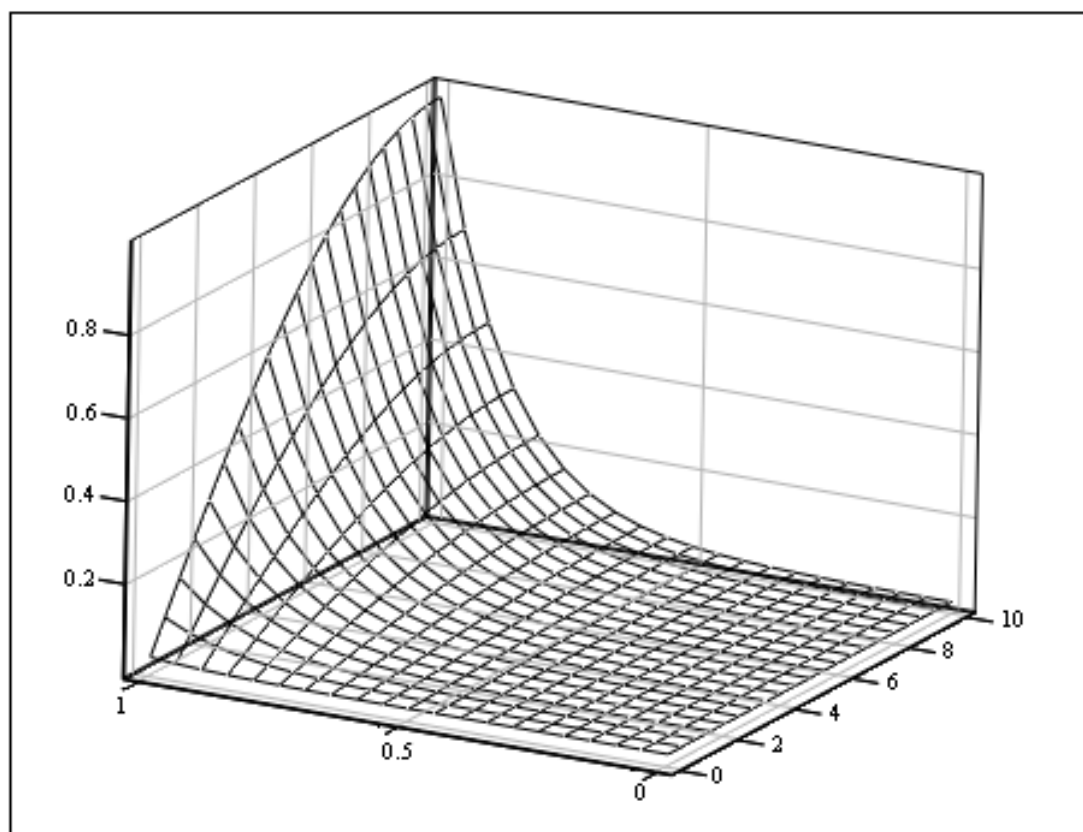


Рисунок 6 – Часово-просторова залежність густини заряду для катоду  $\rho_1(t, x)$

Для уточнення кінетики реальних процесів електродифузії з урахуванням оптимального керування електродифузійними джерелами необхідно провести комплекс додаткових експериментальних досліджень на спеціальному обладнанні, що забезпечує конструктивні рішення необхідних оптимальних, з позиції енергозбереження, режимів подачі електричного струму та здійснити комплексне тестування запропонованих моделей на адекватність щодо уточнення відповідних параметрів внутрішньої кінетики електро-масопереносу. Це буде предметом подальших досліджень авторів у цій галузі.

### Висновки

Проведено якісний аналіз внутрішньої кінетики електродифузійного переносу аніонів і катіонів в електролітному розчині. З використанням методів варіаційного числення та методів математичної фізики (інтегральне перетворення Фур'є та метод функцій Коші) розв'язано спряжену та пряму задачі оптимального керування іонотранспортом з урахуванням інтегрального критерію мінімізації енерговитрат. Виконано числове моделювання розподілів густин струму та електричних зарядів.

### Література

1. Семенов Н.А. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1973. – 480 с.
2. Чернишов П.М., Самсонов В.П., Чернишов М.П. Технічна електродинаміка. – Харків: Прапор, 2006. – 290 с.
3. Скорчеллетти В.В. Теоритическая электрохимия. – Л.: Химия, 1970. – 608 с.
4. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов. – Киев: Выща школа, 1988. – 416 с.
5. Федоткин И.М., Гулый И.С. Математическое моделирование: теория технологических процессов и их интенсификации. – К.: Артур-А, 1998. – 416 с.
6. Понрягин Л.С. Принцип максимума. – М.: Фонд математического образования и просвещения, 1998. – 70 с.
7. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 340 с.
8. Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудкин Е.Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. - М.: Энергия, 1974. – 448 с.
9. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
10. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. – Новосибирск: Наука, 1990. – 150 с.
11. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя з спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах.- К.: Наукова думка, 2000. - 372 с.
12. Шаблій О., Мартиненко В., Стойко І., Дудкін.П. Оцінка енерговитрат при проектуванні технологічних процесів // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2006. - №4. - С.60-64.

*Одержано 20.10.2007 р.*