

В.Веселовський, канд. фіз.-мат. наук; О.Берлов

Дніпропетровський національний університет

РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ СКЛАДЕНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Операційним методом отримано розв'язки задачі нестационарної теплопровідності для складених елементів конструкцій з уніфікованими зовнішніми граничними умовами й умовами неідеального теплового контакту при дії електромагнітних полів. Наведено результати параметричних досліджень.

V.Veselovskij, A.Berlov

THE CALCULATION OF TEMPERATURE FIELDS FOR MULTILAYER CONSTRUCTIONS

The operation method was used to obtain the solution of nonsteady heat conduction problem with unified external boundary conditions and non ideal heat contact under the impact of electric and magnetic fields. The results of parameter investigations are presented.

Умовні позначення

T – температура, К;

λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м·К;

c – теплоємність, Дж/кг·К;

ρ – густина, кг/м³;

q_v – об'ємне тепловиділення, Вт/м³;

a – коефіцієнт температуропровідності, м²/с.

R_i, δ_i – геометричні розміри, м.

В інженерній практиці багатошарові конструкції, як правило, використовують для зменшення витоків тепла або для оберігання елементів конструкцій від дії високих теплових потоків. Поєднання різних матеріалів, їх теплофізичних властивостей, товщин шарів дозволяє вибрати конструкцію, оптимальну за вагою і об'ємом, виходячи із заданого теплового режиму.

Зміна теплового стану елементів конструкцій виникає під дією зовнішніх і внутрішніх впливів, врахування яких необхідне для побудови адекватних математичних моделей задач знаходження теплових режимів у складових елементах конструкцій під впливом електромагнітних полів. Фізична природа теплових впливів може бути різною: зміна в часі температури середовища, в якому знаходиться об'єкт дослідження, або зміна теплового потоку, що поступає до меж об'єкту. Такий тепловий потік може створюватися в результаті поглинання електромагнітного випромінювання від зовнішніх джерел або аеродинамічного нагрівання, якщо об'єкт знаходиться у високошвидкісному потоці газу. Останнім часом спостерігається значна інтенсифікація сучасних технологічних процесів електромагнітними методами, в яких як інтенсифікуючий чинник служить енергія електромагнітного поля.

Розв'язок задач нестационарної теплопровідності з урахуванням названих чинників на сьогодні можливе числовими, числово-аналітичними і наближеними аналітичними методами. Застосування числових методів може виявитися плідним, наприклад, після попереднього аналітичного розв'язку відповідної задачі [1,2]. Трудомісткість і тривалість експериментального підбору необхідних композицій матеріалів для складових елементів конструкцій, що задовольняють вимоги надійності і її економічності, вимагають аналітичного розрахунку їх температурного режиму. Розв'язок, отриманий аналітичним методом, на відміну від найрозвинутіших в даний

час числових методів, дозволяє представити його в кінцевому вигляді і дає можливість варіювати теплофізичними і геометричними параметрами для ретельного аналізу температурних полів.

Одна з актуальних проблем техніки – створення багатошарових матеріалів із заданими властивостями. Для її успішного розв’язання необхідно мати аналітичний опис шуканих полів потенціалів, який охоплює основні параметри задачі. Варіюючи цими параметрами, шляхом проведення обчислювального експерименту на ЕОМ одержимо необхідні поєднання властивостей багатошарових конструкцій, а саме їх теплофізичних властивостей та ін.

Найбільш універсальними для розв’язування лінійних задач теплопровідності є методи інтегральних перетворень. Останні володіють перевагами перед класичними методами: вони стандартні, дозволяють отримати розв’язки в зручному для числових розрахунків вигляді, процес аналітичного розв’язування завдяки використанню стандартних прийомів значно скорочується в порівнянні з іншими методами і т.д. Серед інтегральних перетворень операційний метод є особливо ефективним при розв’язуванні нестационарних задач з внутрішніми джерелами тепла, змінної за часом інтенсивності і неоднорідними нестационарними граничними умовами [1,2]. В результаті застосування операційного методу диференціальне рівняння в частинних похідних у випадку однієї просторової координати зводиться до звичайного диференціального рівняння. З розв’язку останнього випливає залежність зображення температурної функції від просторової координати. За допомогою зворотного інтегрального перетворення здійснюється перехід від зображення до оригіналу, який і є шуканою залежністю температури від часу і координати.

Перехід від зображення до оригіналу є чи не найважчим у всьому операційному численні. Він здійснюється, якщо можливо, за допомогою таблиць відповідності зображень – оригіналам. Якщо залежність від часу граничних функцій конкретизована, то після розв’язування задачі в зображеннях зворотне перетворення проводиться за формулами Рімана-Мелліна. Загалом при розв’язуванні задач нестационарної теплопровідності з нестационарними граничними умовами використовується теорема Дюамеля [3].

Розв’язок задач теплопровідності для багатошарових тіл з використанням строгих аналітичних методів приводить до досить складних залежностей, вони, зазвичай, містять нескінченні ряди, спеціальні функції, трансцендентні рівняння для власних значень і т.д. В нескінченному функціональному ряді розв’язку для практичних розрахунків, в основному, використовується лише часткова сума декількох доданків. У зв’язку з цим актуальним є застосування аналітичних методів розрахунку, які дозволяють знаходити уніфіковані вирази простої форми і структури [3].

Наближені аналітичні розв’язки нелінійних задач теплопровідності припускають зведення нелінійних задач до комбінації лінійних. Для знаходження розв’язків лінійних задач в аналітичній теорії теплопровідності використовується операційний метод, заснований на застосуванні інтегрального перетворення Лапласа [4]. У зв’язку з цим актуальним і важливим з наукової і практичної точок зору є побудова структурних розв’язків задач нестационарної теплопровідності, заснованих на інтегральному перетворенні Лапласа.

Розглянемо застосування цього методу до розв’язування крайових задач для багатошарових конструкцій. Труднощі дослідження таких задач полягають у необхідності розв’язування систем багатопараметричних трансцендентних рівнянь, точні аналітичні розв’язки яких поки що не розроблені, у зв’язку з чим доводиться обмежуватися їх наближеними розв’язками (методи хорд, дотичних, половинного поділу, ітерацій, графічні методи і ін.) або застосовувати числові методи, які не завжди задовольняють потреби практики. В роботі [5] запропонований асимптотичний метод визначення першого кореня і послідовності коренів багатопараметричних рівнянь аналітичної теорії теплопровідності, який дозволяє визначати його значення з будь-

якою наперед заданою точністю. В основу методу покладена властивість, що перший, найменший за модулем корінь характеристичного рівняння визначається як граничне відношення спеціальним чином підібраних многочленів.

Математична модель в узагальнених змінних задач нестационарної теплопровідності для складової системи з неідеальним тепловим контактом на стиках має вигляд:

$$\beta_\nu \frac{\partial^2 T_\nu(x, F_o)}{\partial x^2} = \frac{\partial T_\nu(x, F_o)}{\partial F_o} - \beta_\nu^* w_{\nu, \Sigma}(x, F_o), \quad (1)$$

$$T_\nu(x, F_o) \Big|_{F_o=0} = \varphi_\nu(x), \quad (\nu = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

де функція $w_{\nu, \Sigma}(x, F_o) = \sum_{j=1}^N W_{\nu, j}(x, F_o)$ є суперпозицією потужності внутрішніх джерел (стоків) тепла і наслідком дії на конструкцію полів різної фізичної природи, ($j = 1, 2, \dots, N$), де N – кількість дій.

Граничні функції, зумовлені наявністю зовнішніх поверхневих джерел (стоків) тепла, записуються у вигляді сукупності дій $f_{0, \Sigma}(F_o) = \sum_{i=1}^{N_1} f_{0, i}(F_o)$, $f_{1, \Sigma}(F_o) = \sum_{i=1}^{N_2} f_{1, i}(F_o)$ або на межах шарів, де $f_{2, \Sigma}(F_o) = \sum_{i=1}^{N_3} f_{2, i}(F_o)$, де N_1, N_2, N_3 – кількість граничних дій.

Зовнішні граничні умови:

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{\partial T_1(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 Bi_0 [f_{0, \Sigma}(F_o) - M_0 T_1(x, F_o)] \Big|_{x=0}, \\ \alpha_1 \frac{\partial T_m(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=1} = h_1 Bi_1 [f_{1, \Sigma}(F_o) - M_1 T_m(x, F_o)] \Big|_{x=1}. \end{cases} \quad (3)$$

Умови на стику шарів:

$$\begin{cases} \alpha_2 \frac{\partial T_\nu(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=1} = R_{\nu, \nu+1}^* [T_{\nu+1}(0, F_o) - T_\nu(1, F_o)] \\ \frac{\partial T_\nu(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=1} - \mu_{\nu+1, \nu} \frac{\partial T_{\nu+1}(x, F_o)}{\partial x} \Big|_{x=0} = f_{2, \Sigma}(F_o), \end{cases} \quad (4)$$

де $\beta_\nu = \frac{a_\nu}{a_0} \cdot \frac{R_0^2}{R_\nu^2}$, $\beta_\nu^* = \beta_\nu \cdot \frac{R_\nu^2}{\lambda_\nu}$, $\mu_{\nu+1, \nu} = \frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} \cdot \frac{R_\nu}{R_{\nu+1}}$, $R_{\nu, \nu+1}^* = \frac{R_\nu}{R_{\nu, \nu+1} \cdot \lambda_\nu}$, $F_o = \frac{a_0}{R_0^2} \cdot \tau$, $x = \frac{x_\nu}{R_\nu}$,

$Bi_0 = \frac{\alpha_0^*}{\lambda_1} \cdot R_1$, $Bi_1 = \frac{\alpha_1^*}{\lambda_m} \cdot R_m$, a_0, R_0 – деякі довільні параметри: коефіцієнт температуропровідності і лінійний розмір. При $\alpha_2 = 0$, $f_{2, \Sigma}(F_o) = 0$ умови (4) відповідають умовам ідеального теплового контакту на стиках шарів; при $\alpha_2 = 1$,

$f_{2, \Sigma}(F_o) = \omega_{\nu, \nu+1}^*(F_o) = \frac{R_\nu}{\lambda_\nu} \omega_{\nu, \nu+1}(R_\nu, F_o)$, – умови (4) відповідають умовам неідеального

теплового контакту; при $\alpha_2 = 0$, $f_{2, \Sigma}(F_o) = A_{\nu, \nu+1} \frac{\partial T_{\nu+1}(x, F_o)}{\partial F_o} \Big|_{x=0}$,

$A_{\nu, \nu+1} = \frac{\delta_{\nu, \nu+1} R_\nu}{R_0^2} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_\nu} \cdot \frac{c_{\nu, \nu+1}}{c_0}$ умови (4) відповідають умовам неідеального теплового контакту у вигляді теплової ємності.

Застосовуючи до (1)-(4) інтегральне перетворення Лапласа за змінною F_o , отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{T}_v(x, p)}{dx^2} = \frac{p}{\beta_v} \bar{T}_v(x, p) + \bar{z}_{v,\Sigma}(x, p) \quad v=1, 2 \dots m, \quad (5)$$

$$\bar{z}_{v,\Sigma}(x, p) = -\varphi_v(x) - \beta_v^* w_{v,\Sigma}(x, p), \quad w_{v,\Sigma}(x, p) = \sum_{j=1}^N \bar{W}_{v,j}(x, p),$$

де $x = x_v / R_v$ ($0 \leq x \leq 1$); p – змінна перетворення Лапласа.

Інтеграл рівняння (5) в полі зображень можна записати у вигляді

$$\bar{T}_v(x, p) = C_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + D_v sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \bar{z}_{v,\Sigma}^*(x, p), \quad (6)$$

де $\bar{z}_{v,\Sigma}^*(x, p)$ – частковий розв’язок неоднорідного рівняння (5); C_v, D_v – константи інтегрування, які визначаються з уніфікованих зовнішніх і внутрішніх граничних умов (3), (4).

У припущенні нескінченного диференціювання за координатою x функції $\bar{z}_{v,\Sigma}^*(x, p)$, представляючи її у вигляді нескінченного ряду за похідними від $\bar{z}_{v,\Sigma}(x, p)$, методом невизначених коефіцієнтів отримаємо частковий розв’язок (5) у вигляді [3-5]:

$$\bar{z}_{v,\Sigma}^*(x, p) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_v^n}{p^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \bar{z}_{v,\Sigma}(x, p). \quad (7)$$

Для побудови алгоритму розрахунку температурного поля m – шарового плоского тіла, використовуючи операційний метод, необхідно: застосовуючи рекурентні співвідношення, обчислити функціональні комплекси $\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n, p_k$; обчислити складові комплекси $\Omega_n[\mu_{n,r}^v(x)], Q[\mu_{n,r}^v(x), p_k], \Psi[\varphi_n, p_k], \Psi'[\varphi_n, p_k]$; визначити компоненти дії і обчислити відповідні їм прості структури; сукупність простих структур і функцій $z_{v,\Sigma}^*(x, F_o)$ дозволяє побудувати загальну структуру розв’язку і тим самим визначити температурне поле системи.

Функціональні комплекси $\{\varphi_n\}_0^\infty, \{\mu_{n,r}^v(x)\}_0^\infty, p_k = -\gamma_k^2$ знаходяться в результаті аналітичних перетворень над нескінченними рядами, в які входять прості комплекси $c_{n,v}, c_{n,v}^*, b_{n,v}, b_{n,v}^*, L_{n,v,v-i}, L_{n,v,v-i}^*, S_{n,v,v-i}, S_{n,v,v-i}^*, a_{n,v}(x)$, залежні від умов неідеального теплового контакту на стиках шарів, геометричних і теплофізичних характеристик конструкції.

Для визначення констант інтегрування C_v, D_v скористаємося граничними умовами. Підставляючи розв’язок (6) в умови (3), записані в полі зображень, отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{T}_v(x, p) &= \sum_{l=0}^1 \bar{F}_{l,\Sigma}(p) \frac{Q_{l,v}(x, p)}{\psi(p)} + \sum_{i=1}^{m-1} \bar{V}_{i,i+1,\Sigma}(p) \frac{Q_{i,v}(x, p)}{\psi(p)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} \bar{V}_{i,i+1,\Sigma}^*(p) \frac{Q_{i,v}^*(x, p)}{\psi(p)} + z_{v,\Sigma}^*(x, p) = \sum_{r=1}^{2m} \bar{g}_{r,\Sigma}(p) \frac{Q_r^v(x, p)}{\psi(p)} + \bar{z}_{v,\Sigma}^*(x, p). \end{aligned} \quad (8)$$

Функції $\bar{V}_{v-1,v,\Sigma}(p), \bar{V}_{v-1,\Sigma}^*(p)$ – компоненти дії мають вигляд:

$$\bar{V}_{v-1,v,\Sigma}(p) = \bar{z}_{v-1,\Sigma}^*(1, p) - \bar{z}_{v-1,\Sigma}^*(0, p) + \frac{1}{R_{v-1,v}} \bar{z}_{v-1,\Sigma}^*(1, p), \quad (9)$$

$$\bar{V}_{v-1,v,\Sigma}^*(p) = \mu_{v-1,v} \left\{ z_{v-1,v,\Sigma}^*(1, p) - \mu_{v-1,v} \bar{z}_{v-1,\Sigma}^*(0, p) - \bar{\omega}_{v-1,v,\Sigma}^*(1, p) - \right.$$

$$-A_{v-1,v} \left[pz_{v-1,\Sigma}^{\bar{*}}(1,p) - \varphi_v(0) \right] \} \quad (10)$$

і характеризують вплив нерівномірного початкового розподілу температури, величини контактного термічного опору, розподіл джерел (стоків) тепла по перетину системи, дії зовнішніх електромагнітних полів і джерел (стоків) тепла в просторі між шарами на температурне поле системи. В (9), (10) штрих означає диференціювання по x .

Переходячи до оригіналів функцій, слідуючи [3-5], отримаємо

$$T_v(x, F_o) = \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n [\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n] g_{r,\Sigma}^{(n)}(F_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_{r,\Sigma}(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} Q[p_k, \mu_{n,r}^v(x)] \exp(-\gamma^2 F_o) \right\} + z_{v,\Sigma}^*(x, F_o), \quad (11)$$

де

$$z_{v,\Sigma}^*(x, F_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_v^n \frac{F_o^n}{n!} \varphi_v^{(2n)}(x) + \beta_v^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_v^n}{n!} \int_0^{F_o} (F_o - \theta)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w_{v,\Sigma}(x, \theta) d\theta. \quad (12)$$

В розв'язку (11) кожній компоненті дії $g_{r,\Sigma}(F_o)$ відповідає функція

$$T_{v,r}(x, F_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n [\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n] g_{r,\Sigma}^{(n)}(F_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_{r,\Sigma}(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} Q[\mu_{n,r}^v(x), p_k] \exp(-\gamma_k^2 F_o). \quad (13)$$

Функції $T_{v,r}(x, F_o)$ є простими структурами розв'язку, відповідними кожній компоненті дії. Функція $T_v(x, F_o)$, що задовольняє умови задачі (1)-(4), є загальною структурою розв'язку.

Розв'язок (11) визначає розподіл температури в нестационарному тепловому режимі і дозволяє виділити квазістационарний

$$T_v(x, F_o) = \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n [\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n] g_{r,\Sigma}^{(n)}(F_o) \right\} \quad (14)$$

і регулярний режими нагрівання

$$T_v(x, F_o) = \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n [\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n] g_{r,\Sigma}^{(n)}(F_o) + \frac{\bar{g}_{r,\Sigma}(P_1)}{\Psi'(\varphi_n, P_1)} Q[\mu_{n,r}^v(x), P_1] \exp(-\gamma_1^2 F_o) \right\}. \quad (15)$$

Розв'язки (11), (14), (15), дозволяють визначити температурне поле складових елементів конструкцій і дають можливість через компоненти дії $g_{r,\Sigma}^n(F_o)$ виділити вплив кожного джерела електромагнітних полів.

Зміст функцій $\bar{F}_l(p)$, $Q_{l,v}(x, p)$, $\psi(p)$, $Q_{i,v}(x, p)$, $Q_{i,v}^*(x, p)$ має вигляд:

$$\bar{F}_0(p) = h_0 Bi_0 \bar{f}_0(p) + h_0 Bi_0 M_0 \bar{V}_0(p) + \alpha_0 \bar{V}_0^*(p);$$

$$\bar{F}_1(p) = h_1 Bi_1 \bar{f}_1(p) + h_1 Bi_1 M_1 \bar{V}_m(p) - \alpha_1 \bar{V}_m^*(p);$$

$$\psi(p) = \alpha_0 \sqrt{\frac{p}{\beta_1}} \left(\alpha_1 \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} l_{m+1}^* + h_1 Bi_1 M_1 l_{m+1} \right) - h_0 Bi_0 M_0 \left(\alpha_1 \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \rho_{m+1} + h_1 Bi_1 M_1 \rho_{m+1}^* \right);$$

$$Q_{0,v}(x, p) = \left[\alpha_1 \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \left(\rho_m sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + \chi_{m-1,m} \rho_m^* ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) + M_1 h_1 Bi_1 \left(\rho_m ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + \chi_{m-1,m} \rho_m^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) \right] \times \\ \times \left(l_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} x + \chi_{v-1,v} l_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) - \left[\alpha_1 \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \left(l_m sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + \chi_{m-1,m} l_m^* ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +M_1 h_1 Bi_j \left(l_m ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + \chi_{m-1} l_m^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) \cdot \left(\rho_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} \rho_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right); \\
 Q_{1, v}(x, p) & = \alpha_0 \sqrt{\frac{p}{\beta_1}} \left(l_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} l_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right) - h_0 Bi_0 M_0 \times \left(\rho_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} \rho_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right); \\
 Q_{i, i+1, v}(x, p) & = \alpha_0 \sqrt{\frac{p}{\beta_1}} \left(L_{v, v-1} ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + S_{v, v-1} \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right) \psi(p) - \left[\alpha_1 \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \left(L_{m, m-1} sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + S_{m, m-1} ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) + \right. \\
 & + h_1 Bi_1 M_1 \left(L_{m, m-1} ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + S_{m, m-1} sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) \left. \right] \cdot \left[\alpha_0 \sqrt{\frac{p}{\beta_1}} \left(l_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} l_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right) - \right. \\
 & \left. - h_0 Bi_0 M_0 \left(\rho_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} \rho_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right) \right]; \\
 Q_{i, i+1, v}(x, p) & = - \left[\alpha_1 \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \left(L_{m, m-1} sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + S_{m, m-1} ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) + h_1 Bi_1 M_1 \left(L_{m, m-1} ch \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} + S_{m, m-1} sh \sqrt{\frac{p}{\beta_m}} \right) \right] \times \\
 & \times \left[\alpha_0 \sqrt{\frac{p}{\beta_1}} \left(l_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} l_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right) - h_0 Bi_0 M_0 \left(\rho_v ch \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x + \chi_{v-1, v} \rho_v^* sh \sqrt{\frac{p}{\beta_v}} x \right) \right];
 \end{aligned}$$

Зміст функцій ρ_v^* , ρ_m^* , l_v^* и l_m^* наведено в [3-6].

В якості прикладу розглянемо окремий випадок задачі (1) – (4), для якого $m=2$ (двошарова система пластин), а параметри α_i, M_i, h_i приймають значення:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 & = 1, \quad Bi_0 = h_0 = 1, \quad M_0 = 0, \\
 \alpha_1 & = 0, \quad Bi_1 = h_1 = 1, \quad M_1 = 1,
 \end{aligned}$$

що відповідає граничній умові другого роду на внутрішній поверхні і граничній умові першого роду на зовнішній поверхні. На стику пластин задані умови ідеального і неідеального теплових контактів у вигляді (3).

Тоді, відповідно до алгоритму розрахунку температурного поля багат шарової пластини структурним методом, функціональні комплекси φ_n мають вигляд:

$$\varphi_n = d_{n,3}, \quad d_{n,3} = c_{n,3}.$$

Компоненти дії $g_r(F_o)$ для двошарової пластини ($r = 1, 2, 3, 4$) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 g_1(F_o) & = -f_0(F_o) + V_{0,1}^*(F_o), \\
 g_2(F_o) & = f_1(F_o) - V_{2,3}(F_o), \\
 g_3(F_o) & = V_{1,2}(F_o), \\
 g_4(F_o) & = V_{1,2}^*(F_o).
 \end{aligned}$$

Функції $V_{v-1, v}(F_o)$, $V_{v-1}^*(F_o)$ – компоненти дії мають вигляд (9), (10), звідси

$$\begin{aligned}
 g_1(F_o) & = -f_0(F_o) + \mu_{0,1} \left\{ z_{0,1}^*(1, F_o) - \mu_{0,1} z_1^*(0, F_o) - \omega_{0,1}^*(1, F_o) - A_{0,1} \left[F_o z_0^*(1, F_o) - \varphi_1(0) \right] \right\}, \\
 g_2(F_o) & = f_1(F_o) - z_2^*(1, F_o) - z_3^*(0, F_o) + \frac{1}{R_{2,3}} z_2^*(1, F_o), \\
 g_3(F_o) & = z_1^*(1, F_o) - z_2^*(0, F_o) + \frac{1}{R_{1,2}} z_1^*(1, F_o), \\
 g_4(F_o) & = \mu_{1,2} \left\{ z_{1,2}^*(1, F_o) - \mu_{1,2} z_2^*(0, F_o) - \omega_{1,2}^*(1, F_o) - A_{1,2} \left[F_o z_1^*(1, F_o) - \varphi_2(0) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Відповідні компонентам дії функціональні комплекси $\mu_{n,r}^v(x)$ визначаються із співвідношень

$$\begin{aligned} \mu_{n,1}^v(x) &= \left[\sum_{j=0}^n a_{n-j,v}(x) \eta_{v,j} + \chi_{v-1,v} \frac{1}{\sqrt{\beta_{v-1} \beta_v}} \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j-1}^*(x) \cdot \eta_{v,j}^* \right] - \\ &\quad - \left[\sqrt{\frac{\beta_v}{\beta_{v-1}}} \sum_{j=0}^n a_{n-j,v}(x) \zeta_{v,j} + \chi_{v-1,v} \sum_{j=0}^n a_{n-j,v}^*(x) \cdot \zeta_{v,j}^* \right]; \\ \mu_{n,2}^v(x) &= c_{n,v+1}(x), \quad \eta_{v,n} = \sum_{j=0}^n \Phi_{n-j,2} c_{v,j}, \quad \eta_{v,n}^* = \sum_{j=0}^n \Phi_{n-j,2} c_{v,j}^*; \\ \zeta_{v,n} &= \sum_{j=0}^n d_{n-j,2} b_{v,j}, \quad \zeta_{v,n}^* = \sum_{j=0}^n d_{n-j,2} b_{v,j}^*, \quad d_{n,2} = c_{n,2}, \quad \Phi_{n,2} = b_{n,2}; \\ \mu_{n,3}^v(x) &= \sum_{j=0}^n L_{j,v,v+1}(x) \cdot \varphi_{n-j} - \sum_{j=0}^n L_{j,2,1}(1) \cdot \mu_{n-j,2}^v(x); \\ \mu_{n,4}^v(x) &= \sum_{j=0}^n L_{j,v,v-1}^*(x) \cdot \varphi_{n-j} - \sum_{j=0}^n L_{j,2,1}^*(1) \cdot \mu_{n-j,2}^v(x). \end{aligned}$$

Використовуючи процедури обчислення складових комплексів

$$Q_v \left[\mu_{n,r}^v(x), p_k \right], \quad \Psi(\varphi_n, p_k), \quad \Omega_{n,v} \left[\mu_{n,r}^v(x), \varphi_n \right],$$

знаходимо прості структури ($r = 1, 2, 3, 4, 5$, – для двошарової системи пластин), відповідні кожній компоненті дії. Сума простих структур і функції $z_{v,\Sigma}(x, F_o)$ дає розподіл температури по перетину системи пластин.

Розглянута двошарова система пластин (1 –Ті, 2 – сталь) з наступними геометричними і теплофізичними параметрами:

$$R_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad R_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad a_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с};$$

$$\lambda_1 = 16,24 \text{ Вт / м} \cdot \text{К}; \quad a_2 = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}; \quad \lambda_2 = 45,24 \text{ Вт / м} \cdot \text{К}.$$

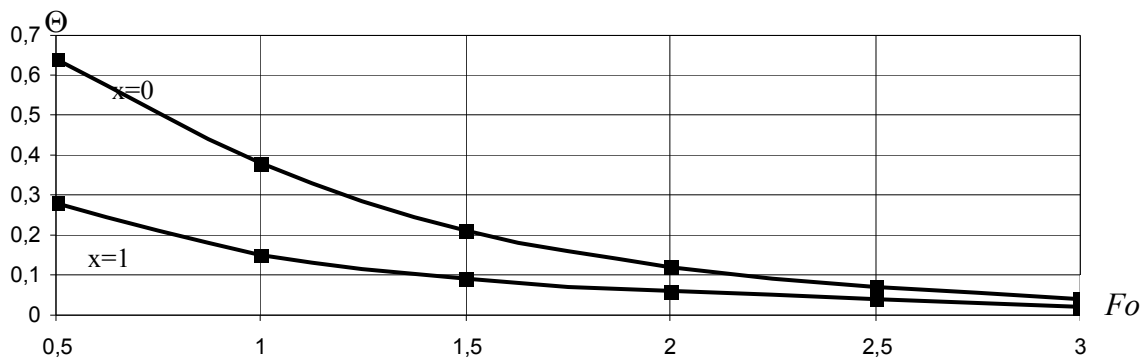


Рисунок 1 - Графіки температурного поля в двошаровій пластині:
 ■ – операційний метод; — – [7]

Рис.1 ілюструє процес теплообміну двошарової пластини при змішаних граничних умовах 2-го і 3-го родів на її зовнішніх поверхнях. Порівняння результатів, одержаних операційним і числовим методом [7], дає задовільне узгодження.

В якості прикладу розглянута двошарова система напівпровідникових пластин (1 –Al, 2 – Si) з наступними геометричними і теплофізичними параметрами:

$$R_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad R_2 = 500 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$c_1 = 1038 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}; \lambda_1 = 204 \text{ Вт/м} \cdot \text{K}; \rho_2 = 2650 \text{ кг/м}^3;$$

$$c_2 = 741 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}; \lambda_2 = 150 \text{ Вт/м} \cdot \text{K}; \rho_2 = 2328 \text{ кг/м}^3.$$

При числових розрахунках температурного поля на стику двошарової системи пластин час дії теплових потоків τ , створених за допомогою імпульсного току з постійним і лінійно-наростаючим фронтом, приймався у діапазоні $1 - 700 \times 10^{-6} \text{ с}$.

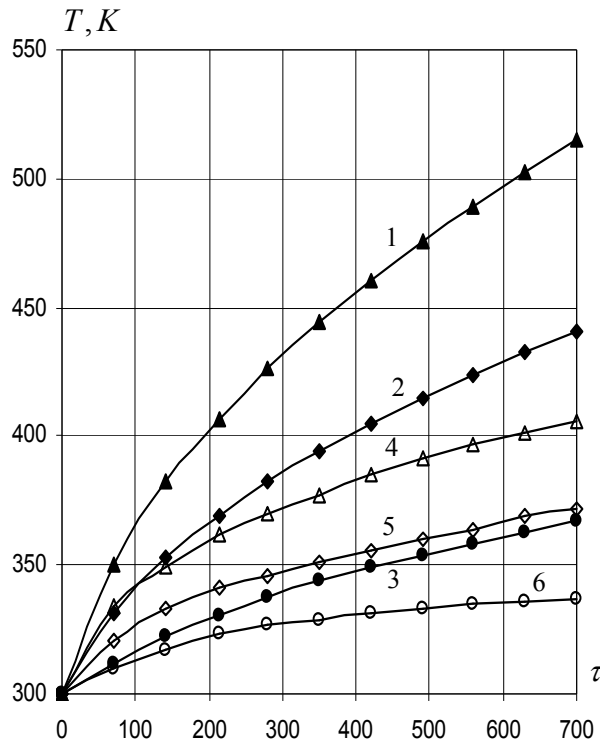


Рисунок 2 - Температурні поля двошарового (крива 1, 2, 3) і напівбескінечного (крива 4,5,6) тіл, крізь поверхні яких проходить постійний потік тепла: 1, 4 – $12 \cdot 10^7$; 2, 5 – $8 \cdot 10^7$; 3, 6 – $4 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$ –

за даними [8,9]. На рис.2 представлено порівняння температурних полів на стику пластин в двошаровому і напівбескінечному [8,9] тілах з постійними значеннями теплових потоків; на рис.3 - з тепловими потоками, які лінійно-наростають ($A \cdot \tau$).

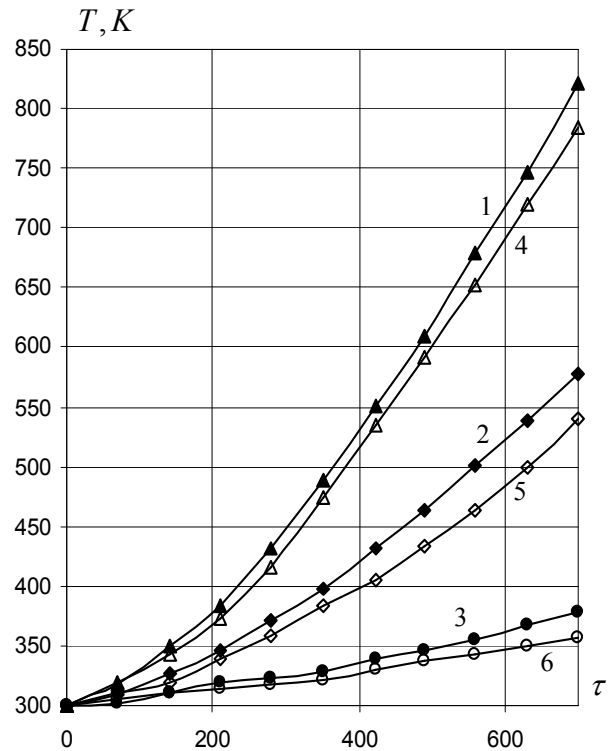


Рисунок 3 - Температурні поля двошарового (крива 1,2,3) і напівбескінечного (крива 4,5,6) тіл крізь поверхні яких проходить потік тепла, який лінійно наростає: 1, 4 – $A = 2,3 \cdot 10^{12}$; 2, 5 – $A = 1,1 \cdot 10^{12}$; 3, 6 – $A = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{с}$ – за даними [8,9]

На рис.4,5 відображено порівняння температурних полів на стику пластин у двошаровому і напівобмеженому тілах [8,9], при умові, що в шарі алюмінію діють постійний (рис.4) і наростаючий $A \cdot \tau$ (рис.5) об'ємні теплові потоки.

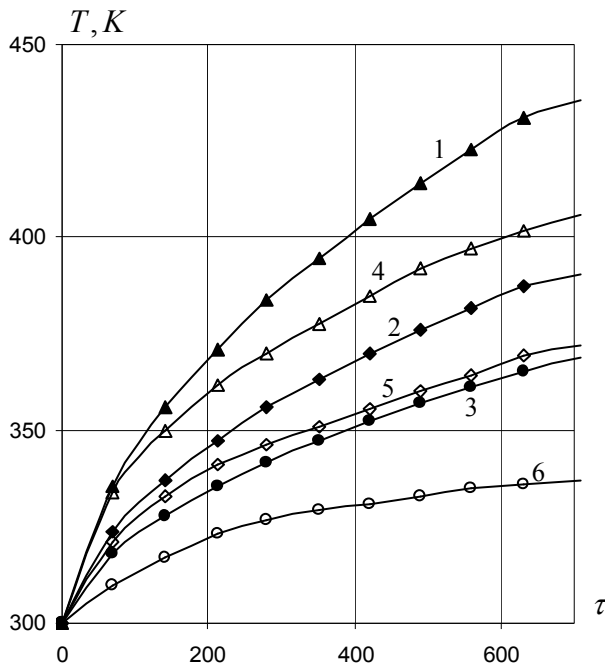


Рисунок 4 - Температурні поля двошарового тіла (крива 1,2,3 – де діє постійне об'ємне джерело тепловиділення: $1,5 \cdot 10^{13}$; $1 \cdot 10^{13}$; $7,5 \cdot 10^{12}$ $\text{Вт}/\text{м}^3$ відповідно) і напівбескінченного тіла (крива 4,5,6 – крізь поверхню якого проходить постійний потік тепла: $12 \cdot 10^7$; $2,5 \cdot 8 \cdot 10^7$; $3,6 \cdot 4 \cdot 10^7$ $\text{Вт}/\text{м}^2$ – за даними [8,9])

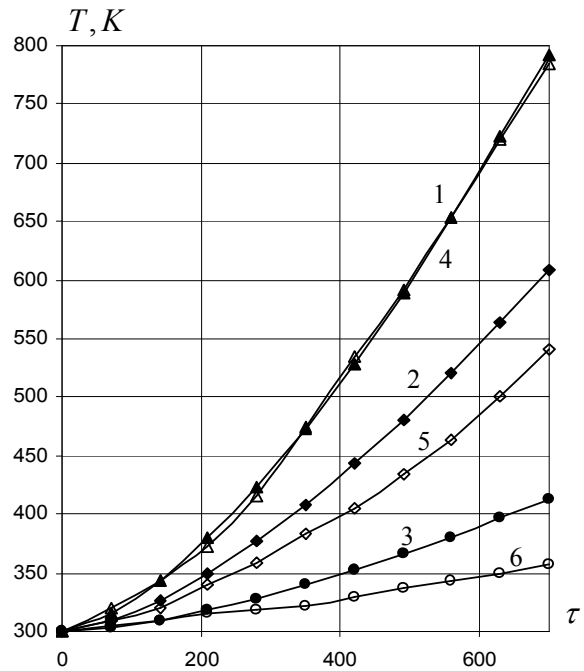


Рисунок 5 - Температурні поля двошарового тіла (крива 1, 2, 3 – де діє об'ємне джерело тепловиділення, яке наростає: $1 - A = 1,2 \cdot 10^{17}$; $2 - A = 7,5 \cdot 10^{16}$; $3 - A = 2,75 \cdot 10^{16}$ $\text{Вт}/\text{м}^3 \cdot \text{с}$ відповідно) і напівбескінченного тіла (крива 4, 5, 6 – крізь поверхню якого проходить потік тепла, який лінійно наростає: $4 - A = 2,3 \cdot 10^{12}$; $5 - A = 1,1 \cdot 10^{12}$; $6 - A = 2,3 \cdot 10^{11}$ $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$ – за даними [8,9])

Таким чином, модель двошарової конструкції більш адекватно відображає процес електричного навантаження напівпровідника, що підтверджується даними експериментальних спостережень [8,9].

Висновки

Запропонована схема розв'язку дозволяє розрахувати нестационарний теплообмін у складових теплозахисних конструкціях незалежно від виду граничних умов на зовнішніх межах, кількості шарів теплоізоляції, дії полів різної фізичної природи.

Структурні розв'язки, засновані на операційному методі, дозволяють визначити температурне поле складових елементів конструкцій і дають можливість через компоненти дії $g_{r,\Sigma}^n (F_o)$ виділити вплив кожного з джерел електромагнітних полів.

На відміну від числових методів отримані розв'язки дозволяють оцінити температурне поле складеного тіла при достатньо тонких товщинах матеріалів.

Література

1. Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430с.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Эдиториал, 2003. – 784 с.
3. Веселовский В. Б. Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных плоских тел с неидеальным тепловым контактом // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. – Киев: Наук. думка, 1984. – С.140 – 144.

4. Веселовский В. Б. Математическое моделирование влияния полей различной физической природы на тепловые режимы элементов конструкций // Техническая механика.– 1993. – Вып.1.– С.114 – 117.
5. Веселовский В. Б. Сравнение методов решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности для стержня // Техническая механика.– 1999. – №.1.– С.99 – 111.
6. Берлов А. В. Решение структурным методом задач теплопроводности для составных элементов конструкций при воздействии электромагнитных полей // Диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. ДНУ.– Д., 2006.– С.70 – 79.
7. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1978. – 328с.
8. Бондаренко П. Н., Емельянов О. А. Экспериментальное изучение токового разрушения металлизированных полимерных пленок // Письма в ЖТФ, 2005. – Т.31. - Вып.14. - С.67-72.
9. Keller R., Greiss R., Cheng Y. E. Electric current induced thermomechanical fatigue testing of interconnects // Characterization and Metrology for ULSI Technology. 2005, AIP Conference Proc., V.788, p.491-495.

Одержано 24.04.2007 р.