УДК 519.246

С.Лупенко, канд. техн. наук; Л.Щербак, докт. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ТА АНАЛІТИЧНІ ЗАЛЕЖНОСТІ В ЗАДАЧАХ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ СИГНАЛІВ НА БАЗІ ЇХ МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ЦИКЛІЧНОЇ ФУНКЦІЇ

У роботі обґрунтовано використання оператора перетворення шкали в задачах спектрального аналізу та синтезу сигналів. Введено поняття кратної ритмічної пов'язаності циклічних функцій та кутової частоти для довільної (детермінованої та стохастичної) циклічної функції неперервного аргументу. Встановлено аналітичний зв'язок між функцією ритму та кутовою частотою циклічної функції неперервного аргументу. Запропоновано підхід до спектрального аналізу та синтезу циклічних функцій.

S.Lupenko, L Scherbak

SOME SPECIALITIES AND ANALYTICAL DEPENDENCES IN THE TASKS OF SPECTRAL ANALYSIS AND SYNTHESIS OF SIGNALS ON BASIS OF THEIR MODEL IN THE FORM OF CYCLIC FUNCTION

In the work, has been proved the use of the scale transformation operator in the task of spectral analysis and synthesis of signals. The concept of multiple rhythmical connection of cyclic functions and the concept of angular frequency for arbitrary determined and random cyclic function of uninterrupted argument have been introduced. The analytical connection between rhythm function and angular frequency of the cyclic function of uninterrupted argument has been set up. An approach to spectral analysis and synthesis of cyclic functions has been suggested.

Вступ

Вже давно стали класичними результати досліджень розкладів детермінованих та випадкових функцій в ряди за базисами тригонометричних функцій та комплексних експонент. Зокрема, дослідженню розкладів періодичних та майже періодичних детермінованих та випадкових функцій присвячено чимало наукових статей та монографій, наприклад роботи [1, 2]. У дослідженнях [3-5] введено клас та обгрунтовано властивості циклічних функцій, що є моделями широкого класу реальних сигналів із циклічною просторово-часовою структурою, проте питання аналізу цих функцій у спектральній області, за винятком періодичних детермінованих та стохастичних періодичних функцій, які є підкласом циклічних, залишаються нерозкритими. Метою цієї роботи є встановлення деяких особливостей та аналітичних залежностей, які можуть мати місце при проведенні спектрального аналізу та синтезу циклічних функцій.

Одним із способів спектрального аналізу циклічних функцій є застосування класичних методів їх спектрального зображення, зокрема, в базисі гармонічних функцій. У даній роботі розглянемо дещо нетрадиційний підхід до розкладів циклічних функцій, а саме, їх зображення у вигляді ряду за модифікованим базисом, який утворений із класичного ортогонального базису (наприклад тригонометричного базису), шляхом дії оператора перетворення шкали [6]. Суть такого підходу базується на тому факті, що циклічні функції із змінним ритмом можуть бути зведені до ізоморфних їм відносно порядку та значень циклічних функцій із стабільним ритмом, шляхом дії певним чином підібраного оператора перетворення шкали. Провівши гармонічний аналіз утворених у такий спосіб циклічних функцій із стабільним ритмом, поширимо результати такого аналізу на аналіз циклічних функцій із змінним ритмом.

Основна частина

Оператор перетворення шкали у задачах спектрального аналізу сигналів

Нехай маємо лінійний функціональний простір (простір сигналів) $\mathbf{\Phi} = \{f(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}\}$, і нехай будь-яку функцію $f(\cdot) \in \mathbf{\Phi}$ із лінійного функціонального простору $\mathbf{\Phi}$ можна однозначно подати у вигляді ряду:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \cdot g_k(t),\ t \in \mathbf{W}\,, \tag{1}$$

де $\{g_k(t),\ k \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{W}\}$ - деякий числовий функціональний базис, а множина коефіцієнтів $\{c_k, k \in \mathbf{Z}\}$ є спектром цієї функції у базисі $\{g_k(t),\ k \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{W}\}$. У випадку, якщо простір сигналів $\mathbf{\Phi} = \{f(t), t \in \mathbf{W}\}$ є простором дійсних ($\mathbf{\Psi} = \mathbf{R}$) або комплекснозначних ($\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}$) функцій, то ці коефіцієнти можуть бути дійсними або комплексними числами, а якщо простір $\mathbf{\Phi} = \{f(t), t \in \mathbf{W}\}$ є простором випадкових процесів ($\mathbf{\Psi}$- простір дійсних або комплекснозначних випадкових величин, що задані на одному і тому ж імовірнісному просторі), то коефіцієнти будуть дійсним або комплексними випадковими величинами. Причому, в одних випадках k може приймати значення із усієї множини цілих чисел $\mathbf{Z}$, а в інших - лише із множини додатних або невід'ємних цілих чисел. Базисними функціями, наприклад, можуть бути ортогональні поліноми Чебишева, Кравчука, Лагера, тригонометричний базис Фур'є, функції Уолша, Хаара і т.д. Базис може бути як ортогональним, так і неортогональним, як нормованим, так і ненормованим.

У загальному випадку, під областю визначення $\mathbf{W}$ функціональних відношень $f(\cdot) \in \mathbf{\Phi}$ будемо розуміти одну із таких чотирьох множин дійсних чисел:

1) $\mathbf{W} = \{t_m \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}\}$ - дискретна впорядкована по m зліченна множина дійсних чисел ($0 < t_{m+1} - t_m < \infty$);

2) $\mathbf{W} = \left\{t_m \in \mathbf{R}, m = \overline{1, M}, M < \infty\right\}$ - дискретна впорядкована по m скінченна множина дійсних чисел;

3) $\mathbf{W} = \mathbf{R}$ - множина всіх дійсних чисел;

4) $\mathbf{W} = [t_0, t_0 + T),\ t_0 \in \mathbf{R}, T > 0$ - деякий півінтервал дійсних чисел.

У випадку дискретності області визначення $\mathbf{W}$, для її елементів має місце такий тип лінійного упорядкування: $t_{m_2} > t_{m_1}$, якщо $m_2 > m_1$.

Нехай маємо оператор $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ перетворення шкали із функцією перетворення шкали $t' = y(t) \in \mathbf{W}'$, яка, згідно з роботою [6], є зростаючою числовою функцією, тобто задовольняє строгу нерівність:

$$y(t_2) = t_2' > t_1' = y(t_1),\ \text{якщо}\ t_2 > t_1,\ t_1, t_2 \in \mathbf{W}. \tag{2}$$

І нехай даний оператор діє на функції $f(\cdot) \in \mathbf{\Phi}$ із функціонального простору $\mathbf{\Phi}$, а результатом його дії є функції $\hat{f}(t')$ із деякого функціонального простору $\hat{\mathbf{\Phi}} = \{\hat{f}(t'), t' \in \mathbf{W}'\}$, тобто:

$$\mathbf{G}_{y(t)}[f(t), t \in \mathbf{W}] = \{\hat{f}(t'), t' \in \mathbf{W}'\}, \tag{3}$$

причому, має місце така система рівнянь:

$$\begin{cases} t' = y(t), \\ \hat{f}(t') = f(t),\ t' \in \mathbf{W}',\ t \in \mathbf{W}. \end{cases} \tag{4}$$

У такому разі, як це показано у роботі [6], функціональні відношення $f(t), t \in \mathbf{W}$ та $\hat{f}(t'), t' \in \mathbf{W}'$ є ізоморфними відносно порядку та значень.

В залежності від того, якою є область визначення $\mathbf{W}$, такого типу буде і область визначення $\mathbf{W}'$ функцій $\hat{f}(t')$, а саме:

1)якщо $\mathbf{W}=\{t_m \in \mathbf{R}, m\in \mathbf{Z}\}$, то $\mathbf{W}'=\{t'_m = y(t_m)\in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}\}$ - дискретна впорядкована по m зліченна множина дійсних чисел;

2)якщо $\mathbf{W}=\left\{t_m \in \mathbf{R}, m=\overline{1,M}, M<\infty\right\}$, то $\mathbf{W}'=\left\{t'_m = y(t_m)\in \mathbf{R}, m=\overline{1,M}, M<\infty\right\}$ - дискретна впорядкована по m скінченна множина дійсних чисел;

3) $\mathbf{W}=\mathbf{R}$ або $\mathbf{W}=[t_0, t_0+T), t_0\in\mathbf{R}, T>0$, то може бути або $\mathbf{W}'=\mathbf{R}$ або $\mathbf{W}'=[y(t_0), y(t_0+T)), t_0\in \mathbf{R}, T>0$.

Застосувавши оператор $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ до лівої та правої частин рівності (1), отримаємо таку рівність:

$$\mathbf{G}_{y(t)}[f(t)]=\mathbf{G}_{y(t)}\left[\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\cdot g_k(t)\right]=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\cdot \mathbf{G}_{y(t)}[g_k(t)], t\in\mathbf{W}. \tag{5}$$

Врахувавши систему рівнянь (4), запишемо остаточно:

$$\hat{f}(y(t))=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\cdot \hat{g}_k(y(t)), t\in\mathbf{W}, \tag{6}$$

де $\{\hat{g}_k(y(t)), k\in\mathbf{Z}, t\in\mathbf{W}\}$ - множина базисних функцій в просторі $\hat{\mathbf{\Phi}}$, причому кожна k-та базисна функція ($\hat{g}_k(y(t))$) є результатом дії оператора $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ на k-ту базисну функцію $g_k(t), t\in\mathbf{W}$, тобто:

$$\mathbf{G}_{y(t)}[g_k(t), t\in\mathbf{W}]=\{\hat{g}_k(t'), t'=y(t)\in\mathbf{W}'\}, \tag{7}$$

і має місце така система рівнянь:

$$\begin{cases} t'=y(t), \\ \hat{g}_k(t')=g_k(t), t'\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W}. \end{cases} \tag{8}$$

Оскільки, через зростання числова функція $t'=y(t)\in\mathbf{W}'$ є бієктивним відображенням, тому існує і обернена до неї функція $y^{-1}(t')\in\mathbf{W}, t'\in\mathbf{W}'$, якій відповідає оператор $\mathbf{G}_{y^{-1}(t')}[\cdot]$, що є оберненим до оператора $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$. Застосувавши до лівої та правої частин зображення (6) обернений оператор $\mathbf{G}_{y^{-1}(t')}[\cdot]$, отримаємо зображення (1). Отже, як видно із зображень (1) та (6), спектр для функціональних відношень $f(t), t\in\mathbf{W}$ та $\hat{f}(t'), t'\in\mathbf{W}'$ у відповідних базисах $\{g_k(t), k\in\mathbf{Z}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\hat{g}_k(t'), k\in\mathbf{Z}, t'\in\mathbf{W}'\}$ є однаковим і є впорядкованою множиною $\{c_k, k\in\mathbf{Z}\}$, що обґрунтовує можливість взаємозаміни результатів спектрального аналізу функцій (сигналів) у різних базисах, які пов'язані через оператор перетворення шкали.

Якщо замість незалежної змінної $t\in\mathbf{W}$ взяти $t'=y(t)\in\mathbf{W}'$, то ряд (6) буде мати вигляд:

$$\hat{f}(t')=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\cdot \hat{g}_k(t'), t'\in\mathbf{W}', \tag{9}$$

а оскільки $\hat{g}_k(t')=g_k(y^{-1}(t'))$, то отримаємо ряд

$$\hat{f}(t')=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\cdot g_k(y^{-1}(t')), t'\in\mathbf{W}', \tag{10}$$

який виражає функцію $\hat{f}(t')$ через ряд за базисом $\{g_k(t), k\in\mathbf{Z}, t\in\mathbf{W}\}$.

Аналогічно до (10), можна виразити функцію $f(t)$ через ряд за базисом $\{\hat{g}_k(t'), k\in\mathbf{Z}, t'\in\mathbf{W}'\}$, а саме:

$$f(t)=\hat{f}(y(t))=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\cdot \hat{g}_k(y(t)), t\in\mathbf{W}. \tag{11}$$

Ще одним способом зображення функції $f(t)$, коли замість незалежної змінної $t \in \mathbf{W}$ взяти $t' \in \mathbf{W}'$, буде такий ряд:

$$f\left(y^{-1}(t')\right) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \cdot g_k\left(y^{-1}(t')\right), t' \in \mathbf{W}'. \quad (12)$$

Отже, є можливість застосування результатів спектрального аналізу функцій із деякого лінійного функціонального простору $\mathbf{\Phi}$ в базисі $\{g_k(t), k \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{W}\}$ для розв'язання задач спектрального аналізу функцій із новоутвореного лінійного функціонального простору $\hat{\mathbf{\Phi}}$, що є результатом дії оператора $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ перетворення шкали на елементи простору $\mathbf{\Phi}$ у базисі $\{\hat{g}_k(t'), k \in \mathbf{Z}, t' \in \mathbf{W}'\}$.

Отримані вище результати, використаємо для проведення спектрального аналізу та синтезу циклічних функцій з використанням базису комплексних експонент.

Розклади детермінованих циклічних числових функцій з використанням базису комплексних експонент

Нехай маємо лінійний функціональний простір $\mathbf{\Phi} = \{f_T(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}\}$ T-періодичних числових функцій ($f_T(t) = f_T(t + n \cdot T), n \in \mathbf{Z}, T > 0$). І нехай кожна функція $f_T(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ може бути подана за допомогою комплексного ряду Фур'є:

$$f_T(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}, t \in \mathbf{R}, \quad (13)$$

де множина $\left\{ e^{i\frac{2\pi}{T}kt}, t \in [t_0, t_0 + T) \subset \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ є ортогональним базисом у лінійному функціональному просторі звужень функцій із простору $\{f_T(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}\}$ на будь-який півінтервал $[t_0, t_0 + T), t_0 \in \mathbf{R}$. Спектральні коефіцієнти розкладу (13) обчислюються на основі співвідношення:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_T(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt, k \in \mathbf{Z}. \quad (14)$$

Нехай задано оператор $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ перетворення шкали із функцією перетворення шкали $t' = y(t) \in \mathbf{R}$, що діє на функції $f_T(\cdot) \in \mathbf{\Phi}$, а результатом його дії є ізоморфні їм відносно порядку та значень функції $f(\cdot) \in \hat{\mathbf{\Phi}}$ деякого простору $\hat{\mathbf{\Phi}} = \{f(t'), t' = y(t) \in \mathbf{R}\}$, тобто:

$$\mathbf{G}_{y(t)}[f_T(t), t \in \mathbf{R}] = \{\hat{f}(t'), t' \in \mathbf{R}\}, \quad (15)$$

причому, згідно з (4), має місце така система рівнянь:

$$\begin{cases} t' = y(t), \\ f(t') = f_T(t), t', t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (16)$$

Функціональний простір $\hat{\mathbf{\Phi}} = \{f(t'), t' = y(t) \in \mathbf{R}\}$ є простором числових циклічних строго ритмічно пов'язаних функцій, тобто циклічних функцій із однаковою функцією ритму $T(t,n)$, яка, згідно з роботою [6], визначається із залежності:

$$T(y(t), n) = y(t + n \cdot T) - y(t), t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}. \quad (17)$$

У результаті перетворення шкали періодичної функції $f_T(t)$, її ряд (13) зазнає модифікації і буде мати такий вигляд:

$$f(y(t)) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}ky(t)}, t \in \mathbf{R}, \quad (18)$$

де $\left\{e^{i\frac{2\pi}{T}ky(t)}, t \in [t_0, t_0+T) \subset \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ - новий, у загальному випадку, вже не ортогональний базис у лінійному функціональному просторі звужень функцій із простору $\hat{\mathbf{\Phi}} = \{f(t'), t' = y(t) \in \mathbf{R}\}$ на будь-який півінтервал $[y(t_0), y(t_0+T)), t_0 \in \mathbf{R}$.

Кожна k-та функція $e^{i\frac{2\pi}{T}ky(t)}$ є результатом дії оператора $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ на k-ту функцію $e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$, тобто:

$$\mathbf{G}_{y(t)}\left[e^{i\frac{2\pi}{T}kt}, t \in \mathbf{R}\right] = \left\{e^{i\frac{2\pi}{T}ky(t)}, t \in \mathbf{R}\right\}, \tag{19}$$

причому має місце рівність

$$e^{i\frac{2\pi}{T}ky(t)} = e^{i\frac{2\pi}{T}kt}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}. \tag{20}$$

Спектр $\{c_k, k \in \mathbf{Z}\}$ залишається без змін.

Використовуючи зображення (10), ряд (18) можна подати ще так:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}ky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}. \tag{21}$$

Якщо $T = 2\pi$, то одночасно мають місце такі залежності між функціями $f(t), t \in \mathbf{R}$ та $f_T(t), t \in \mathbf{R}$:

$$f(y(t)) = f_{2\pi}(t), t \in \mathbf{R}, \tag{22}$$

$$f(t) = f_{2\pi}(y^{-1}(t)), t \in \mathbf{R}, \tag{23}$$

а самі функції $y(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ та $y^{-1}(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ є неперервними зростаючими функціями, тобто їх похідні більші за нуль. У такому випадку, ряд (13) буде мати вигляд:

$$f_{2\pi}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt}, t \in \mathbf{R}. \tag{24}$$

Врахувавши (23), ряд (21) для циклічного функціонального відношення $f(t), t \in \mathbf{R}$ буде мати вигляд:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{iky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}. \tag{25}$$

Відзначимо, що всі отримані результати для детермінованих циклічних числових функцій можна поширити і на циклічні випадкові процеси, якщо за $f_T(t)$ прийняти стохастично T-періодичний випадковий процес $\xi_T(\omega, t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ ($f_T(t) = \xi_T(\omega, t)$), а за $f(t)$ прийняти циклічний випадковий процес $\xi(\omega, t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ із функцією ритму $T(t, n)$.

Кратно ритмічно пов'язані циклічні функції

Для компонент $\left\{e^{iky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ряду (25), тобто, для модульованих за кутом гармонічних функцій, має місце факт кратності їх функцій ритму до функції ритму першої складової $e^{iy^{-1}(t)}$. Ця властивість є узагальненням факту кратності циклічних частот та періодів всіх гармонік ряду Фур'є циклічній частоті та періоду основної гармоніки T-періодичної функції при розкладі її у ряд Фур'є, або, що те саме, циклічній частоті та періоду самої T-періодичної функції.

Як відомо, для кутових частот $\{\omega_k, k \in \mathbf{N}\}$ та періодів $\{T_k, k \in \mathbf{N}\}$ гармонік ряду Фур'є (13) мають місце такі залежності:

$$\omega_k = k \cdot \omega_1,\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T},\ k = \overline{2,\infty}, \tag{26}$$

$$T_k = \frac{T}{k},\ k = \overline{2,\infty}. \tag{27}$$

Для функцій ритму $T_k(t,n)$ компонент $\left\{e^{iky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ряду (25), мають місце такі співвідношення:

$$T(t,n) = T_k(t, k \cdot n),\ n \in \mathbf{Z},\ t \in \mathbf{R},\ \ k = \overline{2,\infty}, \tag{28}$$

що відображають факт вкладеності k циклів k-ї компоненти ряду (25) в один цикл першої компоненти цього ряду, а також в один цикл самої циклічної функції $f(t)$.

Виходячи із наведеного вище, елементи базису $\left\{e^{iky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ слушно називати циклічними числовими функціями, які k-кратно вкладені у функцію $e^{iy^{-1}(t)}$. Для їх функцій ритму $\{T_k(t,n), k \in \mathbf{Z}\}$ має місце така сукупність рівностей: $\left\{T_k(t,n) = T_{-k}(t,n),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$.

Відмітимо, що коли $k = 1$, будемо мати випадок строгої ритмічної пов'язаності циклічних функцій [3].

Для компонент $\left\{e^{iky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ряду (25), тобто, для модульованих за кутом гармонічних функцій, має місце факт кратності їх кутових частот до кутової частоти першої складової $e^{iy^{-1}(t)}$.

Запишемо взаємозв'язок між кутовими частотами $\omega_k(t)$ компонент $e^{iky^{-1}(t)}$, кутовими частотами $\omega_k = k$ компонент e^{ikt} та функцією перетворення шкали $y^{-1}(t)$:

$$\omega_k(t) = \omega_k \cdot \left(y^{-1}(t)\right)' = k \cdot \left(y^{-1}(t)\right)',\ t \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}. \tag{29}$$

Отже, кутові частоти ω_k немодульованих гармонічних функцій множаться на похідну закону перетворення шкали $y^{-1}(t)$.

Із залежностей $\omega_k(t) = k \cdot \left(y^{-1}(t)\right)'$ та $\omega_1(t) = \left(y^{-1}(t)\right)'$ виразимо $\left(y^{-1}(t)\right)'$ і прирівняємо їх, тобто:

$$\left(y^{-1}(t)\right)' = \frac{\omega_k(t)}{k} = \omega_1(t),\ t \in \mathbf{R}. \tag{30}$$

Із останнього виразу отримаємо залежність

$$\omega_k(t) = \omega_1(t) \cdot k,\ k = \overline{2,\infty},\ t \in \mathbf{R}, \tag{31}$$

яка є вираженням факту кратності кутових частот компонент $\left\{e^{iky^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ до кутової частоти першої компоненти $e^{iy^{-1}(t)}$ ряду (25). Причому $\left\{\omega_k(t) = \omega_{-k}(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$.

Можна встановити більш загальний взаємозв'язок між кутовими частотами $\left\{\omega_k(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$ та $\left\{\tilde{\omega}_k(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$ модульованих за кутом гармонічних функцій $\left\{e^{iky_1^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k = \overline{1,\infty}\right\}$ та $\left\{e^{iky_2^{-1}(t)}, t \in \mathbf{R}, k = \overline{1,\infty}\right\}$, що є компонентами відповідних рядів:

$$f_1(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{iky_1^{-1}(t)},\ t \in \mathbf{R}, \tag{32}$$

$$f_2(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{iky_2^{-1}(t)},\ t \in \mathbf{R}. \tag{33}$$

Оскільки циклічні функціональні відношення $f_1(t)$ та $f_2(t)$ є ізоморфними відносно порядку та значень, то існує така функція перетворення шкали $y_3^{-1}(t)$, що має місце рівність:

$$f_2(t) = f_1\left(y_3^{-1}(t)\right),\ t \in \mathbf{R}. \tag{34}$$

Враховуючи залежність (29), кутові частоти $\left\{\omega_k(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$ та $\left\{\tilde{\omega}_k(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$ пов’язані із функціями перетворення шкали $y_1^{-1}(t)$ та $y_2^{-1}(t)$ наступними залежностями:

$$\omega_k(t) = k \cdot \left(y_1^{-1}(t)\right)',\ t \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}; \tag{35}$$

$$\tilde{\omega}_k(t) = k \cdot \left(y_2^{-1}(t)\right)',\ t \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}. \tag{36}$$

Між функціями перетворення шкали $y_1^{-1}(t)$, $y_2^{-1}(t)$ та $y_3^{-1}(t)$ має місце така залежність

$$y_2^{-1}(t) = y_3^{-1}\left(y_1^{-1}(t)\right),\ t \in \mathbf{R}. \tag{37}$$

Виразимо $\left\{\tilde{\omega}_k(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$ через $\left\{\omega_k(t),\ k = \overline{1,\infty}\right\}$, базуючись на рівностях (35) – (37), а саме:

$$\tilde{\omega}_k(t) = \omega_k(t)\frac{\left(y_2^{-1}(t)\right)'}{\left(y_1^{-1}(t)\right)'} = \omega_k(t)\frac{\left(y_3^{-1}\left(y_1^{-1}(t)\right)\right)'}{\left(y_1^{-1}(t)\right)'},\ t \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}. \tag{38}$$

Як частинний випадок залежності (38) є залежність (29).

На рисунку 1 подано приклад графіків кратно ритмічно пов’язаних із $z(t)$ циклічних функцій $z1(t), z2(t), z3(t)$ із змінним ритмами, які утворено згідно з рядом (25).

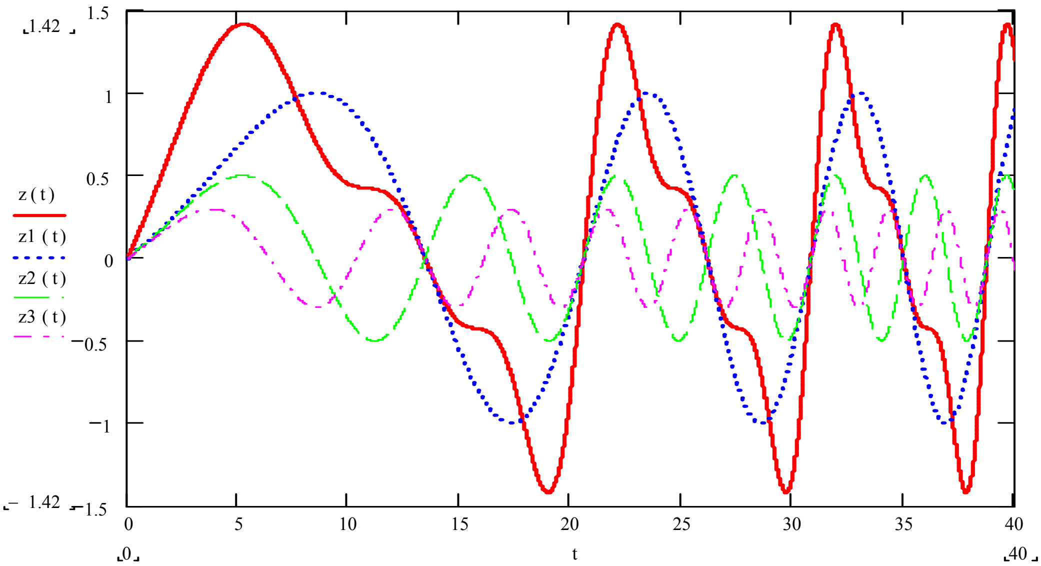

Рисунок 1 - Графіки кратно ритмічно пов’язаних циклічних функцій із змінним ритмом

Поширюючи співвідношення (28) та (31) на більш загальний випадок, дамо наступне означення.

Означення 1. Циклічне функціональне відношення $f_2(t)$ із функцією ритму $T_2(t,n)$ будемо називати k-кратно вкладеним у циклічне функціональне відношення $f_1(t)$ із функцією ритму $T_1(t,n)$, а самі функціональні відношення $f_1(t)$ та $f_2(t)$ будемо називати k-кратно ритмічно пов’язаними, якщо існує таке додатне ціле $k \in \mathbf{N}$, що для їх функцій ритму та кутових частот мають місце такі співвідношення:

$$T_1(t,n) = T_2(t, k \cdot n),\ t \in \mathbf{W},\ n \in \mathbf{Z}, \tag{39}$$

$$\omega_2(t) = \omega_1(t) \cdot k,\ k = const \in \mathbf{N}. \tag{40}$$

Кутова частота циклічного функціонального відношення неперервного аргументу

Розглянемо три підходи до означення кутової частоти довільної циклічної функції неперервного аргументу, які поширюють поняття кутової частоти, яке строго введено для гармонічних функцій, на довільне циклічне функціональне відношення неперервного аргументу.

Оскільки числову циклічну функцію $f(t)$ із функцією ритму $T(t,n)$ можна розкласти у ряд (25), а кожен доданок цього ряду є модульована за кутом (за частотою чи за фазою) гармонічна функція ($e^{iy^{-1}(t)}$), для якої має місце поняття кутової частоти $\omega(t)$ як похідної від кута $y^{-1}(t)$ ($\omega(t) = \dfrac{dy^{-1}(t)}{dt}$), то можна ввести поняття кутової частоти і самої циклічної функції $f(t)$. Кутова частота $\omega(t)$ циклічної функції $f(t)$ дорівнює кутовій частоті $\omega_1(t) = 2\pi\nu_1(t)$ першої гармоніки при розкладі її в ряд (25), оскільки їх ритмічні структури тотожні, тобто мають однакові функції ритму.

Із більш загальних позицій, якщо не прив’язуватися до зображення циклічної функції $f(t)$ у вигляді ряду (25), то можна ще так ввести поняття миттєвої частоти для довільного циклічного функціонального відношення $f(t)$. Для цього відношення необхідно задати ізоморфне йому відносно порядку та значень циклічне функціональне відношення $f_{2\pi}(t)$ із функцією ритму $T(t,n) = 2\pi n$ і віднайти таку функцію перетворення шкали $y^{-1}(t)$, щоб виконувалась рівність $f(t) = f_{2\pi}\left(y^{-1}(t)\right)$. Похідна $\omega(t) = \dfrac{dy^{-1}(t)}{dt}$ від функції перетворення шкали $y^{-1}(t)$ і буде кутовою частотою циклічного функціонального відношення $f(t)$.

Ще одним можливим способом означення кутової частоти циклічної функції, що перегукується із першим способом, але не використовується ряд (25), є спосіб, що базується на понятті строгої ритмічної пов’язаності циклічних функцій, тобто циклічних функцій із однаковими функціями ритму. Отже, під кутовою частотою циклічної функції неперервного аргументу будемо розуміти кутову частоту строго ритмічно пов’язаної із нею модульованої за кутом гармонічної функції. Тобто їх кутові частоти є рівними, оскільки є рівними їх функції ритму.

Відзначимо, що функція ритму $T(t,n)$ є більш фундаментальною характеристикою ритмічної структури циклічної функції, ніж кутова частота $\omega(t)$, оскільки вона існує для будь-якої циклічної функції як неперервного, так і дискретного аргументу. Кутова частота $\omega(t)$ означена лише для циклічної функції неперервного аргументу. Для циклічних функцій дискретного аргументу поняття кутової частоти втрачає свій зміст, оскільки немає змоги говорити про похідну.

Про зв'язок між функцією ритму та кутовою частотою циклічного функціонального відношення неперервного аргументу

Згідно з роботою [6], будь-яку циклічну функцію $f(t)$ із довільною функцією ритму $T(t,n)$ можна утворити із ізоморфної їй відносно порядку та значень циклічної функції $f_{2\pi}(t)$ із функцією ритму $2\pi n$ шляхом дії на неї оператора перетворення шкали $\mathbf{G}_{y^{-1}(t)}[\cdot]$, функцію перетворення шкали $y^{-1}(t)$ якого, пов'язана із функціями ритму $T(t,n)$ та $2\pi n$ через залежність:

$$2\pi n = y^{-1}(t + T(t,n)) - y^{-1}(t),\ t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (41)$$

Із означення кутової частоти $\omega(t)$ виразимо функцію перетворення шкали $y^{-1}(t)$:

$$y^{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \omega(t)dt,\ t \in \mathbf{R},\ \text{або}\ \ y^{-1}(t) = \int_{0}^{t} \omega(t)dt + y^{-1}(0),\ t \in [0,\infty). \qquad (42)$$

Отримана формула (42) дає змогу визначити функцію перетворення шкали $y^{-1}(t)$ циклічного функціонального відношення $f(t)$ із довільною функцією ритму $T(t,n)$, якщо задано її кутову частоту $\omega(t)$.

Підставимо (42) в (41):

$$2\pi n = \int_{-\infty}^{t+T(t,n)} \omega(t)dt - \int_{-\infty}^{t} \omega(t)dt = \int_{-\infty}^{t} \omega(t)dt + \int_{t}^{t+T(t,n)} \omega(t)dt - \int_{-\infty}^{t} \omega(t)dt = \int_{t}^{t+T(t,n)} \omega(t)dt. \qquad (43)$$

Тобто маємо таку залежність між функцією ритму $T(t,n)$ та кутовою частотою $\omega(t)$:

$$\int_{t}^{t+T(t,n)} \omega(t)dt = 2\pi n,\ t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (44)$$

Інколи зручно користуватися не кутовою частотою $\omega(t)$, яка вимірюється в радіанах за секунду, а циклічною частотою $\nu(t) = \dfrac{\omega(t)}{2\pi}$, яка вимірюється в герцах, тобто вказує, скільки циклів коливного процесу розгортається протягом однієї секунди. У такому випадку із залежності (44), матимемо таку залежність між функцією ритму $T(t,n)$ та циклічною частотою $\nu(t)$:

$$\int_{t}^{t+T(t,n)} \nu(t)dt = n,\ t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (45)$$

Виведемо з формули (44) частинний випадок, коли $T(t,n) = nT$, тобто коли зв'язок між частотою та функцією ритму визначається простою формулою: $\omega(t) = \omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Для цього в (44) підставимо $T(t,n) = nT$ та $\omega(t) = \omega_0 = const$ і зробимо такі перетворення:

$$\int_{t}^{t+nT} \omega_0 dt = 2\pi n = \qquad (46)$$

$$= \omega_0 t \Big|_{t}^{t+nT} = \omega_0 (t + nT) - \omega_0 t = \omega_0 t + \omega_0 nT - \omega_0 t = \omega_0 nT = 2\pi n.$$

Звідси остаточно маємо відому залежність між кутовою частотою та періодом:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{47}$$

що є частинним випадком, коли циклічне функціональне відношення має стабільний ритм.

Як приклад, встановимо вигляд функції ритму циклічної числової функції $f(t) = \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t^2\right), t \geq 0$, що є результатом лінійної частотної модуляції гармонічної функції $f_{2\pi}(t) = \sin(t), t \geq 0$, тобто його кутова частота підпорядкована лінійному закону $\omega(t) = \omega_0 \cdot t, t \geq 0$. Для цього, скориставшись формулою (44), отримаємо наступну послідовність перетворень:

$$\int_t^{t+T(t,n)} \omega_0 t dt = \left.\frac{\omega_0 t^2}{2}\right|_t^{t+T(t,n)} = \frac{\omega_0}{2} \cdot [t + T(t,n)]^2 - \frac{\omega_0 t^2}{2} =$$

$$= \frac{\omega_0}{2} \cdot [t^2 + 2tT(t,n) + T^2(t,n) - t^2] = 2\pi n,\ t \geq 0,\ n \geq 0.$$

Остаточно будемо мати квадратне рівняння

$$T^2(t,n) + 2t \cdot T(t,n) - \frac{4\pi n}{\omega_0} = 0,\ t \geq 0,\ n \geq 0.$$

Ввівши позначення: $a = 1$, $b = 2t$, $c = -\frac{4\pi n}{\omega_0}$, знайдемо дискримінант $D = b^2 - 4ac = (2t)^2 + 4 \cdot \frac{4\pi n}{\omega_0} > 0$ та запишемо розв’язок квадратного рівняння:

$$T(t,n) = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2t \pm \sqrt{4t^2 + \frac{16\pi n}{\omega_0}}}{2},\ t \geq 0,\ n \geq 0.$$

Оскільки функція ритму $T(t,n)$ при $n \geq 0$ від’ємною не може бути, то остаточно шукана функція ритму дорівнюватиме

$$T(t,n) = \frac{-2t + \sqrt{4t^2 + \frac{16\pi n}{\omega_0}}}{2},\ t \geq 0,\ n \geq 0.$$

На рисунку 2 подано графіки кутової частоти $\omega(t) = w(t) = 0.1t, t \geq 0$ та відповідної їй функції ритму $T(t,1) = T1(t) = -t + \sqrt{t^2 + 40\pi}, t \geq 0$ циклічного сигналу $f(t) = \sin(0{,}05 \cdot t^2), t \geq 0$, що є результатом лінійної частотної модуляції гармонічної функції.

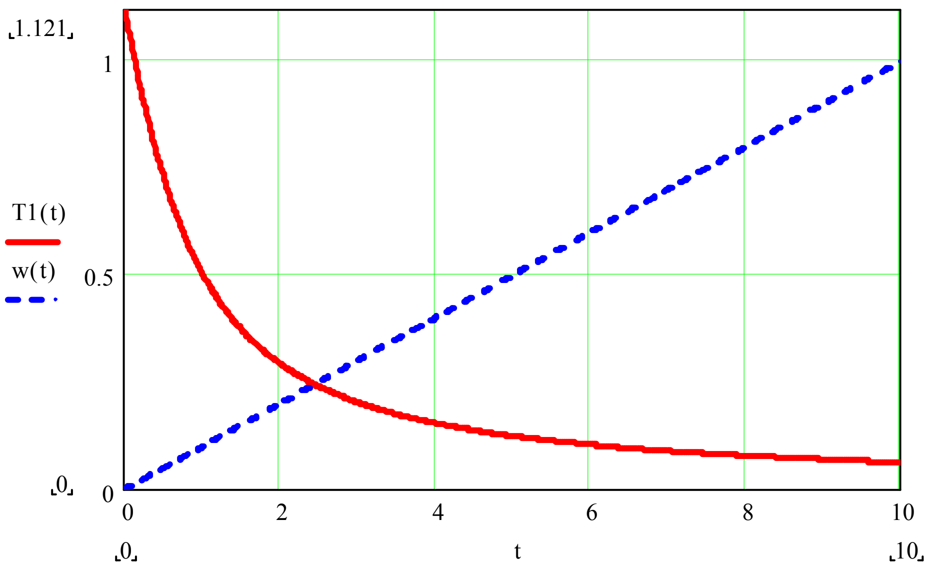

Рисунок 2 - Графік кутової частоти $w(t)$ та відповідної їй функції ритму $T1(t)$ циклічного сигналу, що є результатом лінійної частотної модуляції гармонічної функції

Базуючись на отриманих вище результатах, сформулюємо основні положення спектрального аналізу та синтезу циклічних числових функцій. Спектральний аналіз та синтез циклічної числової функції $f(t)$ із функцією ритму $T(t,n)$ здійснюється у такий спосіб.

1. Знаходимо такий оператор перетворення шкали $\mathbf{G}_{y^{-1}(t)}[\cdot]$ із функцією перетворення шкали $y^{-1}(t)$, що функцію $f_{2\pi}(t)=f_{2\pi}(t+2\pi n)$, яка є ізоморфною $f(t)$ відносно порядку та значень, перетворює на аналізовану функцію $f(t)$. Функція перетворення шкали $y^{-1}(t)$ може бути знайдена із залежності (41) або шляхом інтегрування кутової частоти $\omega(t)$ на основі рівності (42). Узагальнена кутова частота може бути знайдена як розв'язок інтегрального рівняння (44).
2. Визначаємо коефіцієнти $\{c_k, k\in\mathbf{Z}\}$ для циклічної функції $f_{2\pi}(t)$, при її зображенні у вигляді ряду (24), тобто на основі формули

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{2\pi}(t)e^{-ikt}dt,\ k\in\mathbf{Z}. \qquad (48)$$

Знайдені коефіцієнти $\{c_k, k\in\mathbf{Z}\}$ і є спектром циклічної числової функції $f(t)$ із функцією ритму $T(t,n)$ в базисі $\left\{e^{iky^{-1}(t)}, t\in\mathbf{R}, k\in\mathbf{Z}\right\}$, що розв'язує задачу спектрального аналізу циклічної числової функції $f(t)$.

3. Синтез функції $f(t)$ здійснюється на основі ряду (25).

Отже, спектральний аналіз та синтез циклічних функціональних відношень зводиться до спектрального аналізу та синтезу ізоморфних їм відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень $f_{2\pi}(t)$ із функцією ритму $T(t,n)=2\pi n$. Спектр для всього класу ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень є однаковим, відрізняються лише шкали базисних функцій.

За результатами даної роботи можна зробити наступні **висновки**:

1. Обґрунтовано та показано слушність використання оператора перетворення шкали у задачах спектрального аналізу сигналів, оскільки дія цього оператора на сигнал не змінює його спектр, а змінює лише шкали базисних функцій.

2. Введено поняття кратної ритмічної пов'язаності циклічних функцій, що узагальнює поняття кратності частот та періодів періодичних, зокрема гармонічних, функцій.

3. Поширено поняття кутової частоти, що було строго введено лише для модульованої за кутом детермінованої гармонічної функції, для будь-якої циклічної функції (детермінованої та випадкової) неперервного аргументу.

4. Встановлено аналітичну залежність між функцією ритму та кутовою частотою циклічної функції неперервного аргументу.

5. Запропоновано метод спектрального аналізу циклічних функцій із змінним ритмом, що зводиться до спектрального аналізу та синтезу ізоморфних їм відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень $f_{2\pi}(t)$ із функцією ритму $T(t,n) = 2\pi n$.

Література

1. Розанов Ю.А. Спектральный анализ абстрактных функций. // Теория вероятностей и её применения. – 1959. – Т.4. Вып. 3. - С. 291-310.
2. Омельченко В.А. Ортогональное разложение случайных сигналов и полей. - Киев: УМКВО, 1991.- 140с.
3. Лупенко С. Циклічні функції та їх класифікація в задачах моделювання циклічних сигналів та коливних систем // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 2005. - №1. - С. 177-185.
4. Лупенко С.А. Детермнированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация // Электронное моделирование.- 2006. –Т. 28, №4.– С.47-65.
5. Лупенко С. Циклічне функціональне відношення як основа математичного формалізму теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2007. -Т. 12, №3. -С.183-195.
6. Лупенко С. Оператор перетворення шкали в задачах моделювання та аналізу циклічних сигналів // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2007. -Т. 12, №4. -С.141-152.

Одержано 04.02.2008 р.