

**І.Сидоренко, канд. техн. наук; С.Гутиря, докт. техн. наук**

*Одеський національний політехнічний університет*

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У РІВНОЧАСТОТНИХ ВІБРОІЗОЛЯТОРАХ**

*Наведено результати математичного моделювання коливальних процесів при гармонійному збурюванні в системах, які містять віброізолюючі пристрої з механічним зворотним зв'язком. Показано, що нелінійні пружні характеристики таких пристроїв можуть визначати як близькі до гармонійного, так і негармонійні коливання і є дуже чутливими до зсуву центра коливань щодо положення пружної рівноваги системи.*

**I.Sidorenko, S.Hyturya**

## **MATHEMATICAL MODELING OF OSCILLATORY PROCESSES IN EQUAL FREQUENCY ANTIVIBRATING DEVICES**

*The results of mathematical modeling of oscillatory processes are given at harmonically indignation in systems containing antivibrating devices with a mechanical feedback. Is shown, that the nonlinear elastic characteristics of such devices can define as close to harmonically, and non harmonically to fluctuations and are very sensitive to displacement of the centre of fluctuations concerning a rule of elastic balance of system.*

### **Умовні позначення**

*ПВП – пасивний віброізолюючий пристрій;  
 МЗЗ – механічний зворотний зв'язок;  
 $m$  – маса джерела коливань;  
 ВПС – відновлююча пружна сила;  
 $x(t)$  – величина деформації пружного зв'язку;  
 $F_y(x, \dot{x})$  – сила пружного зв'язку;  
 $F(x)$  – відновлююча пружна сила;  
 $F_d(\dot{x})$  – непружна сила дисипації;  
 $Q$  – амплітуда зовнішнього збурення;  
 $\omega$  – частота зовнішнього збурення;  
 $c$  – зведена жорсткість;  
 $b_1$  – коефіцієнт опору лінійної системи з в'язким демпфуванням;  
 $\psi$  – коефіцієнт розсіювання енергії пружним елементом;  
 $P_j$  – статичне навантаження на  $j$  ступені навантаження;  
 $a_i$  – коефіцієнт при елементах полінома  $i$ -го ступеня;  
 $N$  – найвищий достатній ступінь полінома;  
 $b_1(x, \omega)$  – функція опору в нелінійній системі з в'язким демпфуванням;  
 $\psi'$  – зведений коефіцієнт розсіювання енергії.*

Інтенсифікація технологічних процесів приводить до розширення спектра вібраційних полів, у яких працюють сучасні машинні агрегати. У багатьох випадках коливання цілеспрямовано використовуються в технологічних процесах, наприклад, у машинах віброударної і вібраційної дії. Наявність коливань у машинному агрегаті завжди сполучено з негативними наслідками у вигляді додаткових динамічних навантажень на ланки і кінематичні пари, а також підвищенням імовірності резонансних проявів. З метою мінімізації зазначених негативних явищ до складу машинного агрегату включають демпфуючі і віброізолюючі пристрої.

У сучасній техніці розроблено різні типи пасивних віброізолюючих пристроїв (ПВП), які мають лінійні пружні характеристики, застосування яких, у міру розширення спектра вібраційних полів, стає неефективним, а в ряді випадків самі пристрої стають дестабілізуючим елементом механічної системи і викликають її резонанс.

Дослідження в області нелінійної механіки коливань показали, що нелінійність пружних характеристик машинного агрегату істотно змінює характер коливальних

процесів і часто сприяє розширенню частотного діапазону експлуатаційних навантажень [1, 2]. Оскільки більшість технологічних процесів є циклічними, то коливальні процеси, які їх супроводжують, мають вимушений гармонійний характер. Тому аналіз пружних і дисипативних властивостей перспективних конструкцій нелінійних ПВП, а також дослідження їхнього впливу на коливальні процеси машинного агрегату при гармонійному збудованні є актуальними. Удосконалювання конструкцій ПВП призвело до створення нового типу таких пристроїв, відмінною рисою яких є наявність механічного зворотного зв'язку (МЗЗ), виконаного у вигляді передачі або коригувальних ланок [3, 4].

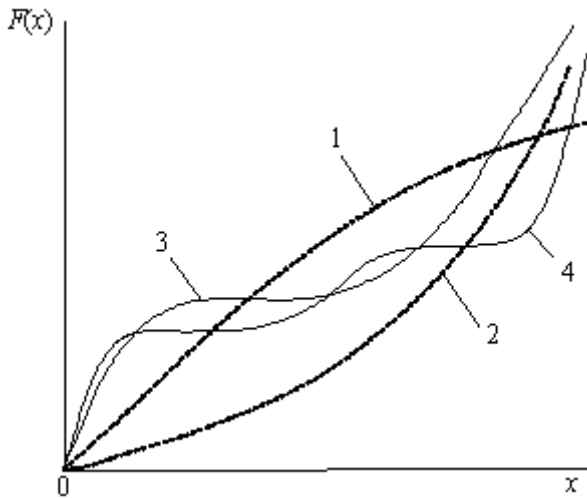


Рисунок 1 – Графіки характеристик ВПС для ПВП з МЗЗ

Даний тип ПВП дозволяє реалізувати широкий діапазон характеристик відновлюючої пружної сили (ВПС), які відповідають певним функціям нелінійності (рис.1), наприклад: кубічно нелінійні характеристики «м'якого» (крива 1) і «жорсткого» типу (крива 2); характеристики, що мають одну ділянку комбінованої зведеної жорсткості (крива 3) або кілька таких ділянок (крива 4). Під ділянкою комбінованої зведеної жорсткості розуміють таку ділянку характеристики, де відбувається перехід від нелінійного зменшення зведеної жорсткості до її нелінійного збільшення. Реалізація таких характеристик є одним з переваг ПВП з МЗЗ, оскільки вони не можуть бути

отримані за допомогою інших відомих конструкцій ПВП.

Метою досліджень є вивчення коливань при гармонійному збудованні механічних систем, які містять ПВП з МЗЗ і дозволяють реалізувати кубічно нелінійну характеристику «жорсткого» типу, а також характеристику із двома комбінованими ділянками.

Дослідження проводились в рамках пріоритетних напрямків розвитку науки і техніки «Новітні та ресурсозберігаючі технології у промисловості, енергетиці та агропромисловому комплексі» на 2002-2007 роки.

В ході дослідження проведено чисельне моделювання коливальних процесів в одномасовій механічній системі з ПВП, який представлений у вигляді пружного зв'язку між джерелом коливань 1 масою  $m$  і деякою опорною площиною 2 (рис. 2).

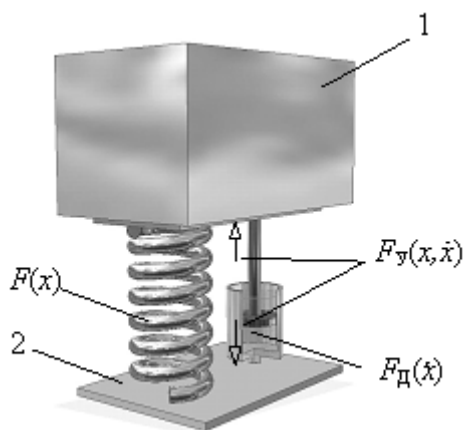


Рисунок 2 – Модель одномасової механічної системи, що містить ПВП

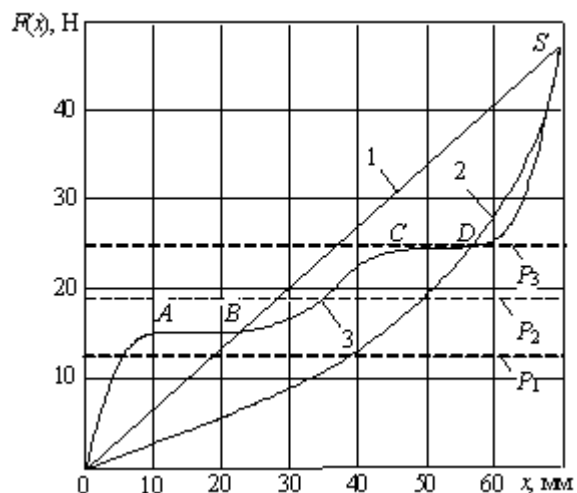


Рисунок 3 – Графіки характеристик ВПС і статичного навантаження  $P_j$

При цьому величина деформації пружного зв'язку  $x(t)$  змінюється з часом, а сила пружного зв'язку  $F_y(x, \dot{x})$  представлена у вигляді суми

$$F_y(x, \dot{x}) = F(x) + F_d(\dot{x}). \quad (1)$$

Перша зі складових, відновлююча пружна сила  $F(x)$ , залежить від жорсткості і величини деформації пружних елементів. Другою складовою є непружна сила дисипації  $F_d(\dot{x})$ , що визначає незворотне розсіювання енергії у навколишнє середовище, у матеріалі пружних елементів, у кінематичних парах, а також у з'єднаннях деталей конструкції при в'язкому терті.

Виходячи з нелінійної постановки завдання, дослідження проведене шляхом чисельного рішення відповідних диференціальних рівнянь у математичному пакеті Maple 11 з використанням методу Рунне-Кутта [5]. Моделювання коливальних процесів проведено для трьох одномасових систем з різними функціями  $F_y(x, \dot{x})$  при гармонійному зовнішньому збурюванні силою  $Q \cdot \sin(\omega t)$ , що діє з частотою  $\omega = 15,7$  рад/с. Перша модель (базова) відповідає системі з ПВП, що забезпечує лінійну характеристику ВПС (рис.3, крива 1). Оскільки всі характеристики коливальних процесів у таких системах досить досліджені [1, 2], то результати даного моделювання є базовими для порівняльного аналізу коливальних процесів у нелінійних моделях.

Диференціальне рівняння руху одномасової лінійної механічної системи має вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + F_y(x, \dot{x}) = Q \cdot \sin(\omega t) + P_j; \\ F_y(x, \dot{x}) = cx + b_1\dot{x}; \\ b_1 = \frac{\Psi c}{2\pi\omega}; \\ x|_{t=0} = 0; \\ \dot{x}|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Нелінійність другої та третьої досліджуваних механічних систем спричиняють специфіку опису сили пружного зв'язку при їхньому моделюванні. За рекомендаціями [1], характеристики ВПС нелінійних систем доцільно представити у вигляді інтерполяційного полінома найвищого наближення з мінімальним ступенем

$$F(x) = \sum_{i=1}^N a_i x^i. \quad (3)$$

Внаслідок нелінійності характеристик ВПС, зведена жорсткість таких систем також є функцією від переміщення і частоти збурювання [6]. У результаті сила дисипації визначається рівнянням

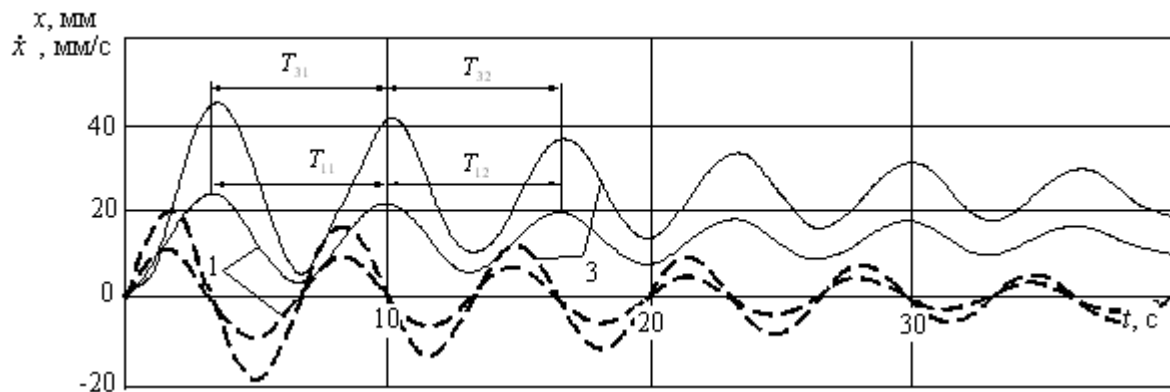
$$b(x, \omega) = \frac{\Psi' \int_0^x F(x) dx}{\pi a x^2}. \quad (4)$$

З урахуванням (3) і (4), диференціальне рівняння руху одномасової нелінійної системи представлено у вигляді

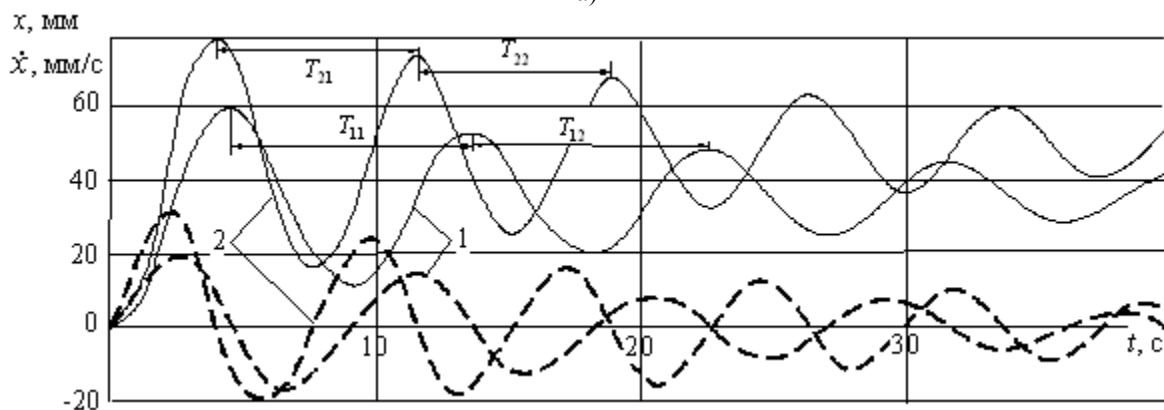
$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + F_y(x, \dot{x}) = Q \cdot \sin(\omega t) + P_j; \\ F_y(x, \dot{x}) = F(x) + b_1(x, \omega)\dot{x}; \\ F(x) = \sum_{i=1}^N a_i x^i; \\ b_1(x, \omega) = \frac{\Psi' \int_0^x F(x) dx}{\pi \omega x^2} = \frac{\Psi' \int_0^x \sum_{i=1}^N a_i x^i dx}{\pi \omega x^2}; \\ x|_{t=0} = 0; \\ \dot{x}|_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Друга модель відповідає системі, що містить ПВП з МЗЗ і дозволяє реалізувати кубічно нелінійну характеристику ВПС (рис.3, крива 2). Така система відома як система Дуффінгівського типу «жорсткої» нелінійності [2]. Третя модель відповідає системі з ПВП з МЗЗ, яка забезпечує характеристику ВПС з двома комбінованими ділянками (ділянки *AB* і *CD* на кривій 3, рис.3). Параметри ПВП підібрані таким чином, щоб значення  $F(x)$  на границі розрахункового діапазону переміщень  $x$  (0...70 мм) було однаковим. Шляхом обліку у моделі статичного навантаження  $P_j$  досягався необхідний зсув центра коливань щодо положення пружної рівноваги.

Результати рішення рівняння (2) для базової лінійної системи при значеннях параметрів  $m = 1$  кг;  $c = 0,9$  Н/мм;  $b_1 = 0,08$  Н/(м·с);  $\psi = 0,002$  показують, що в системі виникають гармонійні коливання з постійним періодом  $T_{11} < T_{12}$  (рис.4, а). Зсув центра коливань щодо положення пружної рівноваги на трьох щаблях статичного навантаження  $P_1, P_2, P_3$  не приводить до зміни періоду коливань ( $T_{11} = T_{21}$ ).



а)



б)

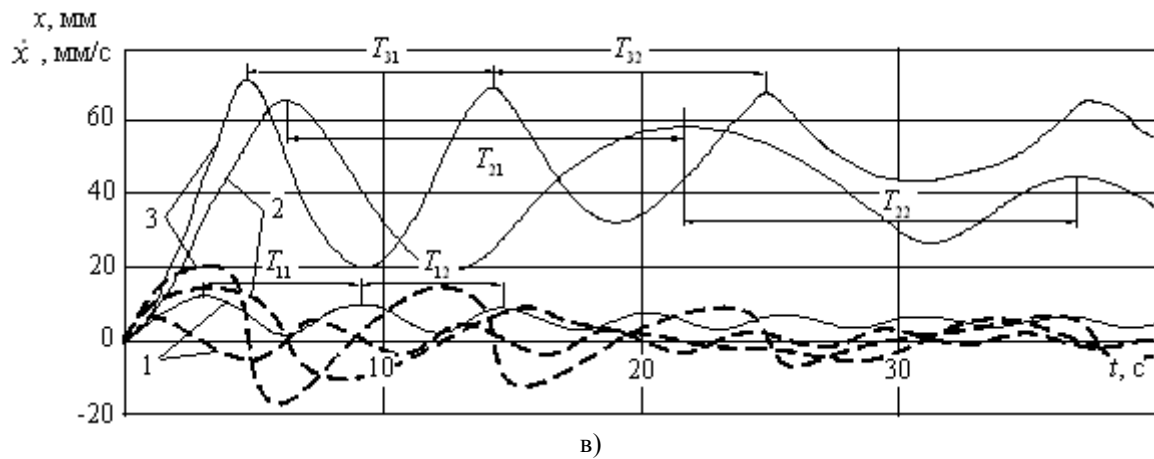


Рисунок 4– Графіки переміщень і швидкостей коливального процесу при гармонійному збурюванні: а) – система з лінійною характеристикою ВПС; б) – система з кубічно нелінійною характеристикою «жорсткого» типу; в) – система із двома комбінованими ділянками характеристики ВПС

Результати розв’язання рівняння (5) для системи з кубічно нелінійною характеристикою «жорсткої» нелінійності при значеннях параметрів  $m=1$  кг;  $a_3 = -0,0063$ ;  $a_2 = 0$ ;  $a_1 = 0,25$ ;  $\psi = 0,025$  (рис.4, б) показують, що виникаючі в системі коливальні процеси близькі за формою до гармонійних коливань, але мають змінний період  $T_{11} \neq T_{12}$ . Відповідно до характеристики ВПС такої системи, можна стверджувати, що зростання амплітуди коливань приводить до зниження зведеної жорсткості, що збільшує період  $T_{12} > T_{11}$ . При зростанні амплітуди таке збільшення свідчить про зменшення власної частоти коливань, що приводить до затягування резонансу в область низьких частот [2]. Також встановлено, що така система чутлива до зсуву центра коливань, що приводить до зменшення їхнього періоду  $T_{21} < T_{11}$ .

Результати розв’язання рівняння (5) для нелінійної системи із двома комбінованими ділянками при значеннях параметрів  $m = 1$  кг;  $a_5 = 1,29 \cdot 10^{-6}$ ;  $a_4 = 0,000215$ ;  $a_3 = -0,013$ ;  $a_2 = 0,344$ ;  $a_1 = 3,9$ . (рис.4, в) показують, що у системі можливі коливання як близькі до гармонійних, так і негармонійні. Система дуже чутлива до зсуву положення центра коливань. Так, при навантаженні  $P_1 = 12$  Н і гармонійному збурюванні коливання системи близькі до гармонійних, а період коливань зменшується ( $T_{11} > T_{12}$ ) зі зменшенням амплітуди. Це пов’язане з тим, що зсув центра коливань визначає діапазон переміщень у межах нелінійної ділянки  $OA$  характеристики ВПС (крива 3, рис.3). Ділянка відповідає кубічно нелінійній характеристиці ВПС «жорсткого» типу, де зменшення амплітуди коливань приводить до збільшення зведеної жорсткості. Зсув центра коливань при  $P_2 = 12$  Н визначає виникнення негармонійних коливань із змінним періодом  $T_{21} \neq T_{22}$ , що свідчить про нестабільність власної частоти системи. У цьому випадку діапазон переміщень відповідає ділянці  $BC$  характеристик ВПС (крива 3, рис.3). Зсув центра коливань при  $P_3 = 25$  Н приводить до виникнення близьких до гармонійних коливань із періодом, що збільшується ( $T_{11} < T_{12}$ ), як і у випадку коливань системи з кубічно нелінійною характеристикою ВПС «м’якого» типу (рис.4, б). Це пояснюється тим, що зсув центра коливань визначає діапазон переміщень у межах нелінійної ділянки  $DS$  характеристик ВПС (крива 3, рис.3).

На підставі проведених досліджень зроблені наступні висновки:

1. При гармонійному збурюванні механічних систем з кубічно нелінійними пружними характеристиками виникають близькі до гармонійного коливання зі змінним періодом. Період коливань для таких систем залежить від зсуву центра коливань щодо положення пружної рівноваги.
2. При гармонійному збурюванні механічної системи з нелінійною пружною характеристикою, яка має дві комбіновані ділянки, виникають близькі до гармонійних

і негармонійні коливання. Вид виникаючих коливань тісно пов'язаний зі зсувом центра коливань.

3. Виникнення негармонійних коливань у механічній системі при гармонійному збудуванні дозволяє висунути гіпотезу про зміну форми проходу резонансу такою системою і можливістю ефективного керування такими процесами при цільовому проектуванні ПВП з МЗЗ.

#### **Література**

1. Алабужев П.М. Виброзащитные системы с квазиулево́й жесткостью / П.М.Алабужев, А.А.Гритчин, И.И.Ким; Под ред. К.М. Рагульска. – Л.: Машиностроение, 1986. – 96 с.
2. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / С.П.Тимошенко, Д.Х.Янг, У.Уивер / Пер. с англ. Л.Г.Корнейчука. Под ред. Э.И.Григолока. – М.: Машиностроение, 1985. – 427с.
3. Сидоренко І.І. Віброізолюючий пристрій з коригувальною ланкою // Збірник наукових праць №12. – Одеса: ОІСВ, 2006. – С. 103-108.
4. Сидоренко И.И. Саморегулируемая упругая опора //Зб. наук. праць кораблебуд. ун-ту, №4(11). – Миколаїв: НУК, 2007. – С. 110-115.
5. Shampine L.F., Corless R.M. Initial Value Problems for ODEs in Problem Solving Environments // J.Comp. Appl. Math, 2000. – Vol. 125(1–2). – P. 31-40.
6. Нагулян Н.И. Применение динамических демпферов для снижения уровня вибрации оболочки, находящейся в температурном поле // Вісник Східноукраїнського національного університету, №8(66). – Луганськ, 2003. –С.126-129.

**Одержано 01.02.2008 р.**