

О.Цебрій

Тернопільський національний економічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА З ПОРОЖНИНОЮ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЮ ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

В роботі виводяться рівняння руху фізичного маятника в нерухомій системі координат на основі варіаційного принципу для повної енергії системи тіло-рідина. Для отриманої задачі застосовується варіаційний метод, який дозволяє визначити її розв'язки, шукаючи мінімум відповідного функціоналу. Мінімізацію реалізовано методом Рітца. Отримано власні значення задачі про коливання фізичного маятника зі сферичною та циліндричною порожниною, а також їх залежність від довжини маятника і рівня заповнення порожнини рідиною.

O.Tsebriy

INVESTIGATION OF THE SMALL FLUCTUATIONS OF PHYSICAL PENDULUM WITH THE CAVITY WHICH HAS BEEN FILLED IN BY THE IDEAL LIQUID

In this work the equation of movement has been built in immovable system of coordinates following a variation principle for full energy of physical pendulum. With the use of variation method the solution of the problem has been brought to the problems of minimization of corresponding functional operator. With the use of method of Ritz, eigenvalues of the problem of fluctuation of physical pendulum have been received for spherical and cylindrical cavity. As a result of investigation, it was discovered dependence solutions on lengths of pendulum and level of filling of a cavity a liquid.

Задачі динаміки твердого тіла з рідиною виникають при проектуванні та дослідженні динаміки об'єктів авіації та космічної техніки, які містять у собі обмежені об'єми рідини. Однією із класичних задач цього роду є задача про малі коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною. Методи розв'язування цієї задачі можна застосувати при розв'язуванні інших задач динаміки тіла з рідиною. Раніше ця задача розглядалась у роботах [1-4]. Рівняння руху маятника виводяться на основі варіаційного принципу, причому ці рівняння одержані в системі координат, яка жорстко зв'язана з твердим тілом. Для побудови розв'язків цих задач в роботах Мойсєєва Н.Н.[1] і Кононова Ю.Н.[2] використовувались розв'язки допоміжних задач визначення потенціалу Стокса-Жуковського та задачі про власні коливання рідини в нерухомій посудині. Такий підхід виявився ефективним тільки для задачі з циліндричними порожнинами, тобто у випадках, коли відомі точні аналітичні розв'язки цих допоміжних задач. В роботах автора і Барняка М.Я. шляхом переходу до рівнянь руху у нерухомій системі координат сформулювало варіаційний метод побудови розв'язків задачі без використання розв'язків допоміжних задач.

В даній роботі, виходячи з варіаційного принципу, виведено рівняння руху фізичного маятника в нерухомій системі координат і формулюється варіаційний метод побудови розв'язків задачі.

Постановка задачі. Розглянемо плоскі коливання маятника відносно нерухомої осі, яку позначимо Ox . Вісь Oz направимо вертикально вгору. Кінетична енергія системи тіло-рідина $T = T_1 + T_2$, де T_1 - кінетична енергія тіла, T_2 - кінетична енергія рідини.

Для тіла: $T_1 = \frac{J_0}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, де J_0 - момент інерції тіла відносно нерухомої осі, θ - кут відхилення маятника від вертикальної осі, t - час.

Для рідини: $T_2 = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 d\Omega$, де ρ - густина рідини, Ω - об'єм рідини,

$\varphi(x, y, z, t)$ - потенціал швидкостей частинок рідини.

Таким чином, кінетична енергія системи тіло-рідина

$$T = \frac{J_0}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 d\Omega.$$

Потенціальну енергію також розіб'ємо на дві складові $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, де Π_1 - потенціальна енергія твердого тіла, Π_2 - рідини. Для твердого тіла з точністю до величин другого порядку малості маємо

$$\Pi_1 = l_0 M_0 g \frac{\theta^2}{2}, \text{ тут } l_0 - \text{ віддаль від центра ваги твердого тіла до точки підвісу,}$$

M_0 - маса твердого тіла, g - прискорення сил земного тяжіння.

Потенціальна енергія рідини Π_2 зумовлена трьома складовими: приростом потенціальної енергії рідини при відхиленні маятника при збереженні горизонтального положення стану вільної поверхні, приростом потенціальної енергії рідини при відхиленні вільної поверхні від горизонтального положення і додаткового збурення вільної поверхні рідини.

Якщо відхилити маятник при фіксованій вільній поверхні («заморожена рідина»), то з точністю до другого порядку малості потенціальна енергія збільшиться на величину

$$\Pi_2^1 = \frac{\theta^2}{2} l_1 \rho g \Omega, \text{ де } l_1 - \text{ віддаль від центра ваги рідини до точки підвісу.}$$

Якщо після цього вільна поверхня рідини при фіксованому відхиленні маятника займе горизонтальне положення, то при цьому частинки вільної поверхні перемістяться на величину $-y\theta$ і потенціальна енергія зменшиться на величину

$$\Pi_2^2 = \frac{\theta^2}{2} \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS, \text{ тут } \Sigma - \text{ вільна поверхня рідини.}$$

Додаткове збурення N вільної поверхні рідини приведе до збільшення потенціальної енергії рідини на величину

$$\Pi_2^3 = \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 dS.$$

Таким чином сумарна потенціальна енергія системи тіло-рідина

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \Pi_2^1 + \Pi_2^2 + \Pi_2^3 = l_0 M_0 g \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} l_1 \rho g \Omega - \frac{\theta^2}{2} \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS + \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 dS = \\ &= D \frac{\theta^2}{2} + \frac{\rho g}{2} \int_{\Sigma} N^2 dS, \quad \text{де} \quad D = l_0 M_0 g + l_1 \rho g \Omega - \rho g \int_{\Sigma} y^2 dS. \end{aligned}$$

Тепер можемо записати лагранжіан

$$L = \int_0^{t_1} (T - \Pi) dt, \text{ де } t_1 - \text{ фіксований момент часу.}$$

Із умови $\delta L = 0$ виведемо рівняння руху:

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_0^{t_1} \left(J_0 \frac{d\theta}{dt} \delta \frac{d\theta}{dt} + \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi \delta \nabla \varphi d\Omega - D\theta \delta \theta - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS \right) dt = \\ &= \int_0^{t_1} \left(J_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \delta \theta \right) - J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta \theta - D\theta \delta \theta - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS + \right. \\ &\quad \left. \rho \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \varphi \delta \Delta \varphi \right) d\Omega \right) dt. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\Delta \varphi = 0$ і $\delta \theta = 0$ на кінцях інтервалу інтегрування, використовуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\delta L = \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{S+\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta \theta - D\theta \delta \theta - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS \right) dt.$$

Далі, оскільки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d\theta}{dt} \cdot f_S \text{ на } S, \quad (1)$$

де $f_S = (\vec{r} \times \vec{n}, i) = y \cos(\vec{n}, z) - z \cos(\vec{n}, y)$, \vec{r} - радіус-вектор точки, S - тверда стінка, то можемо записати

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{S+\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \right) dt &= \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial N}{\partial t} dS + \rho \int_S \varphi f_S \delta \frac{d\theta}{dt} dS \right) dt = \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \delta N) dS - \right. \\ &\quad \left. \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{S+\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \right) dt = \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{\Sigma} \varphi \delta \frac{\partial N}{\partial t} dS + \rho \int_S \varphi f_S \delta \frac{d\theta}{dt} dS \right) dt = \right. \\ &= \int_0^{t_1} \left(\rho \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \delta N) dS - \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta N dS + \rho \int_S f_S \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \delta \theta) dS - \rho \int_S f_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \theta dS \right) dt. \end{aligned}$$

Враховуючи, що δN і $\delta \theta$ рівні 0 на кінцях інтервалу, отримуємо

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_0^{t_1} \left(-\rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta N dS - \rho \int_S f_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \theta dS - J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta \theta - D\theta \delta \theta - \rho g \int_{\Sigma} N \delta N dS \right) dt = \\ &= \int_0^{t_1} \left(-\rho \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gN \right) \delta N dS - \left(J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D\theta + \rho \int_S f_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS \right) \delta \theta \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Оскільки δN і $\delta \theta$ незалежні і довільні, то отримуємо систему з двох рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gN = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

$$J_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D\theta + \rho \int_S f_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS. \quad (3)$$

Для задачі про власні коливання маятника запишемо

$$\theta = \cos \omega t \cdot \mu, \quad \varphi(x, y, z, t) = -\omega \sin \omega t \cdot \psi(x, y, z), \quad N = \cos \omega t \cdot h(x, y). \quad (4)$$

Тоді,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega^2 \cos \omega t \cdot \psi, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\omega \sin \omega t \cdot \mu, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t \cdot \mu. \quad (5)$$

Отже, з динамічних умов (2) і (3) отримуємо

$$-\omega^2\psi + gh = 0 \text{ на } \Sigma, \quad -J_0\omega^2\mu + D\mu - \rho\omega^2 \int_S \psi \cdot f_S dS = 0. \quad (6)$$

А з кінематичних умов (1):

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = h \text{ на } \Sigma, \quad \text{і } \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mu \cdot f_S \text{ на } S. \quad (7)$$

Далі нехай L - характерний розмір області Ω , тоді введемо безрозмірні величини:

$$\begin{aligned} x = \tilde{x} \cdot L, \quad y = \tilde{y} \cdot L, \quad z = \tilde{z} \cdot L, \quad \psi = \tilde{\psi} \cdot L^2 \quad \omega^2 = \frac{\lambda g}{L} \\ D = \rho g L^4 \cdot \tilde{D}, \quad J_0 = \rho L^5 \cdot \tilde{J}_0, \quad \vec{n} = \tilde{n} \cdot L, \quad f_S = \tilde{f}_S \cdot L. \end{aligned}$$

Тоді з (6) і (7) отримуємо рівняння руху і крайові умови у вигляді (позначення «~» опускаємо):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial n} = \lambda \cdot \psi \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mu \cdot f_S \text{ на } S, \quad \Delta\psi = 0 \text{ в } \Omega \\ -J_0\lambda\mu + D\mu - \lambda \int_S \psi \cdot f_S dS = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Така ж задача була отримана в роботах [3,4] із відповідної задачі в роботі [1] шляхом заміни шуканої функції. При цьому із рівнянь вдалося виключити потенціал Стокса-Жуковського.

Побудова розв'язків задачі. Задача (8) в роботі [4] зведена до наступного симетризованого вигляду

$$\Delta\psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \lambda \cdot \psi \text{ на } \Sigma, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = f_S \frac{\lambda}{D} \left(J_0\mu + \int_S \psi \cdot f_S dS \right) \text{ на } S, \quad \mu = \frac{\lambda}{D} \left(J_0\mu + \int_S \psi \cdot f_S dS \right).$$

Для побудови розв'язків цієї задачі застосовано варіаційний метод, згідно з яким визначення розв'язків задачі (9) зведено до мінімізації функціоналу

$$F(\psi, \mu) = \frac{\int_{\Omega} (\nabla\psi)^2 d\Omega + J_0\mu^2}{\int_{\Sigma} \psi^2 dS + \frac{1}{D} \left(J_0\mu + \int_S \psi \cdot f_S dS \right)^2}. \quad (10)$$

Мінімум цього функціоналу досягається на гармонійних функціях $\psi \in W_2^1(\Omega)$ та константах μ , що задовольняють задачу (9), а його значення дорівнює найменшому власному значенню задачі (9). Наступні власні значення задачі (9) знаходяться як мінімум функціоналу (10) на класі функцій $\psi \in W_2^1(\Omega) \cap L_2(\Sigma)$, що задовольняють наступну умову

$$\int_{\Sigma} \psi \psi_i dS + \frac{1}{D} \left(J_0\mu + \int_S \psi \cdot f_S dS \right) \left(J_0\mu + \int_S \psi \cdot f_S dS \right) = 0, \quad i = \overline{(1, n-1)}.$$

Функціонал (10) на класі гармонічних функцій, використовуючи формулу Гріна, можна записати в наступному вигляді:

$$F(\psi, \mu) = \frac{\int_{\Omega} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Omega + J_0 \mu^2}{\int_{\Sigma} \psi^2 dS + \frac{1}{D} \left(J_0 \mu + \int_S \psi \cdot f_S dS \right)^2}. \quad (11)$$

Далі будемо досліджувати тільки порожнини, які мають форму тіла обертання. Перейдемо до циліндричної системи координат

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta.$$

Початок координат зв'яжемо з рівноважним станом вільної поверхні ($z = \tilde{z} - l$, де l - відстань від вільної поверхні до точки підвісу). Тоді розв'язки задачі (9) шукатимемо у вигляді

$$\psi(z, r, \eta) = \psi(z, r) \cdot \sin \eta,$$

де функції $\psi(z, r)$ задовольняють рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \psi = 0. \quad (12)$$

Для мінімізації функціоналу (11) застосуємо методом Рітца.

В якості системи функцій, що задовольняють (12), виберемо систему многочленів, які знаходяться за наступною рекурентною формулою:

$$w_1 = r, \quad w_2 = zr, \quad w_{k+1} = \frac{(2k+1)zw_k - (k-1)(r^2 + z^2)w_{k-1}}{k+2}. \quad (13)$$

Згідно з методом Рітца, апроксимуємо шуканий розв'язок скінченною сумою:

$$\psi = \sum_{k=1}^N a_k w_k.$$

Позначимо $\theta = a_0$. Для визначення коефіцієнтів $a_k, k = \overline{1, N}$ і параметра λ одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^N a_k (\alpha_{ik} - \lambda \beta_{ik}) = 0,$$

де

$$\alpha_{00} = J_0, \quad \alpha_{0i} = 0, \quad \alpha_{ij} = \int_{S+\Sigma} w_i \cdot \frac{\partial w_j}{\partial n} dS, \quad \beta_{00} = \frac{J_0^2}{D}, \quad \beta_{0i} = \frac{J_0}{D} \int_S w_i \cdot f_S dS,$$

$$\beta_{ij} = \int_{\Sigma} w_i \cdot w_j dS + \frac{1}{D} \int_S w_i \cdot f_S dS \int_S w_j \cdot f_S dS.$$

Числовий аналіз. Проведено розрахунки власних значень для маятника з двома формами порожнини.

У випадку циліндричної форми: радіус порожнини $r = 0.1m$, висота порожнини $h_0 = 0.2m$. Тверде тіло має форму циліндра, стінки і дно якого мають однакову товщину. Маса тіла $M = 1kg$. Густина рідини $\rho = 1000 kg/m^3$.

Таблиця 1 - Наближені власні значення λ_0 (в припущенні, що рідина «замерзла») і перші чотири власні значення задачі (8), d_0 - відстань від точки підвісу до центра ваги твердого тіла, висота наповнення рідиною $h_1 = 0.15m$

d_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.000	0.0799	-0.4469	1.9800	5.3828	8.5624
0.002	0.1181	-0.3578	1.9655	5.3795	8.5608
0.004	0.1558	-0.2659	1.9510	5.3762	8.5593
0.006	0.1929	-0.1721	1.9366	5.3729	8.5577
0.008	0.2290	-0.0773	1.9223	5.3696	8.5561
0.010	0.2642	0.0178	1.9084	5.3663	8.5546
0.020	0.4211	0.4674	1.8491	5.3512	8.5473
0.030	0.5406	0.8084	1.8268	5.3399	8.5417
0.040	0.6220	0.9918	1.8663	5.3336	8.5383
0.050	0.6701	1.0409	1.9542	5.3315	8.5367
0.060	0.6925	1.0193	2.0497	5.3324	8.5363
0.070	0.6965	0.9704	2.1305	5.3350	8.5368
0.080	0.6882	0.9136	2.1932	5.3384	8.5377
0.090	0.6720	0.8568	2.2407	5.3421	8.5387
0.100	0.6512	0.8030	2.2766	5.3457	8.5398
0.200	0.4360	0.4661	2.3946	5.3688	8.5479
0.400	0.2399	0.2443	2.4195	5.3827	8.5535
0.600	0.1632	0.1646	2.4228	5.3873	8.5554
0.800	0.1234	0.1240	2.4237	5.3895	8.5564
1.000	0.0991	0.0994	2.4239	5.3908	8.5570
1.200	0.0828	0.0829	2.4239	5.3917	8.5574
1.400	0.0710	0.0711	2.4239	5.3923	8.5576
1.600	0.0622	0.0623	2.4239	5.3928	8.5579
1.800	0.0553	0.0554	2.4239	5.3932	8.5580
2.000	0.0498	0.0499	2.4238	5.3934	8.5581

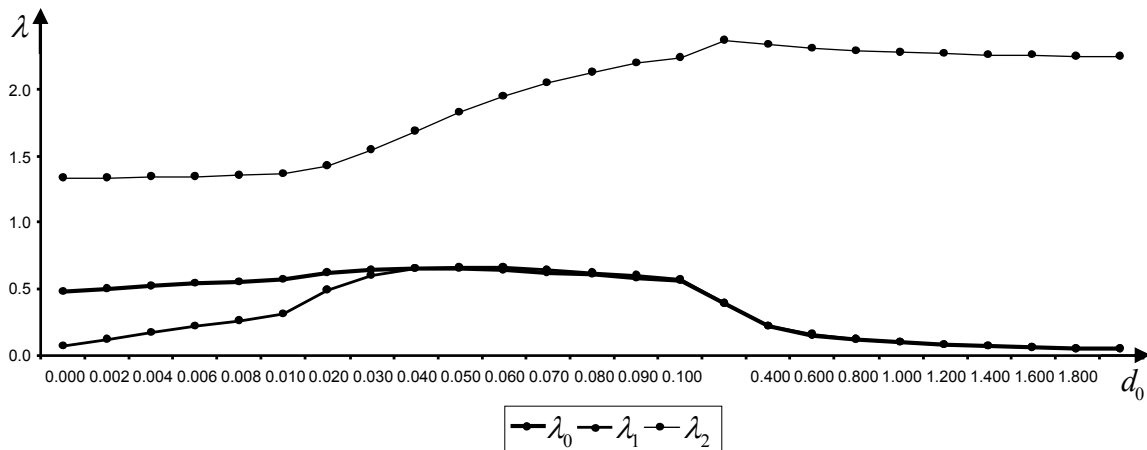


Рисунок 1 - Залежність власних значень $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ від довжини підвісу d_0 , висота наповнення рідиною $h_1 = 0.05m$

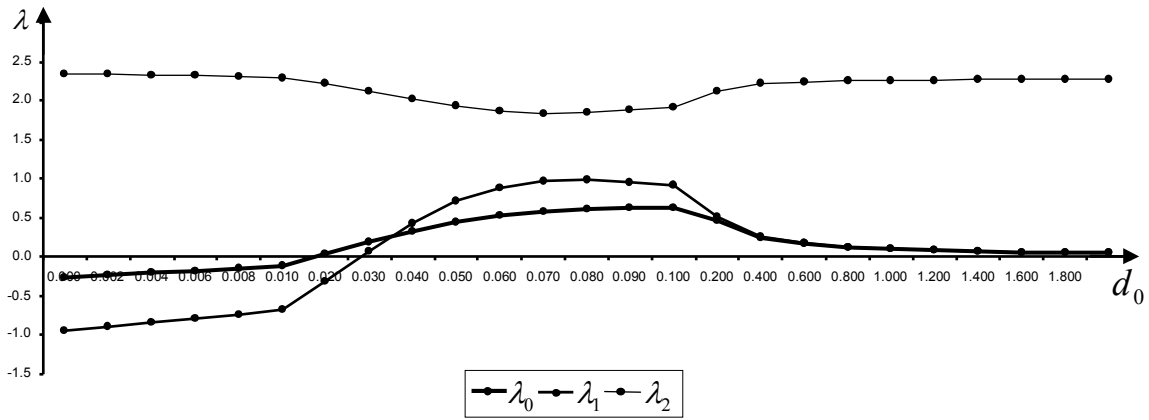


Рисунок 2 - Залежність власних значень $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ від довжини підвісу d_0 , висота наповнення рідиною $h_1 = 0.2m$

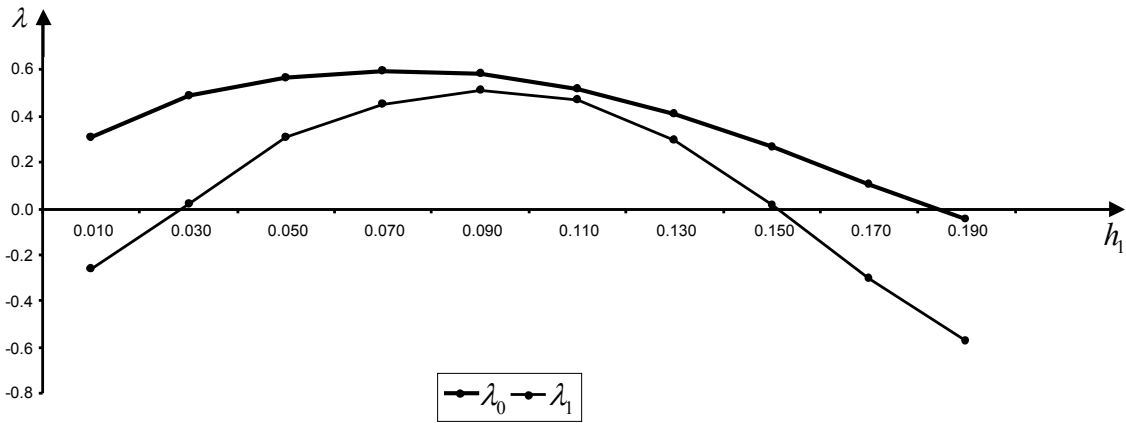


Рисунок 3 - Залежність власних значень $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ від висоти заповнення h_1 порожнини рідиною, довжина підвісу $d_0 = 0.01$

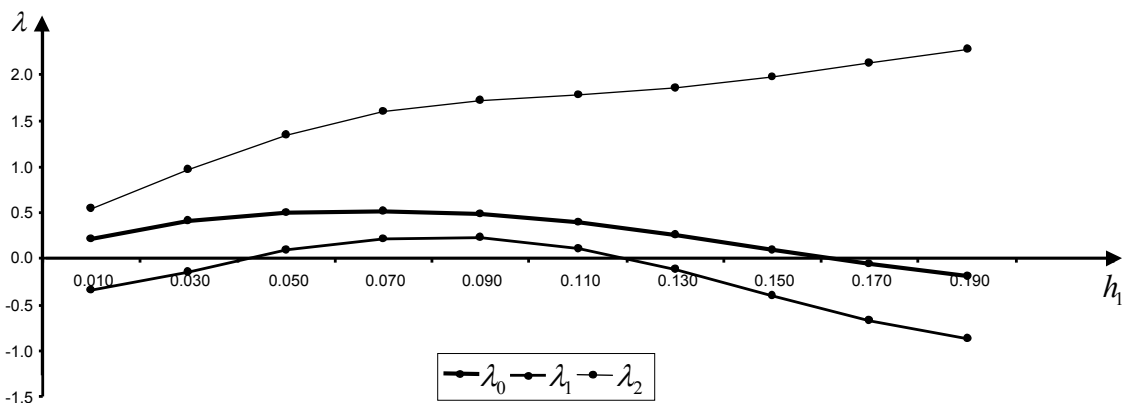


Рисунок 4 - Залежність власних значень $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ від висоти заповнення h_1 порожнини рідиною, довжина підвісу $d_0 = 0.001$

У випадку порожнини сферичної форми тверде тіло має форму сфери радіуса $r = 0.1m$, зі сталою товщиною поверхні, маса якого $M = 1kg$. Густина рідини $\rho = 1000 kg/m^3$.

Таблиця 2 - Наближені власні значення λ_0 (в припущенні, що рідина «замерзла») і перші чотири власні значення задачі (8), d_0 - віддаль від точки підвісу до центра ваги твердого тіла, висота наповнення рідиною $h_1 = 0.1m$.

d_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.000	0.5210	0.0000	1.5602	5.2764	9.1100
0.002	0.5501	0.0927	1.5614	5.2765	9.1100
0.004	0.5771	0.1842	1.5653	5.2768	9.1102
0.006	0.6020	0.2735	1.5724	5.2773	9.1105
0.008	0.6249	0.3594	1.5834	5.2781	9.1110
0.010	0.6457	0.4405	1.5987	5.2790	9.1116
0.020	0.7218	0.7415	1.7545	5.2871	9.1162
0.030	0.7592	0.8596	2.0127	5.3001	9.1230
0.040	0.7690	0.8766	2.2704	5.3161	9.1310
0.050	0.7607	0.8548	2.4727	5.3327	9.1389
0.060	0.7413	0.8192	2.6153	5.3481	9.1460
0.070	0.7158	0.7792	2.7101	5.3612	9.1521
0.080	0.6873	0.7389	2.7705	5.3719	9.1571
0.090	0.6578	0.7001	2.8072	5.3803	9.1611
0.100	0.6285	0.6634	2.8282	5.3867	9.1644
0.200	0.4096	0.4173	2.7954	5.4051	9.1760
0.400	0.2297	0.2310	2.6932	5.4033	9.1777
0.600	0.1582	0.1586	2.6487	5.4009	9.1775
0.800	0.1204	0.1206	2.6251	5.3994	9.1773
1.000	0.0971	0.0972	2.6105	5.3985	9.1771
1.200	0.0814	0.0814	2.6007	5.3978	9.1769
1.400	0.0700	0.0700	2.5935	5.3973	9.1768
1.600	0.0614	0.0615	2.5882	5.3969	9.1767
1.800	0.0547	0.0547	2.5840	5.3966	9.1766
2.00000	0.0493	0.0493	2.5806	5.3964	9.1765

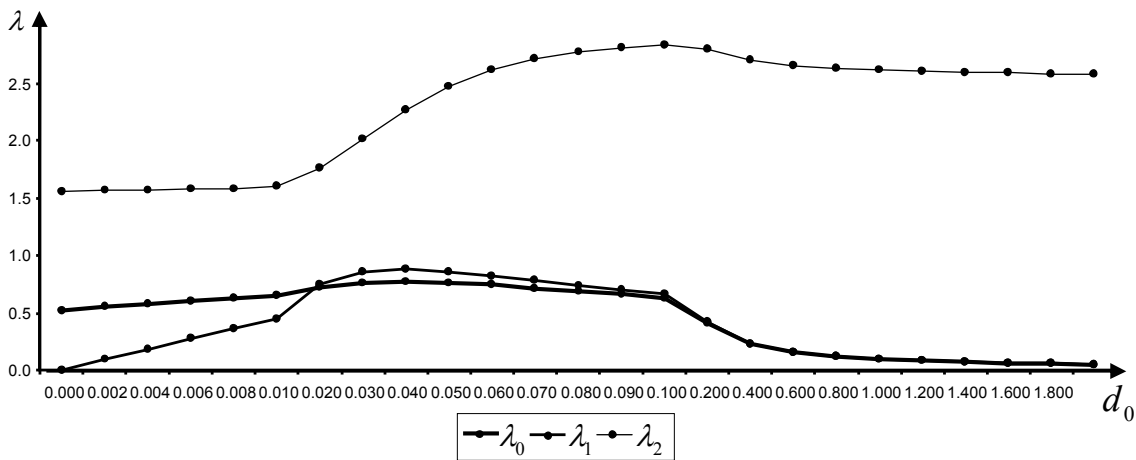


Рисунок 5 - Залежність власних значень $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ від довжини підвісу d_0 , висота наповнення рідиною $h_1 = 0.1m$

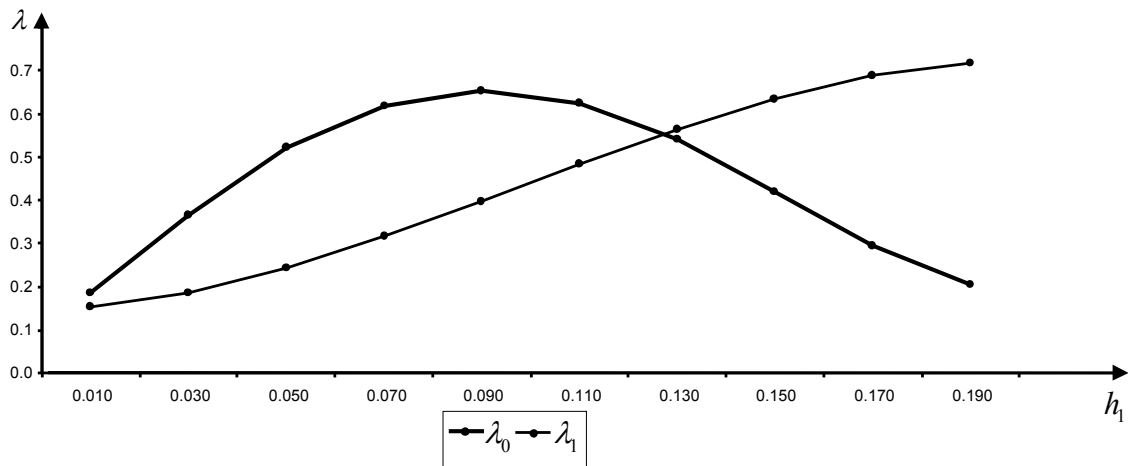


Рисунок 6 – Залежність власних значень λ_0, λ_1 від висоти h_1 заповнення порожнини рідиною, довжина підвісу $d_0 = 0.01$

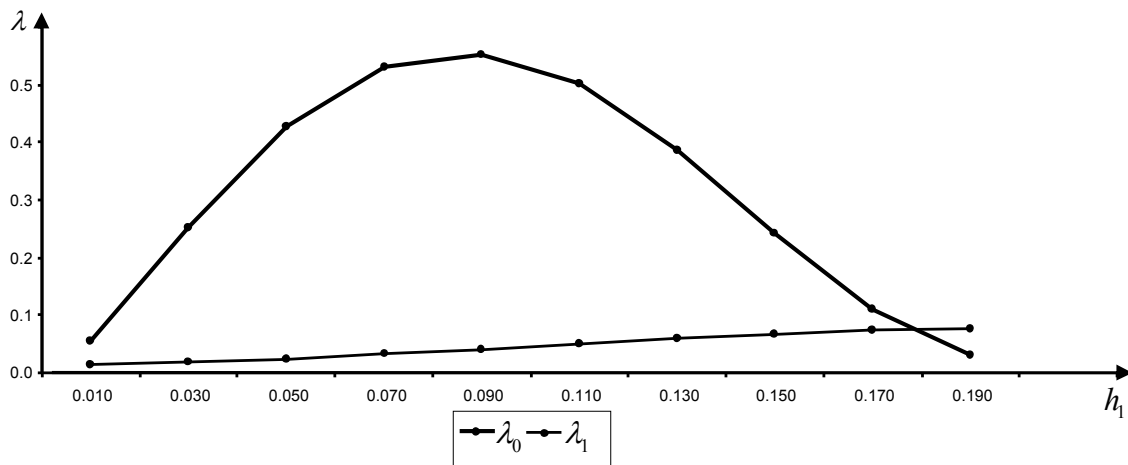


Рисунок 7 – Залежність власних значень λ_0, λ_1 від висоти h_1 заповнення порожнини рідиною, довжина підвісу $d_0 = 0.001$

Висновки. Як видно з вище наведених результатів, при малій відстані d_0 від центра ваги твердого тіла до точки підвісу перше власне значення λ_1 суттєво відрізняються від значення λ_0 («замерзла» рідина), що вказує на вплив рідини на частоту коливань системи тіло-рідина, і хоч лінія підвісу знаходиться вище центра ваги маятника, λ_1 може приймати від'ємні значення (таблиця 1, рисунок 3,6,7), а це означає, що рідина додає нестійкості системи. При збільшенні відстані d_0 перше власне значення λ_1 прямує до λ_0 .

Література

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Изд-во Наука, 1965. - 440с.
2. Кононов Ю.Н. Задача о физическом маятнике, содержащим статифицированную жидкость // Механика твердого тела.-1999. - Вып.28. – С.145-153.
3. Барняк М.Я., Цебрій О.Р. Вариацийний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2005. - Т.2, №1. – С.100-110.
4. Барняк М.Я., Цебрій О.Р. Власні коливання фізичного маятника з осесиметричною порожниною, заповненою рідиною // Збірник праць Інституту математики НАНУ. - 2006. - Т.2, №4.- С.1-11.

Одержано 03.12.2007 р.