

УДК 537.8, 539.3

О. Король, Б. Береженко, О. Гурик к.т.н., доцент

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОСТИГАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ДЕТАЛІ ПІСЛЯ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ

О. Korol, B. Berezhenko, O. Huryk, Ph.D., Assoc. Prof.

### DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR CYLINDER PART INDUCTION HEATING

Розроблено математичну модель остигання по всій робочій поверхні деталі циліндричної форми, після заливання розплавленого металу в технологічний тигель. Охолодження буде проходити від 1600°C до 20°C. Причому при 1450°C – 1600°C як залитий рідкий метал, так і підготовлений на границі між ними основний метал будуть в рідкому стані та в сумі рідкого металу й аустеніту, тобто будуть створені умови для їх взаємного перемішування та дифузії, що сприятиме їх дійсному з'єднанню.

За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності температури від частоти і сили струму в індукторі та тривалості нагрівання. Розроблені основи індукційного нагрівання та наплавлення деталей циліндричної форми невеликих діаметрів, які дозволяють проектувати нагрівальні системи індуктор-магнітопровід з урахуванням їх електрофізичних, енергетичних та геометричних параметрів. Отримані теоретичні і експериментальні результати дослідження нагрівальної системи (індуктор, магнітопровід) підтвердили обґрунтованість застосування вибраної методики з достатньою для інженерних розрахунків і практичних цілей точністю в межах 3-4 %.

Після досягнення необхідної температури наплавлення джерело нагрівання вимикають і деталь циліндричної форми (колесо) вільно остигає. На циліндр невеликої товщини в цьому випадку діє тільки тепловий екран.

Рівняння вільного остигання циліндричної деталі має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - m^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Внаслідок того, що температура повинна бути симетричною відносно центру деталі, можемо записати таку умову:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0; \text{ при } r=0.$$

На краю циліндричної деталі, де маємо теплове екранування, гранична умова матиме вигляд

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + K_T \alpha T = 0, \quad (2)$$

де  $K_T = \frac{\lambda_T}{d_T \alpha}$ .

Будемо шукати розв'язок рівняння (1) у формі

$$T = C J_0(\nu r) e^{-a\lambda^2 t}. \quad (3)$$

Підставивши вираз (3) в граничну умову (2), одержимо:

$$C\nu[-J_1(\nu r_2)]e^{-a\lambda^2 t} + K_T\alpha CJ_0(\nu r_2)e^{-a\lambda^2 t} = 0.$$

Звідси після розділення на  $C \cdot e^{-a\lambda^2 t}$  одержимо рівняння для визначення  $\nu$ :

$$-\nu J_1(\nu r_2) + K_T\alpha J_0(\nu r_2) = 0. \quad (4)$$

Оскільки коренів цього рівняння – нескінченна кількість, то розв'язок (3) набуде вигляду

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\nu_j r) \cdot e^{-a\lambda_j^2 t}. \quad (5)$$

Для знаходження коефіцієнтів  $C_j$  використаємо умову, що в момент початку остигання  $t = \tau$  температура рівна  $T_\tau(r)$  – кінцевій температурі наплавлення.

Тобто  $T = T_\tau(r)$  при  $t = \tau$  (6). Помноживши вираз для температури (5) при  $t = \tau$  на  $J_0(\nu_j r)$  і проінтегрувавши його в границях від 0 до  $r_2$ , будемо мати формулу

$$\int_0^{r_2} T_\tau J_0(\nu_j r) r dr = C_j e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr,$$

яка при  $t = \tau$  набуде вигляду

$$\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0(\nu_j r) r dr = C_j e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr.$$

З цієї формули знаходимо

$$C_j = \frac{\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0(\nu_j r) r dr}{e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr}. \quad (7)$$

Підставляючи коефіцієнти  $C_j$ , знайдені по формулі (7), у вираз для визначення температури (5), одержимо кінцеву формулу для знаходження температури остигання деталі циліндричної форми:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0(\nu_j r) r dr}{\int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr} J_0(\nu_j r) \cdot e^{a\lambda_j^2 (\tau-t)}, \quad (8)$$

в якій корені  $\nu_j$  визначаються з рівняння (4).

З цієї формули також видно, що кінцева температура нагрівання однозначно визначає температуру остигання.