УДК 539.3

Г.В. Габрусєв, к.фіз.-мат. н., доц., Б.Г. Шелестовський, к.фіз.-мат.н., доц., О.І. Панчук
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШТАМПА ТА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

H.V. Habrusiev, Ph.D., Assoc. Prof; B.H. Shelestovskii, Ph.D., Assoc. Prof; O.I. Panchuk

CONTACT INTERACTION OF PUNCH WHITH PRESTRESED HALF-PLANE

Дослідження контактної взаємодії жорстких штампів із пружною плитою є важливим завданням у проектуванні. А саме, при оцінці міцності залізобетонних перекриттів, монолітних фундаментних плит у будівництві, дорожнього покриття тощо. Щоб мінімізувати похибку розрахунків, необхідно враховувати максимальну кількість чинників, що впливають на контактну взаємодію, зокрема – початкові деформації.

Нехай в пружну півплощину з початковими напруженнями вдавлюється жорсткий штамп у вигляді криволінійної трапеції (рис.1). Навантаження, головний вектор якого позначимо через P, прикладене до верхньої сторони штампа так, що півплощина під штампом деформується в напрямку протилежному осі Oy_2 на величину ε. Будемо вважати, що в початковому стані для півплощини існує випадок плоскої деформації, тобто $\lambda_1 \equiv 1$ і виконується умова $S_{22}^0 = 0$.

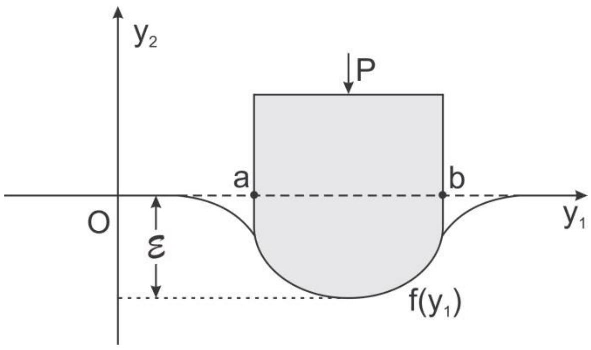

Рис.1. Схема контактної взаємодії

Граничні умови поставленої задачі мають вигляд

$Q_{22}(y_1,0)=0, y_1 \notin [a,b];$ (1)

$Q_{21}(y_1,0)=0, y_1 \notin [a,b];$ ' (2)

$u_2(y_1,0)= f(y_1)+\varepsilon;\ y_1 \in [a,b];$ (3)

$Q_{21}(y_1,0)=0;\ y_1 \in [a;b].$ (4)

Функція $f(y_1)$ описує переміщення точок пружної півплощини на ділянці її контракту з жорстким штампом.

Введемо нові аналітичні функції $\omega_1(z)$ і $\omega_2(z)$ комплексної змінної $z=y_1+iy_2$ у вигляді інтегралів Коші:

$$\omega_1(z)=U_1-iV_1=\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{22}(t,0)\frac{dt}{t-y_1};\quad \omega_2(z)=U_2-iV_2=\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{21}(t,0)\frac{dt}{t-y_1}.$$

Застосовуючи до останнього співвідношення формулу Сохоцького-Племеля при $z \to y_1 - i0$, отримаємо співвідношення

$$U_1-iV_1=-i\pi Q_{22}(y_1,0)+\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{22}(t,0)\frac{dt}{t-y_1};\quad U_2-iV_2=-i\pi Q_{21}(y_1,0)+\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{21}(t,0)\frac{dt}{t-y_1}.$$

Звідки отримуємо:

$$V_1=\pi Q_{22}(y_1,0);\ V_2=\pi Q_{21}(y_1,0);\ U_1=\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{22}(t,0)\frac{dt}{t-y_1};\ U_2=\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{21}(t,0)\frac{dt}{t-y_1}. \quad (5)$$

Граничну умову (3) запишемо у вигляді $\dfrac{\partial u_2}{\partial y_1}=\dfrac{\partial f}{\partial y_1};\ y_1 \in [a,b].$

Застосувавши вираз для $\frac{\partial u_2}{\partial y_1}$ лінеаризованої теорії пружності [1]

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_1} = B_4^{(2)} Q_{21}(y_1,0) + A_3^{(2)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{22}(t,0) \frac{dt}{t-y_1},$$

де $A_3^{(2)}$ та $B_4^{(2)}$ коефіцієнти, що залежать від поля початкових деформацій, а також співвідношення (5), граничні умови задачі (1) – (4) запишемо у вигляді

$$V_1 = 0,\ y_1 \notin [a,b];\ V_2 = 0,\ y_1 \notin [a,b];\ \frac{B_4^{(2)}}{\pi} V_2 + \frac{A_3^{(2)}}{\pi} U_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, y_1 \in [a,b];\ V_2 = 0;\ y_1 \in [a;b].$$

Таким чином, V_2 – уявна частина функції $\omega_2(z)$ рівна нулю на всій осі Oy_1. Оскільки ця функція регулярна в нижній півплощині і веде себе на нескінченності як cz^{-1}, то з вказаної вище умови випливає, що вона повинна дорівнювати нулю всюди в півплощині. Отже, $\omega_2(z) = 0$, а для визначення $\omega_1(z)$ матимемо умови

$$V_1 = 0,\ y_1 \notin [a,b];\ U_1 = \frac{\pi}{A_3^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial y_1}; y_1 \in [a,b].$$

Таким чином, для визначення $\omega_1(z)$ отримуємо частковий і при цьому найбільш простий випадок задачі Рімана-Гібльберта з розривними коефіцієнтами [2].

Функція $\omega_1(z)$ задовольняє граничну умову на осі Oy_1

$$a(y_1)U_1 + b(y_1)V_1 = F(y_1). \quad (6)$$

При чому при $y_1 \notin [a,b]$ маємо $a(y_1) = 1$, $b(y_1) = 0$, при $y_1 \in [a,b]$ – $a(y_1) = 0$, $b(y_1) = 1$, а права частина (6) визначена таким чином: $F(x) = 0, y_1 \notin [a,b]$; $F(x) = \frac{\pi}{A_3^{(2)}} \frac{\partial f}{\partial y_1}, y_1 \in [a,b]$.

Розв’язок поставленої задачі Рімана-Гільберта [2] матиме вигляд

$$\omega_1(z) = \frac{1}{A_2^{(3)}} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_1} \sqrt{(t-a)(b-t)} \frac{dt}{t-z} + \frac{C}{\sqrt{(a-z)(b-z)}}.$$

Для визначення контактних напружень переходимо в останньому співвідношенні до границі при $z \to y_1 - i0$ та відділяємо уявну частину:

$$Q_{22}(y_1,0) = \frac{1}{A_2^{(3)}} \frac{1}{\sqrt{(y_1-a)(b-y_1)}} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_1} \sqrt{(t-a)(b-t)} \frac{dt}{t-y_1} + \frac{C}{\sqrt{(y_1-a)(b-y_1)}}. \quad (7)$$

Константа C визначається з умови рівноваги штампа, тобто $P = \int_a^b Q_{22}(y_1,0)\,dy_1$.

Співвідношення (7) визначає розподіл контактних напружень під штампом довільної конфігурації. Так у випадку його прямолінійної основи матимемо:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,\ Q_{22}(y_1,0) = \frac{C}{\sqrt{(y_1-a)(b-y_1)}},\ P = \int_{-l}^{l} \frac{C}{\sqrt{(y_1-a)(b-y_1)}} dy_1,\ C = \frac{P}{\pi}.$$

Література.

1. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А. Н. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
2. Шелестовський Б. Г. Задача Рімана-Гільберта для півплощини / Б. Г. Шелестовський, О. І. Панчук // Матеріали XX наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, 17-18 травня 2017 року. — Т. : ТНТУ, 2017. — С. 179–181.