УДК 539.375
Наталія Блащак, Надія Крива
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ АНТИПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ОДНОБІЧНО ВІДШАРОВАНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Nataliya Blashchak, Nadiya Kryva

THE ANALYTICAL SOLUTION OF ELASTIC ANTIPLANE PROBLEM FOR A HALF SPACE WITH ONE-SIDED EXFOLIATING INCLUSION

Теорія напружено-деформівного стаціонарного стану (НДС) тіл з концентраторами напружень у фізично і геометрично лінійній постановці, можна сказати, є завершеною. Розроблено методи визначення НДС із довільною наперед заданою точністю у неоднорідних та кусково-однорідних тілах практично без обмежень на форму тіла та спосіб навантаження [1]. Проте залишаються актуальними аналітичні розв'язки таких задач, які можуть слугувати тестовими для порівняння та аналізу чисельних методів, а також можуть бути використані для дослідження квазістатичного розвитку пластичних зон в околі концентраторів напружень початкової стадії.

Тут дослідимо пружний антиплоский (НДС) півпростору

$$x > 0, -\infty < y < +\infty\ ,\ -\infty < z < +\infty$$

із прямолінійним включенням нульової товщини $x = a$, $|y| < b$, $-\infty < z < +\infty$ під впливом діючого на нескінченності навантаження $\tau_{yz} = \tau_\infty, \tau_{xz} = 0$. Тут a - відстань між включенням і межею півпростору, b - висота включення. Грань включення $x = a - 0$ вважатимемо вільною від контакту із середовищем, а $x = a + 0$ такою, що перебуває з ним у ідеальному зв'язку.

Для визначення НДС приходимо в області D (перший квадрант комплексної площини $\zeta = x + iy$, розрізаний вздовж відрізка $x = a, 0 \le y \le b$) до такої крайової відносно аналітичної в D функції $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = iy, 0 < y < +\infty); \quad \operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = x, 0 < x < a);\\
&\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = a - 0, 0 < y < b); \ \operatorname{Re}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = a + 0, 0 < y < b); \qquad (1)\\
&\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = x, a < x < +\infty); \quad \lim_{\zeta\to\infty}\tau(\zeta) = \tau_\infty.
\end{aligned}$$

Функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає область D на область G (перший квадрант) комплексної площини τ, забезпечуючи таку відповідність їх границь: $\{\zeta = iy, 0 < y < +\infty\} \cup \{\zeta = x, 0 < x < a\} \cup \{\zeta = a - 0, 0 < y < b\} \leftrightarrow$ $\{\operatorname{Im}\tau = 0, \tau_\infty < \operatorname{Re}\tau < +\infty\}$; $\{\zeta = a + 0, 0 < y < b\} \leftrightarrow \{\operatorname{Re}\tau = 0, 0 < \operatorname{Im}\tau < +\infty\}$; $\{\zeta = x, a < x < +\infty\} \leftrightarrow \{\operatorname{Im}\tau = 0, 0 < \operatorname{Re}\tau < \tau_\infty\}$.

Оскільки конформний образ області D відомий, і області D та G є прямолінійними многокутниками, розв'язання задачі (1) звелося до побудови вказаного відображення, яке можна зреалізувати за допомогою перетворення Шварца-Крістоффеля:

$$\begin{cases} \zeta(t) = a + ib + \dfrac{a}{\left(\int\limits_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta\right)} \int\limits_0^t \dfrac{\eta d\eta}{\sqrt{(\eta - t_B)(\eta - t_C)(\eta - 1)}}, \\ \tau = \tau_0 \sqrt{\dfrac{t-1}{t}}, \quad \operatorname{Im} t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

де $A = a\left(\int\limits_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta\right)$, $F(\eta) = \left|\eta((\eta - t_B)(\eta - t_C)(\eta - 1))^{-1/2}\right|$.

Під $\sqrt{\eta + p}$ (p – дійсне число) розуміємо аналітичну у верхній півплощині функцію, що набуває дійсних додатних значень, коли η – дійсне і більше за –р.

Параметри t_C, t_B визначаються як розв’язки системи рівнянь

$$\begin{cases} b\int\limits_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta = a\int\limits_{t_C}^{0} F(\eta)d\eta, \\ \int\limits_{t_C}^{0} F(\eta)d\eta = a\int\limits_{0}^{1} F(\eta)d\eta. \end{cases}$$

Дослідимо асимптотику поля напружень у вершині включення. В околі точки $\zeta = a + ib$ із рівностей (2) отримуємо

$$\tau(t) = \tau_\infty t^{-1/2} + o(t^{-1/2}),$$

$$\zeta(t) = a + ib + \frac{a}{2\int\limits_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta} \frac{t^2}{\sqrt{t_C t_B}} + o(t^2)$$

І, отже, $\tau = \dfrac{K}{\sqrt[4]{\zeta - a - ib}} + o(\zeta - a - ib)^{-1/4}$, $K = \dfrac{\tau_\infty \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{2\sqrt{t_C t_B}\int\limits_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta}}$.

Поле пружних напружень в околі вершин включення за умови його однобічного контакту з середовищем сингулярне з показником ¼, тоді як показник сингулярності поля такого ж включення, що перебуває у ідеальному зв’язку з середовищем, рівний ½ [2].

1. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. Пер. з нім. під ред. Е. І. Григолюка, – М.: Мир, 1988. –344 с.
2. Панасюк В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / В.В. Панасюк, М.М. Стадник, В.П. Силованюк. - К. : Наукова думка, 1986. – 216 с.