УДК 536.2

Курило Д. – ст.гр. ММ – 11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ В СЕРЕДОВИЩІ БЕЗ ОПОРУ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Kurylo.D.
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION OF THE ROD OSCILLATION IN RESISTANCE-LESS MEDIUM

Supervisor: Shelestovsky B.

Ключові слова: стержень, крайова задача.
Key words: rod, boundary value problem

Крайова задача коливань стержня $0 \le x \le l$, якщо кінець $x = 0$ стержня закріплений жорстко, а до кінця $x = l$ прикладена сила $F(t) = A\sin\omega t, 0 < t < \infty$, записується так:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \; 0 < x < l, \; 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \; u_x = (l,t) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}S}\sin\omega t, \; 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Розв'язок задачі (1), (2), (3) шукаємо методом Фур'є

а) при $\omega \ne \frac{(2n+1)\pi a}{2l}$, $n = 0,1,2,3,\ldots,$

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \; V_{tt} = a^2 V_{xx},$$

$$V(x,t) = V_1(x)\cdot V_2(t); \quad \frac{V_2''(t)}{a^2 V_2(t)} = \frac{V_1''(x)}{V_1(x)} = -\lambda^2,$$

$$V_1(x) = L\cos\lambda x + p\cdot\sin\lambda x,$$

$$V_2(t) = M\cos\lambda at + N\sin\lambda at.$$

З (2) випливає $L = 0,$ а із $(3) - M = 0.$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\lambda_n x \cdot \sin\lambda at.$$

Частинний розв'язок $U(x,t)$ беремо у вигляді:

$$U(x,t) = C\,\sin\frac{\omega}{a}x\cdot\sin\omega t\,,$$

$$u(x,t) = C\sin\frac{\omega}{a}x\cdot\sin\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\lambda_n\; x\cdot\sin\lambda_n\, at\,.$$

Задовольняємо умови (2) і (3):

$$C\cdot\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}l\cdot\sin\omega t + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n b_n\cos\lambda_n l\sin\lambda_n at = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}S}\sin\omega t\,,$$

$$c\omega\sin\frac{\omega}{a}x + \sum_{n=6}^{\infty} a\lambda_n b_n\,\sin\lambda_n x = 0\,.$$

Покладемо: $\cos\lambda_n l = 0 \quad \lambda_n = \dfrac{\pi(2n+1)}{2l}$; $\quad C = \dfrac{\mathrm{A}\cdot a}{\omega\mathrm{E}S\cdot\cos\dfrac{\omega}{a}l}$.

Отже, розв’язок задачі має вигляд:

$$u(x,t) = U(x,t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\,,$$

де

$$U(x,t) = \frac{a\mathrm{A}}{\mathrm{E}S\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t\,,$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^l U_t(z,0)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}dz\,.$$

б) при $\omega = \dfrac{(2n_0+1)\pi a}{2l}$

$$u(x,t) = U(x,t) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq n_0}}^{+\infty} b_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\,,$$

де

$$U(x,t) =$$
$$= -\left\{\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{E}S\omega}\int_0^x\left(z - \mathrm{A}^*_{n_0}\sin\frac{(2n_0+1)\pi z}{2l}\right)\sin\frac{(2n_0+1)\pi(x-z)}{2l}dz\right\}\sin\omega t -$$
$$-\frac{\mathrm{A}\mathrm{A}^*_{n_0}}{2ES}t\cos\omega t\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,,$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^l U_t(z,0)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}dz\,, \qquad \mathrm{A}^*_{n_0} = \int_0^l z\sin\frac{(2n_0+1)\pi z}{2l}dz\,.$$