

Секція:

Математика

УДК 517.3

Биків Д. - ст. гр. МБ-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Самборська О.М.

Вуків Д.

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

IMPROPER INTEGRALS DEPENDINQ ON A PARAMETER

Supervisor: Samborska O.

Ключові слова: невластний інтеграл, параметр

Keywords: improper integral, parameter

Розглянемо невластний інтеграл $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx$, в якому підінтегральна функція залежить від деякого параметра λ .

При виконанні певних умов для цього інтеграла справджуються формули:

$$I'(\lambda) = \int_a^{+\infty} f'_\lambda(x, \lambda) dx \quad (1)$$

$$\int_c^d I(\lambda) d\lambda = \int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, \lambda) dx \right) d\lambda = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, \lambda) d\lambda \right) dx \quad (2)$$

Формули (1) та (2) використовують для обчислення інтегралів.

Обчислити інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}(1 - \cos x)}{x} dx$.

Введемо параметр $\lambda \geq 0$.

$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}(1 - \cos \lambda x)}{x} dx$. Застосуємо формулу(1).

$$I'(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin \lambda x dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}; \quad I(\lambda) = \int \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(\lambda^2 + 1) + c.$$

Оскільки $I(0) = 0$, то $C = 0$. Отже, заданий інтеграл $I = \frac{1}{2} \ln 2$.

Обчислити інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, ($a, b > 0$). Розглянемо невластний інтеграл

$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$. При $\lambda > 0$ він збігається рівномірно і дорівнює $\frac{1}{\lambda}$. Проінтегруємо

рівність $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ по λ від a до b . $\int_a^b \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) d\lambda = \int_a^b \frac{1}{\lambda} d\lambda = \ln \frac{b}{a}$.

Застосувавши формулу (2), отримаємо $I = \ln \frac{b}{a}$.