УДК 621.391:519.22

Роман Юзефович [1], к.т.н., доц.; Ігор Яворський [1, 2], д.ф.-м.н., проф.; Іван Мацько [1], к.т.н.; Оксана Дзерин, магістр

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

[2] Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІЩЕННЯ ОЦІНКИВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНОЇ ГУСТИНИПРИ КОГЕРЕНТНОМУ СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

.Показано, що когерентна оцінка взаємоспектральної густини є зміщеною. Встановлено, що коли точка усічення корелограми є набагато меншою від значення періоду, то величини зміщень будуть достатньо малими. Однак, при зменшенні точки усічення буде розширятися пік спектрального вікна, що збільшує похибку оцінювання.

Ключові слова: періодично корельований випадковий процес, вібраційний сигнал, взаємна спектральна густина, когерентний аналіз, зміщення оцінки, корелограма.

Roman Yuzefovych[1], Igor Javorskyj[1,2], Ivan Matsko[1], Oksana Dzeryn

[1]Karpenko Physico-mechanical institute NAS Ukraine, Lviv, Ukraine

[2]University of Science and Technology Institute of Telecommunication, Bydgoszcz, Poland

INVESTIGATION OF THE BIAS OF THE CROSS-SPECTRAL DENSITY ESTIMATOR FOR THE COHERENT SPECTRAL ANALYSIS OF VIBRATION SIGNALS

It is shown that coherent estimator of cross-spectral density is biased. It is established that in the case when point of correlogram cutoff is significantly less than the period, the values of the biases are quite small. However, decreasing point of correlogram cutoff leads to expanse of spectral windows peak and to increasing of the estimation error.

Key words: periodically correlated random proces, vibration signal, cross-spectral density, coherent analysis, estimator bias, correlogram.

У процесі виявлення та встановленні характеру дефектів обертових механізмів спектральний аналіз вібраційних сигналів відіграє важливу роль [1–4]. Поява дефектів приводить до суттєвих змін властивостей сигналу у спектральній області, а саме до корельованості відповідних гармонічних складових [1, 3]. Ступінь та характер такої корельованості описується спектральними характеристиками періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Взаємоспектральний аналіз сигналів, відібраних у різних точках механічної системи, дає змогу досліджувати залежності між гармонічними складовими вібрацій і завдяки цьому більш успішно розв’язувати задачі локалізації та типізації дефектів [5]. Для оцінювання взаємоспектральних характеристик за експериментальними даними можуть бути використані як періодограмний, так і корельограмний методи [1]. За останнім оцінки взаємоспектральних характеристик знаходяться на основі інтегральних перетворень Фур’є згладжених оцінок взаємо-спектральних характеристик. Для оцінки взаємоспектральної густини тоді маємо:

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)k(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u, \qquad (1)$$

де $k(u)$ – функція вікна: $k(-u)=k(u)$, $k(0)=1$, $k(u)=0$ при $|u|>u_m$, u_m – точка усічення корелограми. Для знаходження оцінки взаємокореляційної функції $\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)$ можуть бути використані як когерентний, так і компонентний методи. Вибір того чи іншого методу приводить до специфічних властивостей оцінки (1) [6]. Розглянемо аналіз оцінки (1) для випадку, коли оцінка взаємокореляційної функції обчислюється за когерентним методом, тобто

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+nT),$$

де

$$\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT),$$

$$\hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT).$$

Проаналізуємо зміщення оцінки (1). Оскільки [7]

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=b_{\xi\eta}(t,u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT),$$

то математичне сподівання оцінки (1) дорівнює

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(u)\left[b_{\xi\eta}(t,u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT)\right]e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u.$$

Використовуючи подання

$$k(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_2)e^{\mathrm{i}\omega_2 u}\mathrm{d}\omega_2,$$

$$b_{\xi\eta}(t,u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(\omega_1,t)e^{\mathrm{i}\omega_1 u}\mathrm{d}\omega_1,$$

отримуємо

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(\omega_1,t)h(\omega_1-\omega,u_m)\left[1-g(\omega_1,N)\right]\mathrm{d}\omega_1,$$

де

$$g(\omega,N)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{\mathrm{i}\omega nT}. \qquad (2)$$

Функцію $g(\omega,N)$ подамо у вигляді $g(\omega,N)=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}e^{\mathrm{i}\omega(m-n)T}$ і врахуємо, що

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{\mathrm{i}\omega nT}=\frac{e^{\mathrm{i}\omega N\frac{T}{2}}}{e^{\mathrm{i}\omega\frac{T}{2}}}\frac{\sin\frac{\omega}{2}NT}{\sin\frac{\omega}{2}T}.$$

Тоді

$$g(\omega,N)=\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}NT}{N^2\sin^2\frac{\omega}{2}T}.$$

Функція $g(\omega,N)$ є періодичною з періодом ω_0: $g(\omega+k\omega_0,N)=g(\omega)$. При цьому $g(k\omega_0,N)=1$. Якщо $N\to\infty$, то для всіх $\omega\neq k\omega_0$, $k\in Z$ $g(\omega,N)$ прямує до нуля.

Згладжувальні вікна вибирають так, що при великих u_m функції $\lambda(\omega)$ мають вигляд гострих піків на частоті $\omega=0$. Якщо взаємоспектральна густина мало змінюється за частотою на інтервалі, де $\lambda(\omega)$ суттєво відрізняється від нуля, то

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t) = f_{\xi\eta}(\omega,t) - f_{\xi\eta}(\omega,t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)\,g(\omega_1,N)\,\mathrm{d}\omega_1 .$$

Зміщення оцінки (1) при $N\to\infty$, оскільки функція $g(\omega_1,N)$ в асимптотиці вироджується в одиничні сигнали, прямує до нуля для всіх $\omega\in R$.

Беручи до уваги формулу (2) і подання

$$\lambda(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(u)\,e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u ,$$

вираз для зміщення запишемо у вигляді

$$\varepsilon\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right] = -f_{\xi\eta}(\omega,t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)\,g(\omega_1,N)\,\mathrm{d}\omega_1 = -\frac{f_{\xi\eta}(\omega,t)}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{-\mathrm{i}\omega nT}k(nT).$$

Звідси випливає, що зумовлені скінченою довжиною відрізка реалізації зміщення будуть тим меншими, чим на меншому інтервалі $[-u_m,u_m]$ не рівним нулю є кореляційне вікно $k(u)$. Коли точка усічення корелограми $u_{\max}$ є набагато меншою від значення періоду T, то величини зміщень будуть достатньо малими. Однак при зменшенні u_m буде розширятися пік спектрального вікна $\lambda(\omega)$, що збільшує похибку, котрою ми раніше нехтували, покладаючи

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1-\omega)\,f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\,\mathrm{d}\omega_1 \approx f_{\xi\eta}(\omega,t).$$

Отже, дослідження оцінки зміщення взаємоспектральної густини при когерентному спектральному аналізі показує, що намагання зменшити зміщення оцінок змінної взаємоспектральної густини приводить до двох протилежних вимог. Взяти до уваги якусь одну з них чи відразу обидві, намагаючись при цьому знайти компромісне рішення, – це залежить від конкретної задачі взаємоспектрального аналізу.

Літетатура

1. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів : ФМІ НАН України, 2013. – 802 с.

2. Вібродіагностична система “ВЕКТОР” для оцінювання технічного стану енерго-обладнання методами нестаціонарного аналізу / Яворський І.М., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Семенов П.О., Сторожук Я.В., Стецько І.Г. // Енергетика та електрифікація. – 2014. – № 11. – С. 50–58.

3. Віброакустична система ВАС-1 для ранньої вібраційної діагностики обертових механізмів / Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г., Луферчик П.П. // Наука та інновації. – 2013. – № 3. – С. 31–38.

4. Javors’kyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Zakrzewski Z. Discrete estimators of characteristics for periodically correlated random processes // Digital Signal Processing. – 2016. – 53. – P. 25–40.

5. Javorskyj I. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems / I. Javorskyj, I. Kravets, I. Matsko, R. Yuzefovych // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2017. – 83. – P. 406–438.

6. Взаємокореляційний когерентний аналіз періодично нестаціонарних випадкових сигналів / Яворський І.М., Юзефович Р.М., Кравець І.Б., Мацько І.Й. // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36 (112). – С. 5–13.