

УДК 551.24.02:624.131.66

**Н. В. Іванчук , П. М. Мартинюк , докт. техн. наук, доц.**

Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

**ПРО ЗАСТОСУВАННЯ РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ В ПАКЕТИ  
FREEFEM++ В ЗАДАЧАХ ГЕО-ГІДРОДИНАМІКИ**

**N. V. Ivanchuk , P. M. Martynyuk , Dr., Assoc.Prof.**

**ABOUT APPLICATION OF PARALLEL COMPUTING IN THE PACKAGE  
FREEFEM++ IN THE PROBLEMS OF GEO-HYDRODYNAMICS**

Природні та штучні пористі середовища є багатокомпонентними і дослідження фізико-хімічних процесів в них (середовищах) вимагає врахування їх (процесів) взаємовпливу і взаємозалежностей, а також розгляду пористого середовища, як складної багатокомпонентної системи [1, 2]. Математичні моделі взаємопов'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах, як правило, описуються нелінійними крайовими задачами для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. Метою дослідження є визначення можливостей пакета FreeFem++ [3] при вирішенні поставлених нелінійних крайових задач методом скінченних елементів (МСЕ) і питання розпаралелювання обчислень.

Розглянемо процес фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням явищ як хімічної, так і механічної суффозії, який займає область  $\Omega$  з межею  $\Gamma$ . Математична модель вказаної задачі, враховуючи результати робіт [4, 5], з урахуванням впливу тепло-солеперенесення може бути описана крайовою задачею, яка містить наступні рівняння:

$$\frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \frac{\partial s}{\partial t} - (1+e)^2 \frac{1}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - e \left( \frac{1}{\rho_p} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho_m} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) \right) = \quad (1)$$

$$= (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, s, N) \nabla h - \mathbf{K}_c \nabla c - \mathbf{K}_T \nabla T), \mathbf{Z} \in \Omega(t), t > 0,$$

$$\sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \quad (2)$$

$$+ \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{Z} \in \Omega(t), t > 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - \alpha_{er} \mathbf{u} \cdot \nabla s, \mathbf{Z} \in \Omega(t), t > 0, \quad (3)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \mathbf{Z} \in \Omega(t), t > 0, \quad (4)$$

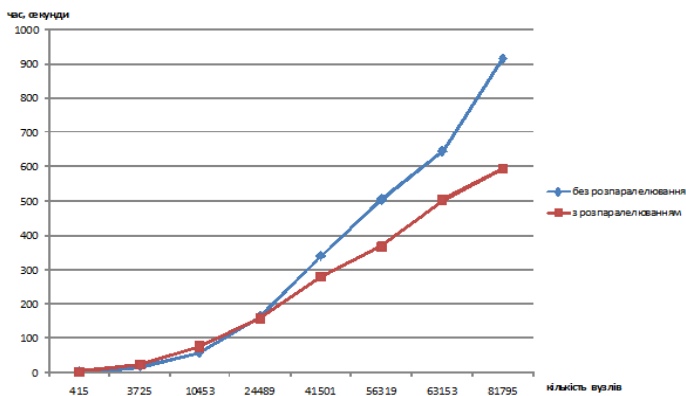
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c), \mathbf{Z} \in \bar{\Omega}(t), t \geq 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(c, T, s, N) \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{Z} \in \bar{\Omega}(t), t \geq 0, \quad (6)$$

$$\frac{dl(\mathbf{X}, t)}{dt} = \int_{l(\mathbf{X}, t)}^{L(\mathbf{X})} \left( \frac{R\gamma a}{(1+(R-1)\xi)(1+e)} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1+e}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) dz. \quad (7)$$

Рівняння (1) - (7) доповнюються початковими та граничними умовами.

Для відшукування наближеного розв'язку сформованої нелінійної крайової задачі використано МСЕ з програмною реалізацією в пакеті FreeFem++. Розпаралелювання обчислень є ефективним інструментом зменшення витрат машинного часу на вирішення прикладних завдань [6-8]. Можливості пакету FreeFem++ з розпаралелювання стосуються застосування паралельних вирішувачів для розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) [3]. Одним з таких методів є MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel Solver) [9]. На рис. 1 графічно відображено вплив ефекту розпаралелювання на час вирішення модельної задачі. Як видно ефект починає відчуватися при переході кількості вузлів через 50000. Так, вже при кількості вузлів



близько 82-х тисяч час виконання з 15 хв. зменшується до 10 хв.

Рис. 1. Залежність часу вирішення задачі від кількості вузлів

#### Література

1. Власюк А. П., Мартинюк П.М., Медвідь Н.В. Математичне моделювання консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в основах гідротехнічних та енергетичних споруд. Рівне: НУВГП, 2017. 423 с.
2. Kolditz O., Görke U.-J., Shao H., Wang W., Bauer S.. Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking: Benchmarking Initiatives. Springer, 2016. 243 p.
3. Hecht F., Auliac S., Pironneau O., Morice J., Le Hyaric A., Ohtsuka K. FreeFem++. Paris: Universite Pierre et Marie Curie, 2013. 378p
4. Герус В. А., Мартинюк П.М. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів. Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2015. Вип. 27. С. 41–52.
5. Герус В. А., Мартинюк П.М., Мічута О.Р. Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2015. Вип. 22. С. 23-30.
6. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А. Розпаралелена апроксимація еліптичних крайових задач штучною нейромережею з радіально-базисними функціями. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 108-117.
7. Baranov A. Yu., Bilous M. V., Sergienko I. V., Khimich A. N. Hybrid Algorithms to Solve Linear Systems for Finite-Element Modeling of Filtration Processes. Cybernetics and Systems Analysis. 2015. Vol. 51, N 4. Pp 594–602.
8. Smith I. M., Griffiths D. V., Margetts L. Programming the Finite Element Method. Wiley, 2014. P. 664
9. Duff I. S., Erisman A. M., Reid J. K. Direct Methods for Sparse Matrices. Oxford University Press, 2017. P. 429