

**П. Кривий**

Доцент, канд. техн. наук,  
Тернопільський національний  
технічний університет  
імені Івана Пулюя,  
м. Тернопіль

**Н. Тимошенко**

Доцент, канд. фіз-мат. наук,  
Національний університет  
«Львівська Політехніка»,  
м. Львів

**М. Шарик**

**В. Крупа**

Тернопільський національний  
технічний університет  
імені Івана Пулюя,  
м. Тернопіль

УДК 621.941

## **ВПЛИВ ВИПАДКОВОСТІ ПОДАЧІ НА ВИСОТУ МІКРОНЕРІВНОСТЕЙ ПОВЕРХНІ, ПРИ ЇЇ ТОЧІННІ АБО РОЗТОЧУВАННІ**

*Доведено, що подача на універсальних токарно-гвинторізних верстатах є випадковою величиною з нормальним законом розподілу. Запропоновано методику оцінки впливу випадковості подачі на висоту мікронерівностей оброблюваної поверхні при точінні та розточуванні.*

**подача, висота мікронерівностей, методика, середнє значення, дисперсія**

**Вступ.** Шорсткість обробленої поверхні є одним із найважливіших показників її якості. На шорсткість поверхні впливають багато різноманітних факторів, одним із найважливіших і найсуттєвіших з яких є подача, при якій відбувається її обробка на верстаті. Внаслідок впливу багатьох випадкових факторів подача на верстаті не є постійною величиною, а має певне розсіювання. Через те подача є випадковою величиною з певним законом розподілу, і врахування цього при визначенні висотних параметрів шорсткості обробленої поверхні є безумовно актуальною задачею.

На даний час для визначення висотних параметрів шорсткості обробленої поверхні існує велика кількість залежностей, які умовно можна поділити на два типи: аналітичні та емпіричні. В аналітичних формулах для визначення висоти мікронерівностей враховується вплив певних факторів, таких як: 1) форми, геометрії і кінематики переміщення робочої частини інструменту [1,2,3]; 2) пластичних і пружних деформацій в зоні контакту інструменту і оброблюваного матеріалу [1,2]; 3) пружних

коливань технологічної системи [1, 2, 4]; 4) нерівностей різальних кромek інструменту, які зростають по мірі його зношування, що призводить до копіювання цих нерівностей на обробленій поверхні [1,2]; 5) тертя задніх поверхонь інструменту по поверхні різання [4]; 6) виривів частин оброблюваного матеріалу [2] тощо. Внаслідок різноманітних умов обробки, ступінь впливу кожного із цих факторів на висоту мікронерівностей обробленої поверхні є різним. Вважається, що перші п'ять із вищеведених факторів викликають утворення систематичної складової профілю шорсткості, яка може бути описана математично, а шостий – формує випадкову складову профілю. Зазначимо, що практично в усіх існуючих залежностях [1 – 6], кожна із складових висоти мікронерівностей в тій чи іншій мірі залежить від подачі, при якій відбувається обробка поверхні.

На основі проведеного аналізу встановлено, що при визначенні параметрів шорсткості обробленої поверхні не враховується випадковість подачі. В цій статті робиться спроба врахувати вплив випадковості подачі на висоту

мікронерівностей поверхні, що виникають під час її точіння або розточування. При цьому розглядаються п'ять геометрично-математичних моделей формування мікронерівностей поверхні [3] зокрема, коли профіль формується в результаті контактів: прямолінійних ділянок (ПД) головної та допоміжної різальних кромок (ГРК та ДРК) з поверхнею різання (ПР) та обробленою поверхнею (ОП), відповідно, а радіус при вершині різця  $r = 0$  – I модель; радіусних та прямолінійних ділянок (РД і ПД) ГРК і ДРК з ПР ОП, відповідно,  $r \neq 0$  – II модель; РД ГРК з ПР та РД і ПД ДРК з ОП, – III модель; ПД і РД ГРК з ПР та РД ДРК з ОП, – IV модель; РД ГРК та ДРК з ПР та ОП, відповідно – V модель (нехтуємо кутом підйому гвинтової лінії ( $\eta = \arctg(s / \pi D)$ ) – траєкторії руху вершини різця, як величиною малості третього порядку).

Мета роботи – апробувати методику, що дозволяє врахувати вплив випадковості подачі верстата на висоту мікронерівностей, які виникають під час обробки поверхні точінням або розточуванням.

Основні завдання: 1. Встановити закони розподілу і знайти числові характеристики для подач, як випадкових величин  $S_i$  ( $i = 1, 9$ ), що задані статистичними рядами, отриманими в результаті здійснення дослідів, з величиною вибірки  $n = 120$ . 2. Встановити залежності між випадковими величинами  $S_i$  і  $H_i$  ( $i = 1, 9$ ) – висотами мікронерівностей обробленої поверхні для п'яти геометрично-математичних моделей формування цих мікронерівностей. 3. Знайти щільності розподілу ймовірностей випадкових величин  $H_i$  для п'яти геометрично-математичних моделей формування цих мікронерівностей. 4. На основі отриманих результатів оцінити вплив випадковості подачі на параметр шорсткості  $R_z$ , який прирівняний до  $H$ .

**Результати дослідження.** Точність подачі на універсальному верстаті залежить від певної кількості факторів: довжини кінематичного ланцюга, точності виготовлення елементів (ланок) кінематичного ланцюга, динамічних факторів, зазорів в кінематичних ланцюгах, накопиченої кінематичної похибки, розсіювання кроків зубчастих коліс, відхилення профілю зубчастих коліс від евольвенти та ін. Наприклад, для універсальних токарних металорізальних верстатів точність переміщення супорта залежить від: 1) точності виготовлення зубчастих коліс, зокрема, правильного взаємного розташування зубів (похибки кроку) і неточності форми робочих поверхонь (похибки форми профілю зубів) в коробці подач; 2) точності виготовлення черв'ячної передачі (за нормами кінематичної точності, плавності роботи, повноти контакту і величини бокового зазору); 3) передачі колесо-рейка (похибки кроку, похибки форми профілю зубів); 4) зазорів в кінематичних ланцюгах; 5) силових і температурних деформацій елементів кінематичного ланцюга. Враховуючи те, що кінематичний ланцюг окремої подачі середнього токарного верстату, як правило, складається більше, ніж з десяти передач і з'єднань, кожен елемент яких має свої норми кінематичної точності і точності спряжень, можна висунути на основі [5] гіпотезу про те, що подача на верстаті є випадковою величиною з нормальним законом розподілу.

Дослідження розсіювання подач проведено на універсальних токарно-гвинторізних верстатах моделей 1К62,

16К20, 16Б16КП, 16Б04П та ін. В цій роботі подано результати досліджень розподілу подач токарно-гвинторізного верстату моделі 16К20. Методика визначення значень подач пояснюється рис. 1 і суть її полягає у наступному. На кожному кінематичному ланцюгу, що забезпечує паспортні значення подач:  $s_1 = 50$  мкм/об;  $s_2 = 60$  мкм/об;  $s_3 = 75$  мкм/об;  $s_4 = 90$  мкм/об;  $s_5 = 100$  мкм/об;  $s_6 = 125$  мкм/об;  $s_7 = 150$  мкм/об;  $s_8 = 175$  мкм/об;  $s_9 = 200$  мкм/об, проведено 120 вимірювань реальних переміщень супорта за 1 оберт шпинделя. Для цього встановлювали на верстаті задану подачу. Щоб ліквідувати можливі зазори в зачепленнях елементів кінематичних ланцюгів і, при цьому, недопустити похибок вимірювання вантажу 8 (рис. 1), масою 30 кг, підвішували на тросі 6, який через блок 7 з'єднувався з супортом 5 верстату. Таким чином створювалась сила  $P_x$ , яка забезпечувала в процесі вимірювань беззазорність у з'єднаннях елементів кінематичних ланцюгів. Прокручуючи патрон 1 на один оберт, за допомогою індикатора 4 годинникового типу з ціною поділки 1 мкм, який встановлювався на штативі, і за допомогою магніту закріплювався до напрямних верстата, визначали переміщення супорта, яке приймали рівне значенню подачі  $s_i$  ( $i = 1, 9$ ).

У результаті проведених досліджень отримано статистичні ряди значень випадкових величин  $S_i$  ( $i = 1, 9$ ), обсяг яких  $n = 120$ . На основі отриманих даних обчислені середні значення  $\bar{s}_{i0}$  ( $i = 1, 9$ ) і дисперсії  $D(s_{i0})$  ( $i = 1, 9$ ) випадкових величин  $S_i$ . За критерієм Греббса [6] визначені ті значення подач, які значно відрізнялись від інших, і їх виключали із статистичних рядів. На основі отриманих таким чином рядів обчислені середні значення  $\bar{s}_i$  ( $i = 1, 9$ ), які прийняті приблизно рівними математичним сподіванням  $M(s_i)$  ( $i = 1, 9$ ) ( $\bar{s}_i \approx M(s_i)$ ), дисперсії  $D(s_i)$  ( $i = 1, 9$ ), середні квадратичні відхилення  $\sigma(s_i)$ , а також поля розсіювання  $s_i \pm 3\sigma(s_i)$  ( $i = 1, 9$ ). За критерієм Пірсона ( $\chi^2$ ) підтверджено узгодженість гіпотези про розподіл кожної із досліджуваних випадкових величин  $S_i$  за нормальним законом. За критеріями Стюдента  $t_k$  та Фішера  $F$  перевірена істотність їх відмінностей за середніми значеннями та дисперсіями, відповідно. Отримані дані подані у табл. 1. Аналіз значень коефіцієнта варіації для всіх дев'яти статистичних рядів відповідних подач показав, що  $V_{\max} = 0.075$ , що свідчить про високу стабільність процесу вимірювань значень подач.

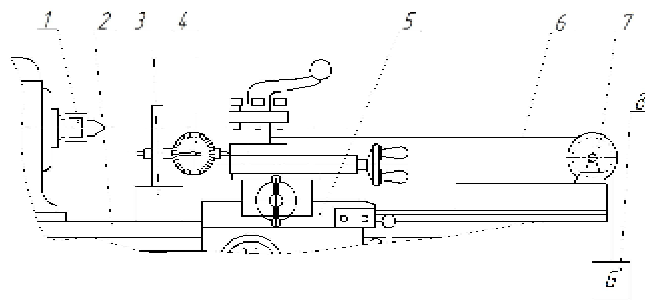


Рис. 1. Схема вимірювання подачі на верстаті: 1 – патрон, 2 – станина, 3 – штатив з магнітом, 4 – індикатор годинникового типу з ціною поділки 0,001 мм, 5 – супорт, 6 – трос, 7 – блок, 8 – вантаж

Значення подач та характеристики їх розсіювання

Подача за паспортом, $s$ , мкм/об	50	60	75	90	100	125	150	175	200
Середнє значення $\bar{s}$ , мкм/об	46,28	59,75	70,58	81,50	94,88	119,93	144,10	167,50	193,90
Мін. значення $\bar{s}_{\min}$ , мкм/об	40	51	62	71	81	109	131	152	178
Макс. значення $\bar{s}_{\max}$ , мкм/об	54	72	78	91	106	135	160	184	215
Дисперсія подачі $D(s)$ , мкм <sup>2</sup>	8,46	20,15	11,64	21,20	27,80	29,08	34,56	52,15	60,78
Середнє квадрат. відхилення подачі $\sigma(s)$ , мкм	2,91	4,49	3,41	4,60	5,27	5,39	5,88	7,22	7,80
Коефіцієнт варіації $V$	0,063	0,075	0,048	0,056	0,055	0,045	0,041	0,043	0,040
Критерій Пірсона $\chi^2$	5,21	4,81	2,38	4,00	3,15	4,47	1,42	3,11	1,46
$P(\chi^2)$	0,17	0,18	0,50	0,15	0,40	0,11	0,83	0,40	0,65
Відповідність нормальному закону розподілу	відп.	відп.	відп.	відп.	відп.	відп.	відп.	відп.	відп.
Відмінність значень за критерієм	Стьюдента	+	+	+	+	+	+	+	+
	Фішера	+	+	+	+	-	-	+	+

+ відмінність істотна; - відмінність неістотна

Щільність розподілу ймовірностей для кожної випадкової величини  $S_i$ , розподіленої за урізаним (ліворуч) нормальним законом на відповідних проміжках  $(a_i; b_i)$  ( $i = 1, 9$ ) має вигляд [7]:

$$f_i(s_i) = \frac{c_i}{\sqrt{2\pi D(s_i)}} \cdot e^{-\frac{(s_i - \bar{s}_i)^2}{2D(s_i)}}, \quad (1)$$

$$\text{де } c_i = \frac{1}{\frac{1}{2} [\Phi(s_i^{\text{II}}) - \Phi(s_i^{\text{I}})]}.$$

Тут

$$\Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt \quad - \text{ інтеграл ймовірностей;}$$

$$s_i^{\text{I}} = \frac{a_i - \bar{s}_i}{\sqrt{2D(s_i)}}, \quad s_i^{\text{II}} = \frac{b_i - \bar{s}_i}{\sqrt{2D(s_i)}}; \quad \bar{s}_i, D(s_i) - \text{ відповідно}$$

середні значення і дисперсії випадкових величин  $S_i$ .

Прийнявши  $a_i = \bar{s}_i - k_i \sqrt{D(s_i)}$  та  $b_i = \bar{s}_i + k_i \sqrt{D(s_i)}$ , отримаємо

$$c_i = \frac{1}{\Phi(k_i/\sqrt{2})} \quad (i = \overline{1, 9}).$$

На основі даних табл. 1 встановлено, що якщо  $a_i = s_{i\min}$  і  $b_i = s_{i\max}$ , то  $2 < k_i < 3$  і  $1,0027 < c_i < 1,048$  ( $i = 1, 9$ ). Отже, якщо, коефіцієнти мало відрізняються від одиниці.

Через те немає необхідності враховувати урізаність нормального закону розподілу у вигляді (1), а прийняти, що випадкові величини  $S_i$  розподілені за нормальним законом, щільності розподілу ймовірностей якого мають вигляд

$$f(s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(s_i)}} \cdot e^{-\frac{(s_i - \bar{s}_i)^2}{2D(s_i)}}. \quad (2)$$

Залежність між випадковими величинами  $H_i$  і  $S_i$  задаються рівностями

$$h_i = \varphi(s_i) \quad (i = \overline{1, 9}). \quad (3)$$

Якщо відомі диференціальні функції  $f(s_i)$  випадкових величин  $S_i$ , то відповідні диференціальні функції  $g(h_i)$  випадкових величин  $H_i = \varphi(S_i)$  знаходяться із рівностей [8]

$$g(h_i) = f[\psi(h_i)] \cdot \psi'(h_i), \quad (4)$$

де  $\psi(h_i)$  – відповідні обернені функції до функцій  $h_i = \varphi(s_i)$ ; ( $i = 1, 9$ ).

Тоді математичні сподівання  $M(h_i)$ , дисперсії  $D(h_i)$  та середні квадратичні відхилення  $\sigma(h_i)$  випадкових величин  $H(s_i)$  визначаються за формулами:

$$M(h_i) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} h_i g(h_i) dh_i = \bar{h}_i, \quad (5)$$

$$D(h_i) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (h_i - \bar{h}_i)^2 g(h_i) dh_i, \quad (6)$$

$$\sigma(h_i) = \sqrt{D(h_i)}, \quad (7)$$

де  $\alpha_i = h_{i\min}$ ,  $\beta_i = h_{i\max}$  ( $i = \overline{1, 9}$ ).

Знайдемо щільності розподілів ймовірностей  $g(h_i)$  ( $i = 1, 9$ ) і числові характеристики випадкових величин  $H(s_i)$  ( $i = 1, 9$ ) для п'яти геометрично-матема-

тичних моделей формування мікронерівностей обробленої поверхні [3].

Для першої моделі (радіус при вершині різця  $r = 0$ ) висоти мікронерівностей  $h_{i_1}$  визначаються за формулою  $h_{i_1} = s_i / (\text{ctg } \varphi + \text{ctg } \varphi')$  ( $i = 1, 9$ ), де  $\varphi$ ,  $\varphi'$  – відповідно головний і допоміжний кути в плані різальних елементів. Із останньої формули знайдемо

$$s_i = \psi(h_{i_1}) = \frac{h_{i_1}}{m}, \text{ де } m = \frac{1}{\text{ctg } \varphi + \text{ctg } \varphi'}.$$

Тоді

$$\psi'(h_{i_1}) = \frac{1}{m}.$$

Враховуючи, що щільності розподілу  $f(s_i)$  визначаються за формулою (2), із рівності (4) отримаємо

$$g(h_{i_1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(h_{i_1}/m)}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_1}/m - \bar{s}_i)^2}{2D(h_{i_1}/m)}}.$$

Звідси, враховуючи властивість дисперсії, маємо

$$g(h_{i_1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(h_{i_1})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_1} - \bar{h}_{i_1})^2}{2D(h_{i_1})}}, \quad (8)$$

де  $\bar{h}_{i_1} = M(h_{i_1}) = m\bar{s}_i$ ,  $D(h_{i_1}) = m^2 D(s_i)$  ( $i = \overline{1, 9}$ ).

Оскільки висоти мікронерівностей можуть набувати лише додатних числових значень, то задовольняючи умову нормування урізаного (ліворуч) нормального закону для  $h_{i_1} \in (\alpha_{i_1}, \beta_{i_1})$ , відповідні щільності ймовірностей цього закону запишемо у вигляді

$$g(h_{i_1}) = \frac{c_{i_1}}{\sqrt{2\pi D(h_{i_1})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_1} - \bar{h}_{i_1})^2}{2D(h_{i_1})}}, \quad (9)$$

де

$$c_{i_1} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\beta_{i_1} - \bar{h}_{i_1}}{\sqrt{2D(h_{i_1})}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{i_1} - \bar{h}_{i_1}}{\sqrt{2D(h_{i_1})}}\right) \right]}, \quad (i = \overline{1, 9}).$$

Для другої моделі ( $r \neq 0$ ) висоти мікронерівностей  $h_{i_2}$  визначаються за формулою

$$h_{i_2} = r - \frac{\left( \frac{r(\sin \varphi + \sin \varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'} - s_i \text{tg } \varphi \text{tg } \varphi' \right)}{\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi'}. \quad (10)$$

Формулу (10) можна представити у вигляді

$$h_{i_2} = q \cdot s_i + d, \quad (11)$$

де  $q = \text{tg } \varphi \cdot \text{tg } \varphi' / (\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi')$ ,  
 $d = r - r \cdot (\sin \varphi + \sin \varphi') / (\cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot (\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi'))$

Оберненими до функцій (11) будуть функції  $\psi(h_{i_2}) = (h_{i_2} - d) / q$ , похідні яких  $\psi'(h_{i_2}) = 1 / q$ . Використавши формулу (4) для знайдених  $\psi(h_{i_2})$  і  $\psi'(h_{i_2})$ ,

отримаємо

$$g(h_{i_2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D((h_{i_2} - d)/q)} \cdot q} \cdot e^{-\frac{((h_{i_2} - d)/q - \bar{s}_i)^2}{2D((h_{i_2} - d)/q)}}. \quad (12)$$

Враховавши властивості дисперсії, запишемо отримані щільності  $g(h_{i_2})$  у вигляді

$$g(h_{i_2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(h_{i_2})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_2} - \bar{h}_{i_2})^2}{2D(h_{i_2})}}, \quad (13)$$

де  $\bar{h}_{i_2} = M(h_{i_2}) = \bar{s}_i + d$ ,  $D(h_{i_2}) = q^2 D(s_i)$  ( $i = \overline{1, 9}$ ).

Задовольняючи умову нормування і враховуючи додатність числових значень висот мікронерівностей  $h_{i_2}$  на проміжку  $(\alpha_{i_2}; \beta_{i_2})$ , отримаємо

$$g(h_{i_2}) = \frac{c_{i_2}}{\sqrt{2\pi D(h_{i_2})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_2} - \bar{h}_{i_2})^2}{2D(h_{i_2})}}, \quad (14)$$

де

$$c_{i_2} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\beta_{i_2} - \bar{h}_{i_2}}{\sqrt{2D(h_{i_2})}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{i_2} - \bar{h}_{i_2}}{\sqrt{2D(h_{i_2})}}\right) \right]}, \quad (i = \overline{1, 9}).$$

Для третьої моделі висоти мікронерівностей  $h_{i_3}$  визначаються за формулою

$$h_{i_3} = r - \cos \varphi' (r - s_i \sin \varphi') - \sin \varphi' \sqrt{s_i \sin \varphi' (2r - s_i \sin \varphi')}. \quad (15)$$

Обернені функції  $\psi(h_{i_3})$  мають вигляд

$$\psi(h_{i_3}) = r \sin \varphi' + \frac{h_{i_3} - r(1 - \cos \varphi')}{\text{tg } \varphi'} + \sqrt{2rh_{i_3} - h_{i_3}^2}. \quad (16)$$

Похідні  $\psi'(h_{i_3})$  обернених функцій

$$\psi'(h_{i_3}) = \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'} + \frac{r - h_{i_3}}{\sqrt{2rh_{i_3} - h_{i_3}^2}}. \quad (17)$$

Підставивши (16) і (17) у вираз (4) отримаємо

$$g(h_{i_3}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\psi(h_{i_3}))}} \cdot \left| \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'} + \frac{r - h_{i_3}}{\sqrt{2rh_{i_3} - h_{i_3}^2}} \right| \times e^{-\frac{\left( r \sin \varphi' + \frac{h_{i_3} - r(1 - \cos \varphi')}{\text{tg } \varphi'} + \sqrt{2rh_{i_3} - h_{i_3}^2} - \bar{s}_i \right)^2}{2D(\psi(h_{i_3}))}}. \quad (18)$$

За критерієм Колмогорова встановили можливість заміни отриманої функції (18) щільністю ймовірностей нормального закону з параметрами  $M(h_{i_3}) = h_{i_3}$  та  $D(h_{i_3})$ , які обчислюються за формулами:

$$\bar{h}_{i_{III}} = \int_{\alpha_{i_{III}}}^{\beta_{i_{III}}} \frac{h_{i_{III}}}{\sqrt{2\pi D(\psi(h_{i_{III}}))}} \left| \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'} + \frac{r-h_{i_{III}}}{\sqrt{2rh_{i_{III}}-h_{i_{III}}^2}} \right| \times \frac{\left( r \sin \varphi' + \frac{h_{i_{III}}-r(1-\cos \varphi')}{\operatorname{tg} \varphi'} + \sqrt{2rh_{i_{III}}-h_{i_{III}}^2} - \bar{s}_i \right)^2}{2D(\psi(h_{i_{III}}))} dh_{i_{III}}, \quad (19)$$

$$D(h_{i_{III}}) = \int_{\alpha_{i_{III}}}^{\beta_{i_{III}}} \frac{(h_{i_{III}} - \bar{h}_{i_{III}})^2}{\sqrt{2\pi D(\psi(h_{i_{III}}))}} \left| \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'} + \frac{r-h_{i_{III}}}{\sqrt{2rh_{i_{III}}-h_{i_{III}}^2}} \right| \times \frac{\left( r \sin \varphi' + \frac{h_{i_{III}}-r(1-\cos \varphi')}{\operatorname{tg} \varphi'} + \sqrt{2rh_{i_{III}}-h_{i_{III}}^2} - \bar{s}_i \right)^2}{2D(\psi(h_{i_{III}}))} dh_{i_{III}}. \quad (20)$$

Для цього визначали  $\lambda$  – максимальне значення модуля різниці між розрахунковою функцією розподілу  $G^*(h)$  і відповідною теоретичною функцією  $G(h)$  та ймовірність  $P(\lambda)$  [9]:

$$\lambda = \max |G^*(h) - G(h)| \cdot \sqrt{n} \quad \text{і} \quad P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}.$$

Врахувавши, що  $P(\lambda) \geq 0.05$ , отриману розрахункову функцію (18) замінили щільністю ймовірностей усіченого (ліворуч) нормального закону у вигляді

$$g(h_{i_{III}}) = \frac{c_{i_{III}}}{\sqrt{2\pi D(h_{i_{III}})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_{III}} - \bar{h}_{i_{III}})^2}{2D(h_{i_{III}})}}, \quad (21)$$

$$\text{де } c_{i_{III}} = \frac{1}{2 \cdot \left[ \Phi \left( \frac{\beta_{i_{III}} - \bar{h}_{i_{III}}}{\sqrt{2D(h_{i_{III}})}} \right) - \Phi \left( \frac{\alpha_{i_{III}} - \bar{h}_{i_{III}}}{\sqrt{2D(h_{i_{III}})}} \right) \right]}.$$

Для четвертої моделі висоти мікронерівностей  $h_{i_{IV}}$  визначаються за формулою

$$h_{i_{IV}} = r - \cos \varphi (r - s_i \sin \varphi) - \sin \varphi \sqrt{s_i \sin \varphi (2r - s_i \sin \varphi)}. \quad (22)$$

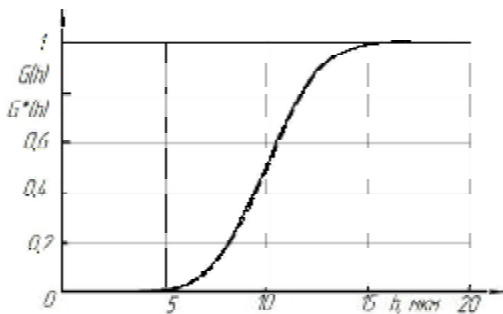


Рис. 2. Графіки функцій розподілу висот мікронерівностей для III моделі, при подачі  $s=0,1$  мм/об: - - - - розрахунковий; — — — нормального закону

Обернені функції  $\psi(h_{i_{IV}})$  мають вигляд

$$\psi(h_{i_{IV}}) = r \sin \varphi + \frac{h_{i_{IV}} - r(1 - \cos \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} + \sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2}. \quad (23)$$

Похідні  $\psi'(h_{i_{IV}})$  обернених функцій

$$\psi'(h_{i_{IV}}) = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{r - h_{i_{IV}}}{\sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2}}. \quad (24)$$

Підставивши вирази (23), (24) у формулу (4), отримаємо

$$g(h_{i_{IV}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\psi(h_{i_{IV}}))}} \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{r - h_{i_{IV}}}{\sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2}} \right| \times \frac{\left( r \sin \varphi + \frac{h_{i_{IV}} - r(1 - \cos \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} + \sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2} - \bar{s}_i \right)^2}{2D(\psi(h_{i_{IV}}))}. \quad (25)$$

Побудувавши графік розрахункової функції розподілу, за критерієм Колмогорова встановили, що з достатньою точністю її можна замінити функцією розподілу Гаусса з параметрами  $M(h_{i_{IV}}) = \bar{h}_{i_{IV}}$  та  $D(h_{i_{IV}})$ , які визначаються за формулами:

$$\bar{h}_{i_{IV}} = \int_{\alpha_{i_{IV}}}^{\beta_{i_{IV}}} \frac{h_{i_{IV}}}{\sqrt{2\pi D(\psi(h_{i_{IV}}))}} \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{r - h_{i_{IV}}}{\sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2}} \right| \times \frac{\left( r \sin \varphi + \frac{h_{i_{IV}} - r(1 - \cos \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} + \sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2} - \bar{s}_i \right)^2}{2D(\psi(h_{i_{IV}}))} dh_{i_{IV}}, \quad (26)$$

$$D(h_{i_{IV}}) = \int_{\alpha_{i_{IV}}}^{\beta_{i_{IV}}} \frac{(h_{i_{IV}} - \bar{h}_{i_{IV}})^2}{\sqrt{2\pi D(\psi(h_{i_{IV}}))}} \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{r - h_{i_{IV}}}{\sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2}} \right| \times \frac{\left( r \sin \varphi + \frac{h_{i_{IV}} - r(1 - \cos \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} + \sqrt{2rh_{i_{IV}} - h_{i_{IV}}^2} - \bar{s}_i \right)^2}{2D(\psi(h_{i_{IV}}))} dh_{i_{IV}}. \quad (27)$$

Замінимо рівність (25) виразом щільності ймовірностей усіченого (ліворуч) нормального закону

$$g(h_{i_{IV}}) = \frac{c_{i_{IV}}}{\sqrt{2\pi D(h_{i_{IV}})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_{IV}} - \bar{h}_{i_{IV}})^2}{2D(h_{i_{IV}})}}, \quad (28)$$

$$\text{де } c_{i_{IV}} = \frac{1}{2 \cdot \left[ \Phi \left( \frac{\beta_{i_{IV}} - \bar{h}_{i_{IV}}}{\sqrt{2D(h_{i_{IV}})}} \right) - \Phi \left( \frac{\alpha_{i_{IV}} - \bar{h}_{i_{IV}}}{\sqrt{2D(h_{i_{IV}})}} \right) \right]}.$$

Для п'ятої моделі висоти мікронерівностей  $h_{iV}$  визначаються за формулою

$$h_{iV} = r - \sqrt{r^2 - s_i^2/4}. \quad (29)$$

Функції  $\Psi(h_{iV})$  та  $\Psi'(h_{iV})$  відповідно мають вигляд:

$$\Psi(h_{iV}) = 2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2}; \quad (30)$$

$$\Psi'(h_{iV}) = \frac{r - h_{iV}}{2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2}}. \quad (31)$$

Підставивши вирази (30), (31) у рівність (4) отримаємо

$$g(h_{iV}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\Psi(h_{iV}))}} \left| \frac{r - h_{iV}}{2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2}} \right| \times \frac{(2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2} - \bar{s}_i)^2}{2D(\Psi(h_{iV}))} \times e \quad (32)$$

За критерієм Колмогорова встановлено, що з достатньою точністю отриману розрахункову функцію (32) можна замінити функцією розподілу Гаусса з параметрами  $M(h_{iV}) = \bar{h}_{iV}$  та  $D(h_{iV})$ , які визначаються за формулами:

$$\bar{h}_{iV} = \int_{\alpha_{iV}}^{\beta_{iV}} \frac{h_{iV}}{\sqrt{2\pi D(\Psi(h_{iV}))}} \left| \frac{r - h_{iV}}{2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2}} \right| \times \frac{(2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2} - \bar{s}_i)^2}{2D(\Psi(h_{iV}))} dh_{iV}, \quad (33)$$

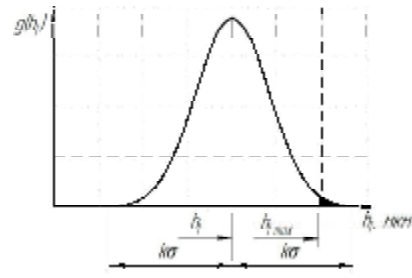
$$D(h_{iV}) = \int_{\alpha_{iV}}^{\beta_{iV}} \frac{(h_{iV} - \bar{h}_{iV})^2}{\sqrt{2\pi D(\Psi(h_{iV}))}} \left| \frac{r - h_{iV}}{2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2}} \right| \times \frac{(2\sqrt{2h_{iV}r - h_{iV}^2} - \bar{s}_i)^2}{2D(\Psi(h_{iV}))} dh_{iV}. \quad (34)$$

Тоді функцію (32) подамо у вигляді

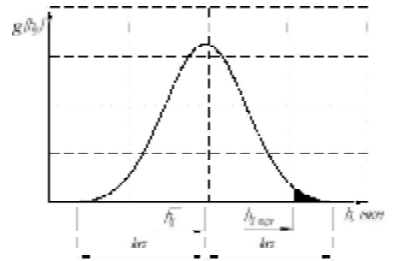
$$g(h_{iV}) = \frac{c_{iV}}{\sqrt{2\pi D(h_{iV})}} \cdot e^{-\frac{(h_{iV} - \bar{h}_{iV})^2}{2D(h_{iV})}}, \quad (35)$$

$$\text{де } c_{iV} = \frac{1}{2 \left[ \Phi\left(\frac{\beta_{iV} - \bar{h}_{iV}}{\sqrt{2D(h_{iV})}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{iV} - \bar{h}_{iV}}{\sqrt{2D(h_{iV})}}\right) \right]}.$$

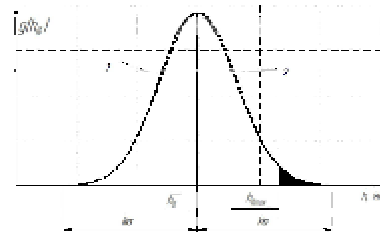
Враховавши, що, межі інтегрування  $\alpha_{i_m} = \bar{h}_{i_m} - k_{i_m}\sqrt{D(h_{i_m})}$  та  $\beta_{i_m} = \bar{h}_{i_m} + k_{i_m}\sqrt{D(h_{i_m})}$  (де



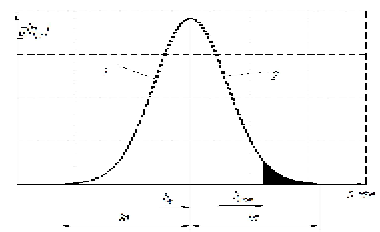
а)



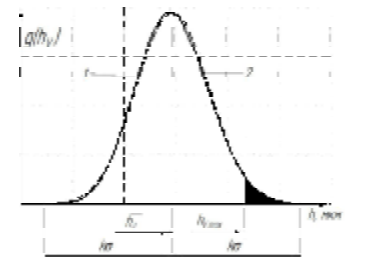
б)



в)



г)



д)

Рис. 3. Криві щільності розподілу висот мікронерівностей та значення квантилів  $h_{max}$  для геометрично-математичних моделей: а), б), в), г), д) – відповідно для моделей I-V; ---- – розрахункові; ——— – нормального розподілу

$m = \overline{I, V}$  – номер моделі), і те, що  $2 < k_{i_m} < 3$ , усіченістю нормального закону розподілу для кожної із моделей знехтуємо. Тоді відповідні щільності розподілів ймовірностей випадкових величин  $H_m(s_i)$  можна записати у вигляді

Середні значення подачі і характеристики розсіювання висот мікронерівностей для розглядуваних моделей

Середні значення подачі $\bar{F}$ , мкм/об	46,28	59,75	70,58	81,50	94,88	119,93	144,10	167,50	193,90
<i>геометрично-математична модель I</i>									
Середні значення висоти мікронерівностей $\bar{h}_I$ , мкм	12,34	15,94	18,83	21,75	25,31	32,00	38,45	44,70	51,70
Дисперсія висоти мікронерівностей $D(h_I)$ , мкм <sup>2</sup>	0,60	1,43	0,83	1,51	1,99	2,07	2,46	3,71	4,33
Середнє квадрат. відхилення висоти мікронерівностей $\sigma(h_I)$ , мкм	0,78	1,20	0,91	1,23	1,41	1,44	1,57	1,93	2,08
Коефіцієнт варіації, $V$	0,063	0,075	0,048	0,057	0,056	0,045	0,041	0,043	0,040
$h_{I,max}$ , мкм	13,63	17,92	20,33	23,77	27,49	34,37	41,04	47,87	55,16
$100?h_{I,max} / \bar{h}_I$ , %	110,5	112,4	108,0	109,3	108,6	107,4	106,7	107,1	106,8
Відмінність значень за критерієм	Стьюдента	+	+	+	+	+	+	+	+
	Фішера	+	+	+	+	-	-	+	+
<i>геометрично-математичні моделі II-V</i>									
Геометрично-математична модель	V	V	III (IV*)	III (IV*)	III (IV*)	III (IV*)	III (IV*)	II	II
Середні значення висоти мікронерівностей $\bar{h}_{II-V}$ , мкм	2,80	4,77	6,44	8,55	11,32	16,97	22,88	28,94	35,98
Дисперсія висоти мікронерівностей $D(h_{II-V})$ , мкм <sup>2</sup>	0,13	0,55	0,40	0,84	1,27	1,62	2,20	3,71	4,33
Середнє квадрат. відхилення висоти мікронерівностей $\sigma(h_{II-V})$ , мкм	0,36	0,74	0,63	0,92	1,13	1,27	1,48	1,93	2,08
Коефіцієнт варіації, $V$	0,129	0,155	0,097	0,108	0,099	0,075	0,065	0,067	0,058
$h_{II-V,max}$ , мкм	3,36	5,59	7,48	10,06	13,18	19,06	25,32	32,10	39,40
$100?h_{II-V,max} / \bar{h}_{II-V}$ , %	120,0	117,2	116,1	117,7	116,4	112,3	107,7	110,9	109,5
Відмінність значень за критерієм	Стьюдента	+	+	+	+	+	+	+	+
	Фішера	+	+	+	+	+	+	+	+

+ відмінність істинна; - відмінність неістинна; \* - при заданих геометричних параметрах інструменту модель IV не існує (вона існує лише при параметрах  $\varphi' > \varphi$ ) і відповідати наведеним значенням при  $\varphi' = 45^\circ$ ;  $\varphi = 20^\circ$ ;  $r = 100$  мкм

$$g(h_{i_m}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(h_{i_m})}} \cdot e^{-\frac{(h_{i_m} - \bar{h}_{i_m})^2}{2D(h_{i_m})}}, \quad (36)$$

$$h_{max} = \bar{h}_j + U_p \cdot \sigma_{h_j}. \quad (37)$$

де  $i = \overline{1, 9}$ ,  $m = \overline{I, V}$ .

Криві щільностей розподілу ймовірностей випадкових величин  $H_m$ , що відповідають розглянутим геометрично-математичним моделям формування мікронерівностей, зображені на рис. 3.

За статистичну оцінку впливу випадковості подачі на шорсткість обробленої поверхні точінням або розточуванням запропоновано для випадкової величини  $H$  — висоти мікронерівностей — прийняти квантиль рівня 0,95 —  $h_{max}$ .

У нашому випадку для нормального закону розподілу

$$G(h_{max}) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left( \frac{h_{max} - \bar{h}}{\sqrt{2D(h)}} \right) \right\},$$

$$\text{або } G(h_{max}) = G_0(U_p), \text{ де } U_p = \frac{h_{max} - \bar{h}}{\sqrt{D(h)}}.$$

Тоді квантиль нормального закону розподілу  $h_{max}$  визначиться за формулою

Математичні сподівання  $M(h_{i_m}) = \bar{h}_{i_m}$  і дисперсії розсіювання  $D(h_{i_m})$  ( $i = \overline{1, 9}$ ,  $m = \overline{I, V}$ ), що визначаються за формулами (19), (20), (26), (27), (33), (34). знаходили чисельним методом.

У табл. 2 подані середні значення і характеристики розсіювання випадкових величин  $H_m$  ( $m = \overline{I, V}$ ), при параметрах різця  $\varphi = 45^\circ$ ;  $\varphi' = 20^\circ$  і  $r = 0$  для I моделі та  $\varphi = 45^\circ$ ;  $\varphi' = 20^\circ$  і  $r = 100$  мкм для моделей II-V.

З даних табл. 2 бачимо, що для моделі I, визначаючи отриману висоту мікронерівностей за традиційним методом (за середніми значеннями) отримуємо на 6,8–12,4 % нижчі показники, ніж параметри висоти мікронерівностей з врахуванням випадковості подачі, а для геометрично-математичних моделей II-V отримаємо висоту мікронерівностей на 7,7–20 % нижчу.

Оцінка висот мікронерівностей за запропонованою методикою дасть можливість на стадії проектування технологічного процесу, використавши  $h_{max}$ , встановити оптимальне значення подачі, яка забезпечить задані параметри шорсткості.

Для наочності з ймовірністю 95 % встановлення взаємозалежності між величинами  $h_{max}$ ,  $D(s)$ ,  $M(s)$  в

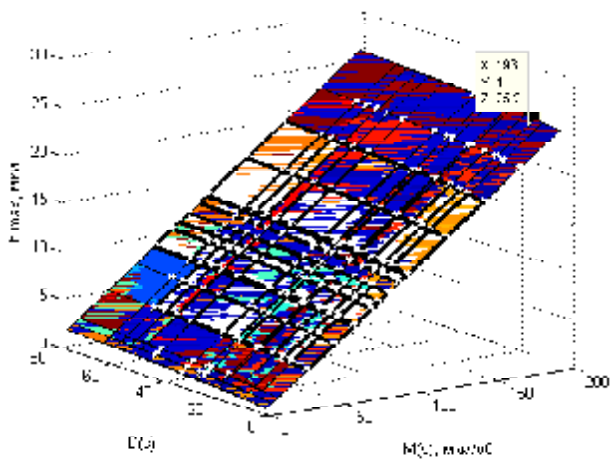


Рис. 4. Поверхня відгуку залежностей величини  $h_{\max}$  від  $D(s)$  та  $M(s)$

пакеті Matlab для І моделі побудовано поверхню відгуку, яка зображена на рис. 4.

Перевагою побудованої поверхні відгуку є те, що вона дозволяє визначати значення величини  $h_{\max}$  для різних значеннях розсіювання подач на будь-якому верстаті. Таким чином, з'явилася можливість, маючи характеристики розсіювання подач верстата, отримувати значення  $h_{\max}$  не проводячи громіздких математичних розрахунків.

**Висновки.** 1. Встановлено, що подача на токарних верстатах є випадковою величиною з нормальним законом розподілу.

2. Отримано щільності розподілу ймовірностей випадкових величин  $H_m$  – висот мікронерівностей обробленої поверхні, що відповідають  $m = I, V$  геометрично-математичним моделям формування цих мікронерівностей.

3. За критерієм Колмогорова доведено, що з достатньою точністю отримані закони розподілу випадкових величин можна замінити нормальним законом розподілу.

4. Для застосування на практиці побудовано поверхню відгуку взаємозалежності між величинами  $h_{\max}$ ,  $M(s)$ ,  $D(s)$ .

**Перспектива.** Запропонована методика може бути використана для встановлення подачі на верстатах під час обробки поверхні деталі точінням або розточуванням в залежності від заданої конструктором шорсткості.

## Література

1. Сулов А. Г. Техническое обеспечение параметров состояния поверхностного слоя деталей / Сулов А.Г. – М.: «Машиностроение», 1987. – 208 с.: ил.
2. Сулов А. Г. Теоретическое описание параметров шероховатости поверхностей при механической обработке / А. Г. Сулов // Труды Второй Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы фундаментальных наук»: в 7 т. / под ред. И.Б. Федорова, К.С. Колесникова, А.О. Карпова. М.: Техносфера-Информ, 1994.– Т. 5. Симпозиум «Промышленные технологии в современной техносфере». – С 107-109.
3. Кривий П. Д. Геометричні та математичні моделі формування шорсткості поверхні при точінні та розточуванні / П.Д. Кривий, В.В. Крупа // Вісник житомирського державного технологічного університету. – 2010. – № 2. – С. 44-55.
4. Луців І. В. Формування шорсткості і хвилястості поверхні при багатолезовій адаптивній обробці / І.В. Луців // Вісник ТДТУ. — 1999. — Том 4. — № 3. — С. 135-138.
5. Кордонский Х. Б. Приложение теории вероятностей в инженерном деле / Кордонский Х.Б. М.: Л.: Госиздат физико-математич. литературы, 1963. – 434 с.
6. Бобров В. Ф. Основы теории резания металлов: учебник / Бобров В.Ф. – М.: «Машиностроение», 1975. – 344 с.
7. Колкер Я. Д. Математический анализ точности механической обработки деталей / Я.Д. Колкер. – Киев: «Техника» – 1979. – 200с.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: «Наука», 1969. – 576с.
9. Екимов В. В. Вероятностные методы в строительной механике корабля / Екимов В.В. – «Судостроение». – Ленинград, 1966. – 328с.

## Інформація

### 14TH EUROPEAN TURBULENCE CONFERENCE [ETC14]

2 September 2013 – 4 September 2013, Lyon, France

#### The principal topics

Acoustics of turbulent flows  
MHD turbulence  
Atmospheric turbulence  
Reacting and compressible turbulence  
Control of turbulent flows  
Transport and mixing  
Geophysical and astrophysical turbulence  
Turbulence in multiphase and non-Newtonian flows

Instability and transition  
Vortex dynamics and structure formation  
Intermittency and scaling  
Wall bounded flows  
Large eddy simulation and related techniques  
Turbulent combustion  
Lagrangian aspects of turbulence  
Turbulence in superfluids