

ЛІТЕРАТУРА



НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА

Міністерство освіти та науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра біотехнічних систем

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання лабораторних робіт
з дисципліни

ОБРОБКА БІОМЕДИЧНИХ СИГНАЛІВ

для студентів спеціальності
163 «Біомедична інженерія»
та напряму підготовки
6.051402 «Біомедична інженерія»

Тернопіль, 2017

Хвостівський М.О. Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни “Обробка біомедичних сигналів” для студентів спеціальності 163 «Біомедична інженерія» та напряму підготовки 6.051402 «Біомедична інженерія» // Хвостівський М.О. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2017. – 22 с.

Укладач: к.т.н., доц. Хвостівський М.О.

ЗМІСТ

1. Кореляційна обробка біосигналів
2. Спектральна обробка біосигналів
3. Спектрально-кореляційна обробка біосигналів
4. Статистична обробка біосигналів

Список використаних джерел

Лабораторна робота №1

Кореляційна обробка біосигналів

Мета роботи: набути навички кореляційної обробки біосигналів.

Теоретичні відомості

Кореляція (correlation), і її окремий випадок для центрованих сигналів – коваріація, є методом аналізу сигналів. Приведемо один з варіантів використання методу. Допустимо, що є експериментально зареєстрований сигнал $\xi(t)$ у якому може бути (а може і не бути) деяка послідовність $s(t)$ кінцевої довжини T тимчасове положення якої нас цікавить. Для пошуку цієї послідовності в тому, що ковзає по сигналу $\xi(t)$ тимчасовому вікні довжиною T обчислюються скалярні добутки сигналів $\xi(t)$ і $s(t)$. Тим самим ми "прикладасмо" шуканий сигнал $s(t)$ до сигналу $\xi(t)$ ковзаючи по його аргументу, і по величині скалярного твору оцінюємо ступінь схожості сигналів в точках порівняння.

Кореляційний аналіз дає можливість встановити в сигналах (або в рядах цифрових даних сигналів) наявність певного зв'язку зміни значень сигналів по незалежній змінній, тобто, коли великі значення одного сигналу (щодо середніх значень сигналу) пов'язані з великими значеннями іншого сигналу (позитивна кореляція), або, навпаки, малі значення одного сигналу пов'язані з великими значеннями іншого (негативна кореляція), або дані двох сигналів ніяк не зв'язані (нульова кореляція).

У функціональному просторі сигналів цей ступінь зв'язку може виражатися в нормованих одиницях коефіцієнта кореляції, тобто в косинусі кута між векторами сигналів, і, відповідно, прийматиме значення від 1 (повний збіг сигналів) до -1 (повна протилежність) і не залежить від значення (масштабу) одиниць вимірювань.

У варіанті автокореляції (autocorrelation) по аналогічній методиці проводиться визначення скалярного добутку сигналу $s(t)$ з власною копією, що ковзає по аргументу. Автокореляція дає змогу оцінити середньостатистичну залежність поточних відліків сигналу від своїх попередніх і подальших значень (так званий радіус кореляції значень сигналу), а також виявити в сигналі

наявність елементів, що періодично повторюються.

Особливе значення методи кореляції мають при аналізі випадкових процесів для виявлення невідповідних складових і оцінки невідповідних параметрів цих процесів.

1.1. Автокореляційний аналіз

Автокореляційна функція (АКФ) (correlation function, CF) сигналу $\xi(t)$ кінцевого по енергії, є кількісною інтегральною характеристикою форми сигналу, і визначається інтегралом від добутку двох копій сигналу $\xi(t)$ зсунутих один відносно одного на певний час τ :

$$r_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\xi(t+\tau)dt = \|s(t)\| \cdot \|s(t+\tau)\| \cos \varphi(\tau), \quad (1.1)$$

Як випливає з виразу (2.1), АКФ є скалярним добутком сигналу і його копії у функціональній залежності від змінної величини значення зсування τ . Відповідно, АКФ має фізичну розмірність енергії, а при $\tau = 0$ значення АКФ безпосередньо рівне енергії сигналу:

$$r_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2(t)dt = E_{\xi}, \quad (1.2)$$

АКФ відноситься до парних функцій, в чому неважко переконатися заміною змінною $t = t - \tau$ у виразі (1.1):

$$r_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\xi(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-\tau)\xi(t)dt = r_{\xi}(-\tau).$$

Максимум АКФ, рівний енергії сигналу при $\tau = 0$ завжди позитивний, а модуль АКФ при будь-якому значенні тимчасового зсуву не перевищує енергію сигналу. Останнє прямо випливає з властивостей скалярного добутку (як і нерівність Коші-Буняковського):

$$\begin{aligned} \langle \xi(t), \xi(t+\tau) \rangle &= \|\xi(t)\| \cdot \|\xi(t+\tau)\| \cos \varphi(\tau), \\ \cos \varphi(\tau) &= 1 \text{ при } \tau = 0 \quad \langle \xi(t), \xi(t+\tau) \rangle = \|\xi(t)\| \cdot \|\xi(t)\| = E_\xi \\ \cos \varphi(\tau) &< 1 \text{ при } \tau \neq 0 \quad \langle \xi(t), \xi(t+\tau) \rangle = \|\xi(t)\| \cdot \|\xi(t+\tau)\| \cos \varphi(\tau) < E_\xi \end{aligned}$$

На практиці сигнали зазвичай задаються на інтервалі позитивних значень аргументів від $0-T$, що дає можливість продовження інтервалу нульовими значеннями, якщо це необхідно для математичних операцій. У цих межах обчислень зручнішим для побудови обчислювальних алгоритмів є зсув копії сигналу вправо по осі аргументів, тобто застосування у виразі (1.1) функції копії $\xi(t-\tau)$:

$$r_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\xi(t-\tau)dt, \quad (1.3)$$

В міру збільшення значення величини зсуву τ для фінітних сигналів тимчасове перекриття сигналу з його копією зменшується, а, відповідно, косинус кута взаємодії і скалярний добуток в цілому прямують до нуля:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_\xi(\tau) = 0.$$

АКФ, обчислена для центрованого значення сигналу $s(t)$, є автоковаріаційною функцією сигналу:

$$b_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi(t) - m_\xi)(\xi(t+\tau) - m_\xi)dt, \quad (1.4)$$

де m_ξ – середнє значення сигналу. Коваріаційні функції пов'язані з кореляційним функціями достатньо простим співвідношенням:

$$b_\xi(\tau) = r_\xi(\tau) - m_\xi^2.$$

1.1.1 Автокореляційний аналіз експериментальних сигналів обмежених в часі

На практиці зазвичай досліджуються сигнали, задані на певному інтервалі $[a, b]$, при цьому обчислення АКФ проводиться з нормуванням на довжину інтервалу $[a, b]$:

$$r_{\xi}(\tau) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(t) \xi(t+\tau) dt. \quad (1.5)$$

АКФ може бути обчислена і для слабозатухаючих сигналів з нескінченною енергією, як середнє значення скалярного добутку сигналу і його копії при прямуванні інтервалу завдання сигналу до нескінченності:

$$r_{\xi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t+\tau) dt. \quad (1.6)$$

АКФ по даних виразах має фізичну розмірність потужності, і рівна середній взаємній потужності сигналу і його копії у функціональній залежності від зсуву копії.

1.1.2 Автокореляційний аналіз дискретних експериментальних сигналів.

При інтервалі дискретизації даних $\Delta t = const$ обчислення АКФ виконується по інтервалах $\Delta \tau = \Delta t$ і зазвичай записується, як дискретна функція номерів n зсуву відліків $n\Delta \tau$:

$$r_{\xi}(n) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \xi_{k+n}, \quad (1.7)$$

Дискретні сигнали зазвичай задаються у вигляді числових масивів певної довжини з нумерацією відліків $k = 0, 1, \dots, N$, а обчислення дискретної АКФ виконується в односторонньому варіанті з урахуванням довжини масивів по формулі:

$$r_{\xi}(n) = \frac{N \cdot \Delta t}{N+1-n} \sum_{k=0}^{N-n} \xi_k \xi_{k+n}. \quad (1.8)$$

Множник $N/(N+1-n)$ у даній функції є поправочним коефіцієнтом на поступове зменшення числа перемножуваних і підсумованих значень (від N до $N-n$) у міру збільшення зсуву n . Без цієї поправки для нецентрованих сигналів в значеннях АКФ з'являється тренд підсумування середніх значень.

Практично, дискретна АКФ має такі ж властивості, як і безперервна АКФ. Вона також є парною, а її значення при $n=0$ рівно потужності дискретного сигналу.

1.2. Взаємкореляційна обробка біосигналів

Взаємкореляційна функція (ВКФ) різних сигналів (cross-correlation function, CCF) описує як ступінь схожості форми двох сигналів, так і їх взаємне розташування один щодо одного по координаті (незалежною змінною). Узагальнюючи формулу (2.1) автокореляційної функції на два різні сигнали $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ отримуємо наступний скалярний добуток сигналів:

$$r_{\xi_1, \xi_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t) \xi_2(t - \tau) dt, \quad (1.9)$$

Взаємна кореляція сигналів характеризує певну кореляцію явищ і фізичних процесів, що відображаються даними сигналами, і може служити мірою “стійкості” даного взаємозв'язку при роздільній обробці сигналів в різних пристроях. Для кінцевих по енергії сигналів ВКФ також кінцева, при цьому:

$$r_{\xi_1, \xi_2}(\tau) = \|\xi_1(t)\| \cdot \|\xi_2(t)\|, \quad (1.10)$$

що виходить з нерівності Коші-Буняковського і незалежності норм сигналів від зсуву по координатах.

При заміні змінною $t = t - \tau$ у формулі (1.9), отримуємо:

$$r_{\xi_1, \xi_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t - \tau) \xi_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t) \xi_2(t - \tau) dt = r_{\xi_1, \xi_2}(-\tau). \quad (1.11)$$

Звідси слідує, що для ВКФ не виконується умова парності, $r_{\xi_1\xi_2}(\tau) \neq r_{\xi_1\xi_2}(-\tau)$, і значення ВКФ не зобов'язані мати максимум при $\tau = 0$. Обчислення по формулі (2.7) з повільним збільшенням значення τ означає послідовні зсуви сигналу $\xi_2(t)$ вліво по осі часу (для кожного значення $\xi_1(t)$ для підінтегрального множення беруться значення $\xi_2(t + \tau)$). При $\tau = 0$ сигнали ортогональні і значення $r_{\xi_1\xi_2}(\tau) = 0$. Максимум $r_{\xi_1\xi_2}(\tau)$ буде спостерігатися при зсуві сигналу $\xi_2(t)$ вліво на значення $\tau = 1$, при якому відбувається повне співпадання сигналів $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t + \tau)$.

Для періодичних сигналів поняття ВКФ зазвичай не застосовується, за винятком сигналів з однаковим періодом, наприклад, сигналів входу і виходу систем при вивченні характеристик систем.

Завдання до лабораторної роботи №1

1. Отримати у викладача експериментальні дані у вигляді біосигналів $\xi_1(t)$ (норма) і $\xi_2(t)$ (патологія), або використані власні дані.
2. Розробити блок-схеми автокореляційної, взаємокореляційної обробки біосигналів
3. Обчислити автокореляцію для $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$.
4. Обчислити автоковарацію для $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$.
5. Обчислити взаємокореляційну функцію для $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$.
6. Обчисленні значення автокореляційних, автоковаріаційної та взаємокореляційних функцій зобразити у вигляді графіків.
7. Зробити висновки щодо кореляційного аналізу (подібність сигналів, зв'язок зміни значень в сигналах і т.д.)

Лабораторна робота №2

Спектральна обробка біосигналів

Мета роботи: набути навички по дослідженню спектральних характеристик біосигналів на основі перетворення Фур'є.

Теоретичні відомості

Спектральна (частотна) форма представлення сигналів використовує розкладання сигнальних функцій на періодичні складові.

Періодичність гармонійних коливань досліджував ще в VI столітті до нашої ери Піфагор і навіть розповсюдив його на опис гармонійного руху небесних тіл. Термін "spectrum" ("спектр") вперше застосував І. Ньютон в 1571 році при описі розкладання сонячного світла, пропущеного через скляну призму, на багатоколірну смугу. Він же дав і перше математичне трактування періодичності хвильових рухів. У 18-м столітті вирішеннями хвильових рівнянь (у додатку до струн) займалися Данило Бернуллі і Леонард Ейлер. По суті, вже Бернуллі і Ейлер показали, що довільними періодичними функціями є суми простих гармонійних функцій – синусів і косинусів кратних частот. Ці суми отримали назву *рядів Фур'є*, після того, як в 1807 році французький інженер Жан Батист Фур'є обґрунтував метод обчислення коефіцієнтів тригонометричного ряду, яким можна відобразити з абсолютною точністю (при нескінченному числі членів ряду) або апроксимувати із заданою точністю (при обмеженні числа членів ряду) будь-яку періодичну функцію, визначену на інтервалі одного періоду $T = b - a$, і яка задовольняє умовам Дірхле (обмежена, кусково-безперервна, з кінцевим числом розривів 1-го роду). Ряди Фур'є в дійсній формі мають наступний вигляд:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k f_1 x) + b_k \sin(2\pi k f_1 x)), \quad f_1 = \frac{1}{T},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_a^b y(x) \cos(2\pi k f_1 x) dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_a^b y(x) \sin(2\pi k f_1 x) dx$$

Розкладання сигналу на гармонійні функції отримало назву *прямого перетворення Фур'є*. Зворотний процес – синтез сигналу по синусоїдах – називається *зворотнім перетворенням Фур'є (inverse Fourier transform)*.

Розклад на гармонічні функції (*спектральний аналіз*) полягає в розкладанні сигналу на його частотні або спектральні складові і оцінці або вимірюванні їх спектральних характеристик – амплітуди, фази, потужності, спектральної потужності та ін.

Спектральне перетворення функцій, по суті, є представленням функцій в новій системі координат, тобто переклад початкових функцій на новий координатний базис. Вибір найбільш раціональної ортогональної системи координатного базису функцій, як правило, залежить від мети досліджень і визначається прагненням максимального спрощення математичного апарату аналізу, перетворень і обробки даних. Найбільшого поширення набуло перетворення сигналів в базисах гармонійних функцій: комплексних експоненціальних $e^{j\omega t}$ і тригонометричних синус-косинусних функцій, зв'язаних один з одним формулою Ейлера ($e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$). Це пояснюється тим, що гармонійні коливання є функціями часу, які зберігають свою форму при проходженні через будь-яке лінійне коло, а змінюються тільки амплітуда і початкова фаза коливань, що є дуже зручним для аналізу систем перетворення сигналів.

1. Ряд Фур'є

Будь-який складний періодичний біосигнал $\xi(t)$ будь-якої форми, який заданий на інтервалі $T = b - a$ і задовольняє на цьому інтервалі умови Діріхле (скінчена кількість розривів першого роду і скінчена кількість максимумів і мінімумів), можна подати рядом Фур'є у так званій експонентційній формі:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{jn\Delta\omega t}, \quad S_n = S(n\Delta\omega), \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.1)$$

де вагові коефіцієнти S_n ряду визначають по формулі:

$$S_n = \frac{1}{T} \int_a^b \xi(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Ряд Фур'є представляє собою ансамбль комплексних експонент $e^{jn\Delta\omega t}$ з частотами, які утворюють арифметичну прогресію. Функцію вагових коефіцієнтів $S(n\Delta\omega)$ прийнято називати комплексним спектром періодичного сигналу або Фур'є-образом функції $\xi(t)$. Спектр біосигналу є дискретною функцією, так як він визначений тільки для цілих значень n з кроком по частоті, зворотнім періоду: $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ (або $\Delta f = \frac{1}{T}$). Першу частотну складову спектру при $n=1$ рівну $\omega_1 = 1 \cdot \Delta\omega = 2\pi/T$ (або $f_1 = 1/T$), називають *основною частотою* сигналу (першою гармонікою), решта частот дискретного спектру $n\omega_1$ при $n > 1$ називають гармоніками сигналу. Значення $S(n\Delta\omega)$ по позитивних і негативних значеннях n є комплексно зв'язаними. Крок по частоті $\Delta\omega$ між двома сусідніми синусоїдами з розкладання Фур'є називається *частотним розширенням* спектру.

З точки зору математичних позицій множина функцій $e^{jn\Delta\omega t}$, $-\infty < n < \infty$ утворює безкінцевомірний базис лінійного простору $L^2[a, b]$ ортогональних синус-косинусних функцій, а коефіцієнт S_n по (2) представляє собою проєкції сигналу $\xi(t)$ на ці базисні функції. Відповідно, сигнал $\xi(t)$ в вигляді ряду Фур'є (1) – це безкінцевомірний вектор в просторі $L^2[a, b]$, точка з координатами S_n по базисним осям простору $e^{jn\Delta\omega t}$.

Підінтегральну функцію експоненти в виразі (2.2) з використанням тотожності Ейлера:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t),$$

можна розкласти на косинусну і синусну складові, і виразити комплексний спектр у вигляді дійсної і уявної частини:

$$S_n = \frac{1}{T} \int_a^b \xi(t) [\cos(n\Delta\omega t) - j \sin(n\Delta\omega t)] dt = A_n - jB_n. \quad (2.3)$$

$$A_n = A(n\Delta\omega) = \frac{1}{T} \int_a^b \xi(t) \cos(n\Delta\omega t) dt, \quad (2.4)$$

$$B_n = B(n\Delta\omega) = \frac{1}{T} \int_a^b \xi(t) \sin(n\Delta\omega t) dt, \quad (2.5)$$

Комплексні числа дискретної функції (2.3) можуть бути представлені у вигляді модулів і аргументів комплексної експоненти, що дає наступну форму запису комплексного спектру:

$$S_n = R_n \cdot e^{j\varphi_n}, \quad (2.6)$$

$$R_n^2 = R^2(n\Delta\omega) = A^2(n\Delta\omega) + B^2(n\Delta\omega), \quad (2.7)$$

$$\varphi_n = \varphi(n\Delta\omega) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{B(n\Delta\omega)}{A(n\Delta\omega)} \right). \quad (2.8)$$

Модуль спектру $R(n\Delta\omega)$ називають двостороннім спектром амплітуд або АЧХ - амплітудно-частотною характеристикою сигналу, а аргумент спектру (послідовність фазових кутів $\varphi(n\Delta\omega)$) - двостороннім спектром фаз або ФЧХ - фазово-частотною характеристикою.

2. Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є може бути отримано безпосередньо із інтегрального перетворення дискретизацій аргументів ($t_k = k\Delta t$, $f_n = n\Delta f$), Δt - крок дискретизації:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad S(f_n) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi(t_k) e^{-j2\pi f_n k \Delta t}, \quad (2.9)$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df, \quad \xi(t_k) = \Delta f \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f_n) e^{-j2\pi f_n k \Delta t}. \quad (2.10)$$

Нагадаємо, що дискретизація функції в часі приводить до періодизації її спектра, а дискретизація спектра по частоті - до періодизації функції. Не слідую також забувати, що значення (2.9) числового ряду $S(f_n)$ є дискретизацією

неперервної функції $S'(f)$ спектру дискретної функції $\xi(t_k)$, яке рівне як і значення (2.10) числового ряду $\xi(t_k)$ є дискретизацією неперервної функції $\xi'(t)$, і при відновленні цих неперервних функції $S'(f)$ і $\xi'(t)$ по їх дискретним відлікам відповідність $S'(f) = S(f)$ і $\xi'(f) = \xi(f)$ гарантовано тільки при виконанні теореми Котельникова-Шенона.

Для дискретних перетворень $\xi(k\Delta t) \Leftrightarrow S(k\Delta f)$ і функція, і її спектр дискретні і періодичні, а числові масиви їх представлення відповідають заданню на головних періодах $T = N\Delta t$ (від 0 до T або від $-T/2$ до $T/2$), і $2f_N = N\Delta f$ (від $-f_N$ до f_N), де N – кількість відліків, при цьому:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_N} = \frac{1}{N\Delta f}, \quad \Delta t\Delta f = \frac{1}{N}, \quad N = 2Tf_N, \quad (2.11)$$

Співвідношення (2.11) є умовами інформаційної рівноцінності динамічної і частотної форм представлення дискретних сигналів. Іншими словами: число відліків функції і її спектру повинні бути однаковими. Але кожен відлік комплексного спектру представляється двома дійсними числами і, відповідно, число відліків комплексного спектру в 2 рази більше відліків функції? Це так. Проте представлення спектру в комплексній формі - не більше ніж зручне математичне представлення спектральної функції, реальні відліки якої утворюються складанням двох зв'язаних комплексних відліків, а повна інформація про спектр функції в комплексній формі поміщена тільки в одного його половині - відліках дійсної і уявної частини комплексних чисел в частотному інтервалі від 0 до f_N , оскільки інформація другої половини діапазону від 0 до $-f_N$ є зв'язаною з першою половиною і ніякої додаткової інформації не несе.

При дискретному представленні сигналів аргумент t_k зазвичай подається номерами відліків k (по замовчуванню $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$), а перетворення Фур'є виконується по аргументу n (номер кроку по частоті) на головних періодах. При значеннях N , кратних 2:

$$S(f_n) = S_n = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k e^{-j2\pi kn/N}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}. \quad (2.12)$$

$$S(t_k) = \xi_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} S_n e^{j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.13)$$

Головний період спектру в (2.12) для циклічних частот від -0.5 до 0.5 , для кутових частот від $-\pi$ до π . При непарному значенні N межі головного періоду по частоті (значення $\pm f_N$) знаходяться на половину кроку по частоті за відліками $\pm(N/2)$ і, відповідно, верхня межа підсумовування в (2.13) встановлюється рівною $N/2$.

В обчислювальних операціях на ПК для виключення негативних частотних аргументів (негативних значень номерів n) і використання ідентичних алгоритмів прямого і зворотного перетворення Фур'є головний період спектру зазвичай приймається в інтервалі від 0 до $2f_N$ ($0 \leq n \leq N$), а підсумовування в (2.13) проводиться відповідно від 0 до $N-1$. При цьому слід враховувати, що комплексно зв'язаним відлікам S_n^* інтервалу $(-N, 0)$ двостороннього спектру в інтервалі $0-2f_N$ відповідають відліки S_{N+1-n} (тобто зв'язаними відліками в інтервалі $0-2f_N$ є відліки S_n і S_{N+1-n}).

Завдання до лабораторної роботи №2

8. Ознайомитися із теоретичними відомостями.
9. Отримати у викладача експериментальні дані у вигляді дискретної послідовності ξ_i , із заданими значеннями частоти дискретизації Δf .
10. Побудувати графіки залежності біосигналів ξ від t в часовій області, шляхом переходу із дискретної області в часову.
11. Розробити блок-схеми спектральної обробки біосигналів
12. Використовуючи засоби Matlab (функція **fft** – пряме перетворення Фур'є) та вираз 2.12 здійснити перехід від дискретної області в частотну область.

13. Побудувати графіки амплітудно-частотної $R(n\Delta f)$ та фазово-частотної $\varphi(n\Delta f)$ характеристик біосигналу за виразами (2.7) і (2.8) (застосувавши перехід від циклічної частоти ω до f).
14. Зробити висновки щодо спектрального складу біосигналів та результатів їх порівняння

Лабораторна робота №3

Спектрально-кореляційна обробка біосигналів

Мета роботи: дослідити енергетичні характеристики (потужність та енергія) біосигналів на основі поєднання кореляційної та спектральної обробок.

Теоретичні відомості

Поняття потужності і енергії в теорії сигналів не відносяться до характеристик яких-небудь фізичних величин сигналів, а є їх кількісними характеристиками, що відображають певні властивості сигналів і динаміку зміни їх значень в часі, в просторі або по будь-яких інших аргументах.

Для довільного, в загальному випадку комплексного, сигналу миттєва потужність за визначенням дорівнює квадрату функції його модуля, для дійсних сигналів - квадрату функції амплітуд. Енергія сигналу, також за визначенням, дорівнює інтегралу від потужності по всьому інтервалу існування або завдання сигналу.

Енергія сигналів може бути кінцевою або нескінченною. Кінцеву енергію мають фінітні сигнали і сигнали, затухаючі по своїх значеннях в межах кінцевої тривалості, які не містять дельта-функцій і особливих точок (розривів другого роду і ланок, що прямують в нескінченність). Інакше їх енергія дорівнює нескінченності. Нескінченна також енергія періодичних сигналів.

3.1 Потужність та енергія сигналів

Частотне представлення застосовується не тільки для спектрального аналізу сигналів, але і для спрощення обчислень енергії сигналів і їх кореляційних характеристик.

Як вже розглядалося раніше, для довільного сигналу $\xi(t) = a(t) + jb(t)$, де $a(t)$ і $b(t)$ - дійсні функції, миттєва потужність сигналу (густина розподілу енергії) визначається виразом:

$$w(t) = \xi(t)\xi^*(t) = a^2(t) + a^2(t) = |\xi(t)|^2.$$

Енергія сигналу дорівнює інтегралу від потужності по всьому інтервалу існування сигналу. В межах:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt. \quad (3.1)$$

По суті, миттєва потужність є густиною потужності сигналу, оскільки вимірювання потужності можливе тільки через енергію, що виділяється на певних інтервалах ненульової довжини:

$$w(\tau) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau-\Delta t/2}^{\tau+\Delta t/2} |\xi(t)|^2 dt. \quad (3.2)$$

Сигнал $s(t)$ вивчається, як правило, на певному інтервалі T (для періодичних сигналів - в межах одного періоду T), при цьому середня потужність сигналу:

$$W_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} w(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} |\xi(t)|^2 dt$$

Поняття середньої потужності може бути поширене і на незгасаючі сигнали, енергія яких нескінченно велика. В разі необмеженого інтервалу T строге коректне визначення середньої потужності сигналу проводиться згідно виразу:

$$W_\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt. \quad (3.3)$$

Енергія і норма сигналів зв'язані співвідношеннями:

$$E_\xi = \|\xi(t)\|^2, \quad \|\xi\| = \sqrt{E_\xi}.$$

3.3. Спектральна густина потужності автокореляційної функції

Автокореляційна функція (АКФ) (correlation function, CF) сигналу $\xi(t)$ кінцевого по енергії, є кількісною інтегральною характеристикою форми сигналу, і визначається інтегралом від добутку двох копій сигналу $\xi(t)$ зсунутих один відносно одного на певний час τ :

$$r_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\xi(t+\tau)dt. \quad (3.4)$$

Добуток двох копій сигналу може бути визначений через добуток їх спектральних густин сигналу і представляє собою спектральну густина взаємної потужності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\xi(t+\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f)S_{\tau}^{*}(f)df$$

Зсув сигналу по осі абсцис на інтервал τ відображається в спектральному представленні множенням спектру сигналу на $\exp(-j2\pi f\tau)$, а для зв'язаного спектру на множник $\exp(j2\pi f\tau)$:

$$S_{\tau}^{*}(f) = S^{*}(f)\exp(j2\pi f\tau)$$

З урахуванням цього отримано:

$$r_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^{*}(f)\exp(j2\pi f\tau)df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \exp(j2\pi f\tau)df$$

Останній вираз є зворотнім перетворенням Фур'є енергетичного спектру сигналу (спектральної густини енергії). Отже, енергетичний спектр сигналу і його автокореляційна функція зв'язані перетворенням Фур'є:

$$r_{\xi}(\tau) \Leftrightarrow |S(f)|^2 = W_s(f)$$

Аналогічний результат може бути отриманий і прямим перетворенням Фур'є автокореляційної функції:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} r_{\xi}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) df &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \xi(t-\tau) \exp(-j2\pi f\tau) dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \exp(-j2\pi f\tau) df \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-\tau) \exp(-j2\pi f(t+\tau)) d(t+\tau) d\tau = S(f) S^*(f) = W_{\xi}(f) \end{aligned}$$

Таким чином, спектральна густина АКФ є не що інше, як спектральна густина потужності сигналу, яка, в свою чергу, може визначатися прямим перетворенням Фур'є через АКФ:

$$|S(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\xi}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Отже, використання спектрально-кореляційного аналізу дає змогу визначити розподіл потужності сигналу по частотних складових сигналу, що є важливим при дослідженні енергетичних характеристик сигналу в спектральній області.

Завдання до лабораторної роботи №3

15. Ознайомитися із теоретичними відомостями.
16. Отримати у викладача експериментальні дані біосигналів у вигляді дискретної послідовності ξ_i , із заданими значеннями частоти дискретизації Δf .
17. Побудувати графік залежності сигналу ξ від t в часовій області, шляхом переходу із дискретної області в часову.
18. Побудувати блок-схеми спектрально-кореляційної обробки біосигналів.
19. Обчислити енергію біосигналу згідно виразу 3.1.
20. Обчислити значення миттєвих потужностей біосигналу згідно виразу 3.2.
21. Обчислити середню потужність біосигналу згідно виразу 3.3.
22. Обчислити автокореляційну функцію для дискретної послідовності ξ_i засобами Matlab (функція **xcorr** – кореляція) згідно виразу 3.3.

23. Обчислити спектр для кореляційної функції біосигналу використовуючи засоби Matlab (функція **fft** – пряме перетворення Фур'є) згідно виразу 3.5.
24. Обчислені значення спектрально-автокореляційної обробки біосигналу зобразити у вигляді графіку із позначеними осями в частотній області.
25. Зробити висновки щодо спектрально-кореляційної обробки експериментальних біосигналів.

Лабораторна робота №4

Статистична обробка біосигналів

Мета роботи: дослідити статистичні характеристики біосигналів.

Теоретичні відомості

Зареєстровані реалізації біосигналів в загальному випадку є випадковими функціями (стохастична модель), тому для їх аналізу одержують експериментальним шляхом кількісну інформацію про властивості сигналів, що описуються статистичними характеристиками із застосуванням теорії ймовірностей і математичної статистики випадкових процесів.

Біосигнал як випадковий процес в його математичному описі $\zeta(t)$ є функцією, яка відрізняється тим, що її значення (дійсні або комплексні) в довільні моменти часу по координаті t є випадковими. Строго з теоретичних позицій, біосигнал як випадковий процес $\zeta(t)$ слід розглядати як сукупність часових функцій $\zeta_k(t)$, що мають певну загальну статистичну закономірність. При реєстрації біосигналу на певному часовму інтервалі здійснюється фіксація одиначної реалізації $\zeta_k(t)$ з зліченного числа можливих реалізацій процесу $\zeta(t)$ (вибіркова функція біосигналу (рисунок 4.1) як випадкового процесу $\zeta(t)$), яка не характеризує процес в цілому, але за певних умов по ній можуть бути виконані оцінки статистичних характеристик процесу.

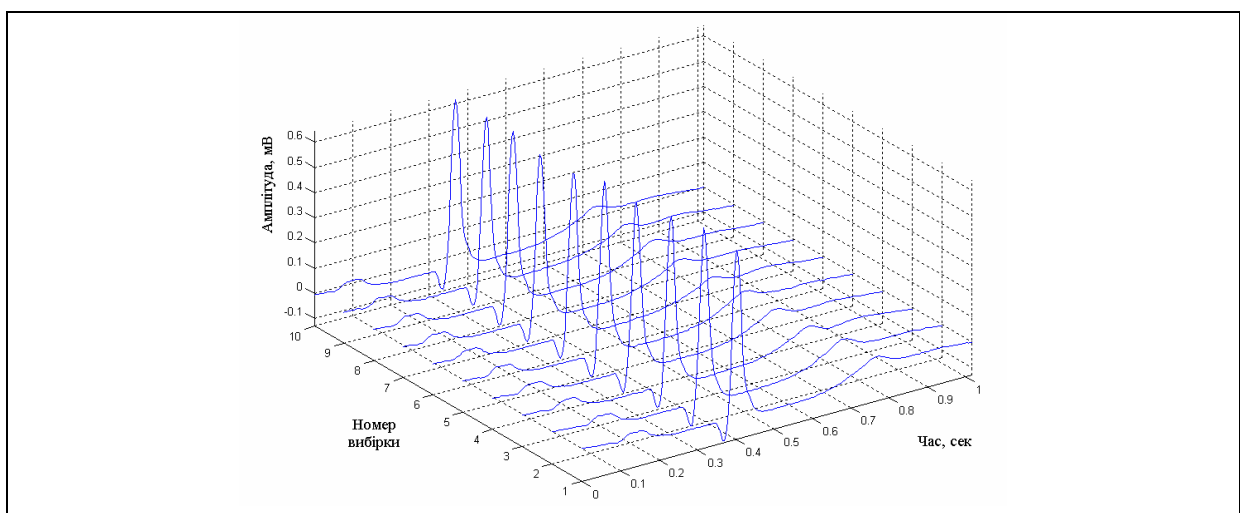


Рис. 2.3. Вибіркові функції (ансамбль реалізацій) біосигналу $\zeta_k(t)$

Трактуючи біосигнал в термінах теорії стаціонарних ВП як реалізацію стаціонарного в широкому сенсі ВП, то властивість цього процесу можна оцінити в будь-який момент часу шляхом усереднення (математичне сподівання) по сукупності вибірових функцій (4.1), які утворюють випадковий процес:

$$m_{\xi}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k(t), \quad t \in [0, T) \quad (4.1)$$

де k – номер періоду (повтору) біосигналу;

N – кількість серцевих періодів (повторів) в реалізації біосигналу,

Мірою відхилення i -ої реалізації від середнього значення є оцінка дисперсії:

$$D_{\xi}(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\xi_k(t) - m_{\xi}(t)]^2. \quad (4.2)$$

Показником розсіювання значень випадкових величин біосигналу відносно її математичного сподівання є середньоквадратичне відхилення, яке дорівнює кореню квадратному з дисперсії випадкової величини:

$$\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{D_{\xi}(t)}, \quad (4.3)$$

По суті **середнє квадратичне відхилення** – це найбільш використовуваний індикатор мінливості обіосигналу, що показує, на скільки в середньому відхиляються значення біосигналу від їх середньої величини $m_{\xi}(t)$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\xi}(t)$ використовують під час розрахунку стандартної похибки середнього арифметичного, для побудови довірчих інтервалів, статистичної перевірки гіпотез, виміру лінійного взаємозв'язку між випадковими величинами біосигналу.

Чим більше значення середньоквадратичного відхилення $\sigma_{\xi}(t)$ біосигналу тим більший розкид значень навколо середньої величини; менше відповідно показує, що значення випадкової величини згруповані навколо середнього значення.

На практиці середньоквадратичне відхилення дозволяє оцінити, наскільки значення із множини можуть відрізнятися від середнього значення.

Завдання до лабораторної роботи №4

26. Ознайомитися із теоретичними відомостями.
27. Отримати у викладача експериментальні дані біосигналів (норма та патологія) у вигляді дискретної послідовності ξ_i , із заданими значеннями частоти дискретизації Δf .
28. Побудувати графік залежності сигналу ξ від t в часовій області, шляхом переходу із дискретної області в часову.
29. Побудувати блок-схеми статистичної обробки біосигналів згідно виразів 4.1-4.3.
30. Визначити період біосигналу T .
31. Розкласти реалізацію біосигналу $\xi(t)$ на ансамбль реалізацій $\xi_k(t)$, які його утворюють.
32. Обчислити математичне сподівання біосигналу $m_{\xi}(t)$ згідно виразу 4.1.
33. Обчислити дисперсію біосигналу $D_{\xi}(t)$ згідно виразу 4.2.
34. Обчислити середньоквадратичне відхилення біосигналу $D_{\xi}(t)$ згідно виразу 4.3.
35. Обчисленні значення математичне сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення біосигналу зобразити у вигляді графіків із позначеними осями.
36. Зробити висновки щодо результатів статистичної обробки біосигналів.

Список використаних джерел

1. Абакумов В. Г., Готра З. Ю., Злепко С. М. Реєстрація, обробка та контроль біомедичних сигналів. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 352 с.
2. Абакумов В.Г., Геранін В.О., Рибін О.І., Сватош Й., Синєкоп Ю.С. Біомедичні сигнали та їх обробка. – К.: ВЕК+, 1997. – 352 с.
3. Рангайян Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический поход. Пер. с англ. под ред. А.П. Немирко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 440 с.
4. Бабак В.П., Хандецький В.С., Шрюфер Е. Обробка сигналів: Підручник для студентів технічних спеціальностей вузів. К.:Либідь, 1996, 1999.
5. Шрюфер Э. Обработка сигналов: цифровая обработка дискретизированных сигналов: Учебник для студентов технических специальностей вузов. К.:Либідь, 1995.
6. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604с.
7. http://www.nbuu.gov.ua/portal/natural/ii/2010_3/AI_2010_3%5C2%5C00_Martynyuk.pdf– класифікатор біомедичних сигналів;
8. <http://www.audioquest.ru/upload/iblock/1b5/1b5185fc0bfcdb2af52151b5e180ba02.pdf> – методи обробки біомедичних сигналів в пакеті MATLAB. Комп'ютерних лабораторний Практикум.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
Кафедра біотехнічних систем
Тернопіль, 2017