УДК 517.9
Б.Г. Шелестовський, к.ф.-м.н., доц.; О.І. Панчук
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ЗАДАЧА РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

B.H. Shelestovskii, Ph.D., Assoc. Prof; O.I. Panchuk

RIEMANN-HILBERT PROBLEM FOR HALF-PLANE

Для розв’язання низки плоских контактних задач, зокрема задач про контактну взаємодію жорстких штампів із попередньо напруженою півплощиною, доводиться шукати розв’язок задачі Рімана-Гільберта для півплощини. Як відомо, вона полягає у побудові комплексної функції $w(z)=u+iv$, яка на осі Ox задовольняє умову

$$a(x)u+b(x)v=f(x). \tag{1}$$

Враховуючи фізичний зміст, на функцію $w(z)$ додатково накладаються умови регулярності в півплощині, за винятком межі, де вона в точках розриву функцій $a(x)$ та $b(x)$ може мати особливості виду $z^{-\theta}$, $|\theta|<1$, а також умова прямування до нуля на нескінченності аналогічно cz^{-1}.

Шуканий розв’язок представляється у вигляді

$$w(z)=w_1(z)+w_0(z), \tag{2}$$

де $w_0(z)=u_0+iv_0$ є розв’язком відповідної однорідної задачі, тобто функція $w_0(z)$ на осі Ox задовольняє умову

$$a(x)u_0+b(x)v_0=0. \tag{3}$$

Розглянемо функцію $\omega(x)=arctg\dfrac{a(x)}{b(x)}$. Аналітичну функцію, регулярну у нижній півплощині та нескінченно малу на нескінченності, дійсна частина якої на осі рівна $\omega(x)$ можна записати так:

$$\Omega(z)=\Omega_1-\Omega_2 i=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)\frac{dx}{x-z}=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}arctg\frac{a(x)}{b(x)}\frac{dx}{x-z}.$$

Тобто, на осі Ox при підході до точки $z=x$ знизу будемо мати

$$\Omega_1(x)-\Omega_2(x)i=arctg\frac{a(x)}{b(x)}-\Omega_2(x)i.$$

Перепишемо умову (3)

$$a(x)u_0+b(x)v_0=\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}\left[\frac{a(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}u_0+\frac{b(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}v_0\right]=$$

$$=\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}\left[\cos\left(arctg\frac{a(x)}{b(x)}\right)u_0+\sin\left(arctg\frac{a(x)}{b(x)}\right)v_0\right]=0, \text{ або}$$

$$\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}\,\mathrm{Re}\left[e^{i\Omega_1(x)}w_0(x-i0)\right]=0.$$

Оскільки функції $a(x)$ та $b(x)$ не можуть одночасно перетворюватись у нуль, то

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\Omega_1(x)}w_0(x-i0)\right]=0, \text{ або інакше}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} arctg\frac{a(x)}{b(x)}\frac{dx}{x-z}\right]w_0(z)\right\}\Bigg|_{z=x-i0}=0.$$

Остання умова буде виконана, якщо вираз, від якого береться дійсна частина, дорівнюватиме деякій функції, що приймає на дійсній осі уявні значення. Оскільки $w_0(z)$ повинна бути регулярною у нижній півплощині, то в якості такої функції можна вибрати

$$\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} arctg\frac{a(x)}{b(x)}\frac{dx}{x-z}\right]w_0(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}i,$$

причому

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{\prod_n(z-\beta_n)},$$

де β_n – дійсні коефіцієнти, а многочлен $P(z)$ приймає дійсні значення на осі Ox.

Отже, для функції $w_0(z)$ отримаємо наступний вираз

$$w_0(z)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} arctg\frac{a(x)}{b(x)}\frac{dx}{x-z}\right]\frac{P(z)}{\prod_n(z-\beta_n)}i. \qquad (4)$$

Виходячи із умов, що накладались на функцію $w_0(z)$, значення коефіцієнтів β_n повинні збігатися із точками розриву функцій $a(x)$ та $b(x)$. Проте їх кількість може бути меншою за кількість точок розриву. Оскільки у вираз для многочлена $P(z)$ може входити декілька довільних сталих, то розв'язок однорідної задачі Рімана-Гільберта не єдиний. Кількість сталих можна зменшити накладанням умов щодо характеру точок розриву функцій $a(x)$ та $b(x)$. Зокрема, у випадку контактної взаємодії півплощини та одного штампа, функції $a(x)$ та $b(x)$ матимуть розриви лише у двох точках, тому співвідношення (4) набуде простішого вигляду.

$$w_0(z)=ic\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} arctg\frac{a(x)}{b(x)}\frac{dx}{x-z}\right].$$

Для відшукання функції $w_1(z)=u_1-v_1 i$, що є розв'язком неоднорідної задачі, знайдемо дійсну частину частки $\dfrac{iw_1(z)}{w_0(z)}$.

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{iw_1}{w_0}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{i(u_1-v_1 i)}{(u_0-v_0 i)}\right\}=\frac{u_0v_1-v_0u_1}{|w_0|^2}.$$

А врахувавши умови (3) та (1) отримаємо

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{iw_1(x-i0)}{w_0(x-i0)}\right\}=\frac{a(x)u_1+b(x)v_1}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}\frac{1}{|w_0(x-i0)|}=\frac{f(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}\frac{1}{|w_0(x-i0)|}.$$

А тому

$$w_1(z)=w_0(z)\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}\frac{1}{|w_0(x-i0)|}\frac{dx}{x-z}\right]. \qquad (5)$$

Остаточний розв'язок задачі отримується на основі (2) із використанням (4) та (5).